دانشگاه سمنان

دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد ریاضی (آنالیز)

حل معادلات دیفرانسیل و انتگرال با استفاده از قضیه نقطه ثابت باناخ و تعمیم های آن

توسط:

سیده پرستو حسینی

استاد راهنما:

دکتر مجید اسحاقی

استاد مشاور:

دکتر علی غفاری

آبان ۱۳۹۱

تقدیم به:

همه آنهایی که می خواهند بیشتر بدانند

قدردانی

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر مجید اسحقی گرجی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از سرکار خانم مریم رمضانی که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از همسر عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودش، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بود.

چکیده

در این پایان نامه به بیان و بررسی قضیه نقطه ثابت باناخ بر روی نگاشت انقباضی از نوع پاتا می پردازیم وکاربردی از این قضیه را در اثبات وجود جواب معادلات دیفرانسیل و معادلات انتگرال بیان می کنیم. همچنین پایداری برخی از معادلات انتگرال از جمله معادله انتگرال از نوع ولترا را اثبات می کنیم.

واژه‌های کلیدی: نقطه ثابت، نقطه ثابت مشترک، معادله انتگرال اولترا، پایداری.

فهرست مطالب

۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی **۱**
۱-۱ مقدمه ۱

۲ نقطه ثابت مشترک برای نگاشت انقباضی پاتا و کاربردی از آن در حل معادلات دیفرانسیل **۷**
۲-۱ قضایا ۷
۲-۲ کاربردها ۲۲

۳ نقطه ثابت مشترک برای نگاشت انقباضی پاتا در فضای سنجش **۲۵**
۳-۱ مقدمه ۲۵
۳-۲ قضایا ۲۷

۴ معادلات انتگرال و پایداری آنها **۴۰**
۴-۱ مقدمه ۴۰
۴-۲ قضایا ۴۶

کتاب‌نامه **۵۲**

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی **۵۵**

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی **۵۷**

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱-۱ مقدمه

نظریه نقطه ثابت به عنوان یکی از مهم ترین ابزار برای آنالیز تابعی به شمار می رود و بطور گسترده ای برای بهینه سازی، الگوریتم های محاسباتی، فیزیک، نامعادلات متغیر، معادلات دیفرانسیل معمولی، معادلات انتگرال و معادلات ماتریس کاربرد دارد، برای مثال می توان به [۱۰] ، [۲] ، [۶] ، [۷] ، [۱]، [۱۵]، [۹]، [۱۴]، [۱۶]، [۱۲]، [۱۷]، [۱۱]، [۲۰]، [۸]، [۱۳] و [۵] اشاره کرد. اولین مطالعه ی وجود نقطه ثابت توسط باناخ برای نگاشت های انقباضی انجام شد. او در سال ۱۹۲۲ قضیه نقطه ثابت مشهورش را ثابت کرد. این قضیه که به اصل انقباض باناخ معروف است یک ابزار قوی در آنالیز غیر خطی به شمار می آید. نظریه نقطه ثابت توسط ریاضیدانان بسیاری مورد مطالعه و بررسی قرار گرفت. قضایای ثابت شده به وسیله ی این ریاضیدانان وجود نقطه ثابت را در نگاشت هایی با شرایط و فرضیات متفاوت تحقیق می کند.

تعریف ۱-۱.۱. فرض می کنیم (X, d) یک فضای متریک باشد. نگاشت $f : X \to X$ را یک نگاشت انقباضی گوییم هرگاه عددی مانند $l < ۱$ موجود باشد که

$$\forall x, y \in X \quad d(f(x), f(y)) \leq l d(x, y)$$

l را ضریب انقباضی یا ثابت لیپ شیتس f می نامیم.

قضیه ۱-۲.۱. فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک تام(کامل) و $f : X \to X$ یک نگاشت انقباضی با ضریب انقباضی $l < ۱$ باشد. در این صورت f در X نقطه ثابت منحصربفرد دارد.

اثبات. $x_o \in X$ را به دلخواه اختیار کنیم و دنباله ی بازگشتی $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ را بصورت زیر می نویسیم:

$$x_n = f(x_{n-1}) \qquad n \geq 1$$

نشان می دهیم $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ یک دنباله کوشی است. داریم

$$\begin{cases} d(x_1, x_2) = d(f(x_o), f(x_1)) \leq l d(x_o, x_1) \\ \\ d(x_2, x_3) = d(f(x_1), f(x_2)) \leq l^2 d(x_o, x_1) \\ \\ d(x_3, x_4) = d(f(x_2), f(x_3)) \leq l^3 d(x_o, x_1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow d(x_n, x_{n+1}) \leq l^n d(x_o, x_1)$$

اگر $m > n > 1$ در اینصورت:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + ... + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq l^{m-1} d(x_o, x_1) + l^{m-2} d(x_o, x_1) + ... + l^n d(x_o, x_1) \\ &\leq l^n[(l^{m-n-1} + l^{m-n-2} + ... + l^o) d(x_o, x_1)] \\ &\leq l^n(\frac{1}{1-l}) d(x_o, x_1) \end{aligned}$$

بنابراین $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ کوشی است و چون X فضای متریک کامل است $z \in X$ای موجود است که $x_n \to z$. نشان می دهیم z نقطه ثابت منحصربفرد f است. تابع f بر X پیوسته است. زیرا برای $\varepsilon > o$ داده شده قرار دهیم $\delta = \frac{\varepsilon}{l}$ در اینصورت:

$$\forall x, y \in X \quad d(x, y) < \delta \quad \Rightarrow \quad d(f(x), f(y)) \leq l d(x, y) \leq l\delta = l\frac{\varepsilon}{l} = \varepsilon$$

بنابراین چون $x_n \to z$ پس $f(x_n) \to f(z)$ و

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = z$$

اکنون فرض کنیم z' هم نقطه ثابت f باشد. داریم

$$d(z,z') = d(f(z), f(z')) \leq ld(z,z')$$

اگر $d(z,z') \neq o$ در اینصورت $l \geq ۱$ که تناقض است، بنابراین $d(z,z') = o$ یعنی $z = z'$. □

تعریف ۱-۱.۳. فرض کنیم X یک مجموعه ی ناتهی است. تابع $d : X \times X \to [o, \infty)$ یک متریک تعمیم یافته روی X است اگر و فقط اگر در شرایط زیر صدق کند:

(۱) برای هر $x, y \in X$؛ $d(x,y) = o$ اگر و تنها اگر $x = y$

(۲) برای هر $x, y \in X$؛ $d(x,y) = d(y,x)$

(۳) برای هر $x, y, z \in X$؛ $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

قضیه ۱-۱.۴. فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک کامل تعمیم یافته و $\Lambda : X \to X$ یک نگاشت اکید انقباضی با ثابت لیپ شیتس $L < ۱$ است. اگر عدد صحیح نامنفی k وجود داشته باشد بطوریکه برای $x \in X$؛ $d(\Lambda^{k+۱}x, \Lambda^k x) < \infty$ آنگاه موارد زیر برقرارند:

(۱) دنباله $\{\Lambda^n x\}$ به نقطه ثابت x^* از Λ همگراست.

(۲) x^* یک نقطه ثابت یکتا از Λ در

$$X^* = \{y \in X \mid d(\Lambda^k x, y) < \infty\}$$

است.

(۳) اگر $y \in X^*$ آنگاه

$$d(y, x^*) \leq \frac{۱}{۱ - L} d(\Lambda y, y).$$

اثبات. رجوع شود به [۴]. □

یکی از تعمیم های جالب از قضیه ی نقطه ثابت باناخ قضیه نقطه ثابتی است که بوسیله ی پاتا اثبات شد.

قضیه ۱-۱.۵ (نقطه ثابت پاتا). فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک کامل بوده و $f : X \to X$ یک نگاشت باشد. عضو دلخواه $x_o \in X$ را در نظر می گیریم و برای هر $x \in X$ قرار می دهیم

$$\|x\| = d(x, x_o)$$

همچنین فرض کنیم $\Lambda \geq 0$ و $\alpha \geq 1$ و $\beta \in [0, \alpha]$ مقادیر ثابت و $\psi : [0, 1] \to [0, \infty)$ تابعی صعودی، در صفر پیوسته و با شرط $\psi(0) = 0$ است. در اینصورت اگر نامساوی

$$d(f(x), f(y)) \leq (1 - \varepsilon)d(x, y) + \Lambda\varepsilon^{\alpha}\psi(\varepsilon)[1 + \|x\| + \|y\|]^{\beta} \tag{۱-۱}$$

به ازاء هر $\varepsilon \in [0, 1]$ و $x, y \in X$ برقرار باشد، f دارای نقطه ثابت منحصربفرد $x_* = f(x_*)$ می باشد و $f^n = f \circ ... \circ f$. همچنین با در نظر گرفتن دنباله

$$w_n(\alpha) = (\frac{\alpha}{n})^{\alpha} \sum_{k=1}^{n} \psi(\frac{\alpha}{k})$$

و برای مقدار ثابت و مثبتی مانند $C \leq \Lambda(1 + 4\|x_*\|)^{\beta}$ داریم

$$d(x_*, f^n(x_0)) \leq Cw_n(\alpha)$$

.

اثبات. ابتدا نشان می دهیم f یک نگاشت انقباضی ضعیف است، یعنی برای هر $x \neq y$

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y)$$

برای هر $x, y \in X$ می توان (۱-۱) را برای $K > 0$ بصورت زیر نوشت:

$$d(f(x), f(y)) \leq (1 - \varepsilon)d(x, y) + K\varepsilon\psi(\varepsilon)$$

اگر قرار دهیم $\varepsilon = 0$ در اینصورت داریم

$$d(f(x), f(y)) \leq d(x, y).$$

اگر $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ باشد برای هر $\varepsilon \in [0, 1]$ داریم

$$d(x, y) \leq K\psi(\varepsilon)$$

که در اینصورت $d(x, y) = 0$.

دنباله های زیر را معرفی کنیم:

$$x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x_o) \quad , \quad c_n = \|x_n\|.$$

با توجه به نامساوی

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq d(x_n, x_{n-1}) \leq ... \leq d(x_1, x_o) = c_1$$

داریم

$$c_n \leq d(x_{n+1}, x_1) + 2c_1 = d(f(x_n), f(x_o)) + 2c_1.$$

بنابراین چون $\beta \leq \alpha$ با استناد به (۱-۱)، برای $a, b > o$ داریم

$$c_n \leq (1 - \varepsilon)c_n + \Lambda\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon)[1 + c_n + c_o]^\beta + 2c_1 \leq (1 - \varepsilon)c_n + a\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon)c_n^\alpha + b$$

بنابراین

$$\varepsilon c_n \leq a\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon)c_n^\alpha + b.$$

اگر زیر دنباله ی واگرا به بینهایت $\{c_{n_1}\}$ وجود داشته باشد، قرار می دهیم $\varepsilon = \varepsilon_1 = \frac{1+b}{c_{n_1}}$ در اینصورت به تناقض زیر می رسیم:

$$1 \leq a(1 + b)^\alpha\psi(\varepsilon_1) \to o.$$

حال نشان می دهیم برای هر $n, m \in \mathbb{N}$ و $C = \sup_{n\in\mathbb{N}} \Lambda(1 + 2c_n)^\beta < \infty$ نامساوی

$$d(x_{n+m}, x_n) \leq Cw_n(\alpha),$$

برقرار است. فرض کنیم m ثابت است. با توجه به (۱-۱) دنباله $p_n = n^\alpha d(x_{n+m}x_n)$ نتیجه می دهد:

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= (n + 1)^\alpha d(f(x_{n+m}), f(x_n)) \\ &\leq (n + 1)^\alpha(1 - \varepsilon)d(x_{n+m}, x_n) + C(n + 1)^\alpha\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon). \end{aligned}$$

برای هر n قرار می دهیم

$$\varepsilon = 1 - (\frac{n}{n + 1})^\alpha \leq \frac{\alpha}{n + 1}$$

بنابراین
$$p_{n+1} \leq p_n + C\alpha^\alpha \psi(\frac{\alpha}{n+1}).$$
چون $p_o = o$ بنابراین
$$p_n \leq C\alpha^\alpha \sum_{k=1}^{n} \psi(\frac{\alpha}{k})$$
و با تقسیم بر n^α نتیجه دلخواه حاصل می شود. بنابراین $\{x_n\}$ یک دنباله ی کوشی است، پس دارای حد $x_* \in X$ است. بنابراین

$$d(x_*, f^n(x_o)) = d(x_*, f(x_{n-1})) = d(x_*, x_n) = \lim_{m\to\infty} d(x_{n+m}, x_n) \leq Cw_n(\alpha).$$

با توجه به پیوستگی f اگر $n \to \infty$ آنگاه $x_* = f(x_*)$ و

$$d(x_*, f^n(x_o)) \leq Cw_n(\alpha).$$

C همان کران مورد نظر است چون

$$d(x_*, x_n) = d(f(x_*), f(x_{n-1})) \leq d(x_*, x_{n-1}) \leq ... \leq d(x_*, x_o) = \|x_*\|$$

بنابراین
$$c_n \leq \|x_*\| + d(x_*, x_n) \leq 2\|x_*\|$$

پس
$$C = \sup \Lambda(1 + 2c_n)^\beta \leq \Lambda(1 + 4\|x_*\|)^\beta.$$

□

قضیه ۱-۱.۶. فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک کامل بوده و $f : X \to X$ یک نگاشت باشد و $\eta : \mathbb{R}^+ \to [o, \infty)$ تابعی پیوسته و به ازاء هر $r > o$ نامساوی $\eta(r) < r$ برقرار باشد. اگر برای هر $x, y \in X$؛
$$d(f(x), f(y)) \leq \eta(d(x, y))$$
آنگاه f دارای نقطه ثابت منحصربفرد است.

اثبات. رجوع شود به [۲۱]. □

فصل ۲

نقطه ثابت مشترک برای نگاشت انقباضی پاتا و کاربردی از آن در حل معادلات دیفرانسیل

۲-۱ قضایا

در این فصل به بررسی نقطه ثابت مشترک برای نگاشت های انقباضی از نوع پاتا [۲۱] می پردازیم و در ادامه کاربردی از این قضایا را در حل معادلات دیفرانسیل بیان می کنیم.

قضیه ۲-۱.۱. فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک کامل باشد. عضو دلخواه $x_o \in X$ را در نظر می گیریم و برای هر $x \in X$ قرار می دهیم

$$\|x\| = d(x, x_o)$$

فرض کنیم $f, g : X \to X$، و $\Lambda \geq o$ و $\alpha \geq ۱$ و $\beta \in [o, \alpha]$ مقادیر ثابتی هستند و همچنین فرض کنیم $\psi : [o, ۱] \to [o, \infty)$ تابعی صعودی، در صفر پیوسته و با شرط $\psi(o) = o$ باشد. در اینصورت اگر نامساوی

$$d(fx, gy) \leq (۱ - \varepsilon)m(x, y) + \Lambda\varepsilon^{\alpha}\psi(\varepsilon)[۱ + \|x\| + \|y\|]^{\beta} \qquad (۲\text{-}۱)$$

به ازاء هر $\varepsilon \in [o, ۱]$ و $x, y \in X$ برقرار باشد که در آن

$$m(x, y) = \max\{d(x, y), d(x, fx), d(y, gy), \frac{d(x, gy) + d(y, fx)}{۲}\}$$

آنگاه f و g دارای نقطه ثابت مشترک منحصربفرد می باشند.

اثبات. دنباله های زیر را تعریف می کنیم:

$$fx_{2n} = x_{2n+1} \quad , \quad gx_{2n+1} = x_{2n+2} \quad , \quad c_n = \|x_n\|$$

و داریم

$$\begin{aligned}
m(x_{2n}, x_{2n+1}) &= \max\{d(x_{2n}, x_{2n+1}), d(x_{2n}, fx_{2n}), d(x_{2n+1}, gx_{2n+1}), \\
&\qquad \frac{d(x_{2n}, gx_{2n+1}) + d(x_{2n+1}, fx_{2n})}{2}\} \\
&= \max\{d(x_{2n}, x_{2n+1}), d(x_{2n}, x_{2n+1}), d(x_{2n+1}, x_{2n+2}), \\
&\qquad \frac{d(x_{2n}, x_{2n+2}) + d(x_{2n+1}, x_{2n+1})}{2}\} \\
&= \max\{d(x_{2n}, x_{2n+1}), d(x_{2n+1}, x_{2n+2}), \frac{d(x_{2n+1}, x_{2n+2})}{2}\} \\
&\leq \max\{d(x_{2n}, x_{2n+1}), d(x_{2n+1}, x_{2n+2}), \\
&\qquad \frac{d(x_{2n}, x_{2n+1}) + d(x_{2n+1}, x_{2n+2})}{2}\} \\
&= \max\{d(x_{2n}, x_{2n+1}), d(x_{2n+1}, x_{2n+2})\}
\end{aligned}$$

ابتدا نشان می دهیم هر دو عضو متوالی دنباله (x_n) مجزا هستند یعنی برای هر n اگر $x_n \neq x_{n+1}$ آنگاه $d(x_n, x_{n+1}) > o$. فرض کنیم برای $n_o \in \mathbb{N}$ ؛ $x_{2n_o+1} = x_{2n_o+2}$ و می دانیم $gx_{2n_o+1} = x_{2n_o+2}$ بنابراین x_{2n_o+1} نقطه ثابت g است. همچنین

$$\begin{aligned}
&d(fx_{2n_o+1}, x_{2n_o+1}) = d(fx_{2n_o+1}, gx_{2n_o+1}) \\
&\leq (1-\varepsilon)m(x_{2n_o+1}, x_{2n_o+1}) + \Lambda\varepsilon^{\alpha}\psi(\varepsilon)[1 + \|x_{2n_o+1}\| + \|x_{2n_o+1}\|]^{\beta} \\
&= (1-\varepsilon)d(x_{2n_o+1}, fx_{2n_o+1}) + \Lambda\varepsilon^{\alpha}\psi(\varepsilon)[1 + \|x_{2n_o+1}\| + \|x_{2n_o+1}\|]^{\beta}
\end{aligned}$$

بنابراین برای هر $\varepsilon \in (o, 1]$

$$d(fx_{2n_o+1}, x_{2n_o+1}) \leq \Lambda\varepsilon^{\alpha-1}\psi(\varepsilon)[1 + 2\|x_{2n_o+1}\|]^{\beta}$$

اگر ε به صفر میل کند آنگاه $fx_{2n_o+1} = x_{2n_o+1}$ لذا x_{2n_o+1} نقطه ثابت f و g است، بنابراین برای هر

$n \in \mathbb{N}$؛ $x_{۲n+۱} \neq x_{۲n+۲}$.

فرض کنیم n ثابت باشد، اگر

$$\max\{d(x_{۲n}, x_{۲n+۱}), d(x_{۲n+۱}, x_{۲n+۲})\} = d(x_{۲n+۱}, x_{۲n+۲})$$

آنگاه

$$d(x_{۲n+۱}, x_{۲n+۲}) \leq (۱-\varepsilon) d(x_{۲n+۱}, f x_{۲n+۲}) + \Lambda \varepsilon^{\alpha} \psi(\varepsilon)[۱ + \|x_{۲n+۱}\| + \|x_{۲n+۲}\|]^{\beta}$$

لذا

$$d(x_{۲n+۱}, x_{۲n+۲}) \leq \Lambda \varepsilon^{\alpha-۱} \psi(\varepsilon)[۱ + \|x_{۲n+۱}\| + \|x_{۲n+۲}\|]^{\beta}$$

حال اگر ε به صفر میل کند آنگاه $d(x_{۲n+۱}, x_{۲n+۲}) = o$ که یک تناقض است. در نتیجه

$$\max\{d(x_{۲n}, x_{۲n+۱}), d(x_{۲n+۱}, x_{۲n+۲})\} = d(x_{۲n}, x_{۲n+۱})$$

بنابراین

$$d(x_{۲n+۱}, x_{۲n+۲}) \leq d(x_{۲n}, x_{۲n+۱})$$

و به طور مشابه می توان نشان داد

$$d(x_{۲n+۲}, x_{۲n+۳}) \leq d(x_{۲n+۱}, x_{۲n+۲})$$

بنابراین $\{d(x_n, x_{n-۱})\}$ دنباله ای نزولی است.

حال نشان می دهیم دنباله c_n کراندار است. با توجه به نزولی بودن دنباله $\{d(x_n, x_{n-۱})\}$ و تعریف دنباله c_n داریم

$$d(x_{۲n+۱}, x_{۲n+۲}) \leq d(x_{۲n}, x_{۲n+۱}) \leq ... \leq d(x_o, x_۱) = c_۱$$

بنابراین

$$\begin{aligned} c_{2n+1} &= d(x_{2n+1}, x_o) \leq d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) + d(x_{2n+2}, x_1) + d(x_1, x_o) \\ &\leq d(x_{2n+2}, x_1) + 2c_1 = d(gx_{2n+1}, fx_o) + 2c_1 \end{aligned}$$

لذا

$$c_{2n+1} \leq (1-\varepsilon)m(x_{2n+1}, x_o) + \Lambda\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon)[1 + \|x_{2n+1}\| + \|x_o\|]^\beta + 2c_1$$

و

$$\begin{aligned} m(x_{2n+1}, x_o) &= \max\{d(x_{2n+1}, x_o), d(x_{2n+1}, x_{2n+2}), d(x_o, x_1), \\ &\qquad \frac{d(x_{2n+1}, x_1) + d(x_o, x_{2n+2})}{2}\} \\ &\leq \max\{d(x_{2n+1}, x_o), d(x_{2n+1}, x_{2n+2}), d(x_o, x_1), \\ &\qquad \frac{d(x_{2n+1}, x_o) + d(x_o, x_1) + d(x_o, x_{2n+1}) + d(x_{2n+1}, x_{2n+2})}{2}\} \\ &\leq \max\{c_{2n+1}, c_1, c_1, c_{2n+1} + c_1\} \\ &= c_{2n+1} + c_1 \end{aligned}$$

بنابراین برای $a, b > o$ داریم

$$\begin{aligned} c_{2n+1} &\leq (1-\varepsilon)(c_{2n+1} + c_1) + \Lambda\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon)[1 + \|x_{2n+1}\| + \|x_o\|]^\beta + 2c_1 \\ &\leq (1-\varepsilon)(c_{2n+1} + c_1) + \Lambda\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon)[1 + c_{2n+1}]^\beta + 2c_1 \\ &\leq (1-\varepsilon)c_{2n+1} + a\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon)c_{2n+1}^\alpha + b \end{aligned}$$

لذا داریم

$$\varepsilon c_{2n+1} \leq a\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon)c_{2n+1}^\alpha + b$$

اگر زیر دنباله ی واگرا به بینهایت $\{c_{2n_k+1}\}$ وجود داشته باشد و قرار دهیم $\varepsilon = \varepsilon_1 = \frac{1+b}{c_{2n_k+1}}$ به تناقض زیر می رسیم

$$1 \leq a(1+b)^\alpha\psi(\varepsilon_1) \to o.$$

همچنین مشابه بالا داریم

$$\begin{aligned} c_{2n+2} = d(x_{2n+2}, x_o) &\leq d(x_{2n+2}, x_{2n+3}) + d(x_{2n+3}, x_2) + d(x_2, x_1) + d(x_1, x_o) \\ &\leq c_1 + d(fx_{2n+2}, gx_1) + c_1 + c_1 \end{aligned}$$

و

$$c_{2n+2} \leq (1-\varepsilon) m(x_{2n+2}, x_1) + \Lambda \varepsilon^{\alpha} \psi(\varepsilon)[1 + \|x_{2n+2}\| + \|x_1\|]^{\beta} + 3c_1$$

و

$$\begin{aligned} m(x_{2n+2}, x_1) &= \max\{d(x_{2n+2}, x_2), d(x_{2n+2}, x_{2n+3}), d(x_1, x_2), \\ &\qquad \frac{d(x_{2n+2}, x_2) + d(x_1, x_{2n+3})}{2}\} \\ &\leq \max\{d(x_{2n+2}, x_1), d(x_{2n+2}, x_{2n+3}), d(x_1, x_2), \\ &\qquad \frac{d(x_{2n+2}, x_1) + d(x_1, x_2) + d(x_1, x_{2n+2}) + d(x_{2n+2}, x_{2n+3})}{2}\} \\ &\leq \max\{c_{2n+2}, c_1, c_1, c_1, c_{2n+2} + 2c_1\} \\ &= c_{2n+2} + 2c_1 \end{aligned}$$

بنابراین با توجه به اینکه $\beta \leq \alpha$ و برای $a', b' > o$ داریم

$$\begin{aligned} c_{2n+2} &\leq (1-\varepsilon)(c_{2n+2} + 2c_1) + \Lambda \varepsilon^{\alpha} \psi(\varepsilon)[1 + \|x_{2n+2}\| + \|x_1\|]^{\beta} + 3c_1 \\ &\leq (1-\varepsilon)(c_{2n+2} + 2c_1) + \Lambda \varepsilon^{\alpha} \psi(\varepsilon)[1 + c_{2n+2} + c_1]^{\beta} + 3c_1 \\ &\leq (1-\varepsilon) c_{2n+2} + a' \varepsilon^{\alpha} \psi(\varepsilon) c_{2n+2}^{\alpha} + b' \end{aligned}$$

لذا

$$\varepsilon c_{2n+2} \leqslant a' \varepsilon^{\alpha} \psi(\varepsilon) c_{2n+2}^{\alpha} + b'$$

اگر زیر دنباله ی واگرا به بینهایت $\{c_{2n_k+2}\}$ وجود داشته باشد و قرار دهیم $\varepsilon = \varepsilon_2 = \frac{1+b'}{c_{2n_k+2}}$ به تناقض زیر می رسیم

$$1 \leq a'(1+b')^{\alpha} \psi(\varepsilon_2) \to o.$$

حال تعریف می کنیم

$$C = \sup_{n\in\mathbb{N}} \Lambda(1 + 2c_n)^{\beta} < \infty$$

و نشان می دهیم دنباله $\{x_n\}$ کوشی است.
می دانیم دنباله $\{d(x_n, x_{n-1})\}$ نزولی است، بنابراین اگر n به بینهایت میل کند آنگاه $r \geq o$ وجود دارد که

$$d(x_{2n}, x_{2n+1}) \to r$$

اگر $r > o$ آنگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $\varepsilon \in (o, 1]$ داریم

$$\begin{aligned} d(x_{2n}, x_{2n+1}) &= d(gx_{2n-1}, fx_{2n}) \\ &\leq (1 - \varepsilon)m(x_{2n-1}, x_{2n}) + C\varepsilon^{\alpha}\psi(\varepsilon) \\ &\leq (1 - \varepsilon)d(x_{2n-1}, x_{2n}) + C\varepsilon^{\alpha}\psi(\varepsilon) \end{aligned}$$

اگر n به بینهایت میل کند آنگاه برای هر $\varepsilon \in (o, 1]$

$$r \leq C\varepsilon^{\alpha-1}\psi(\varepsilon)$$

اگر ε را به صفر میل دهیم آنگاه $r = o$ و این تناقض است.از این رو $r = o$ و در نتیجه

$$\lim_{n\to\infty} d(x_{2n}, x_{2n+1}) = o \tag{۲-۲}$$

برای اینکه نشان دهیم دنباله $\{x_n\}$ کوشی است کافی است نشان دهیم زیر دنباله $\{x_{2n}\}$ از $\{x_n\}$ با توجه به (۲-۲) کوشی است. فرض کنیم $\{x_{2n}\}$ کوشی نباشد، در اینصورت $\delta > o$ و دنباله های صعودی $\{2n_k\}$ و $\{2m_k\}$ از اعداد طبیعی وجود دارند بطوریکه $n(k) > m(k)$ و

$$d(x_{2m_k}, x_{2n_k}) \geq \delta \quad , \quad d(x_{2m_k}, x_{2n_k-2}) < \delta \tag{۲-۳}$$

با توجه به (۲-۳) داریم

$$\begin{aligned} \delta \leq d(x_{2m_k}, x_{2n_k}) &\leq d(x_{2m_k}, x_{2n_k-2}) + d(x_{2n_k-2}, x_{2n_k-1}) + d(x_{2n_k-1}, x_{2n_k}) \\ &\leq \delta + d(x_{2n_k-2}, x_{2n_k-1}) + d(x_{2n_k-1}, x_{2n_k}) \end{aligned}$$

اگر k را به بینهایت میل دهیم و با توجه به (۲-۲) داریم

$$\lim d(x_{2m_k}, x_{2n_k}) = \delta \tag{۴-۲}$$

با توجه به

$$\begin{cases} d(x_{2m_k}, x_{2n_k+1}) \leq d(x_{2m_k}, x_{2n_k}) + d(x_{2n_k}, x_{2n_k+1}) \\ \\ d(x_{2m_k}, x_{2n_k}) \leq d(x_{2m_k}, x_{2n_k+1}) + d(x_{2n_k+1}, x_{2n_k}) \end{cases}$$

داریم

$$|d(x_{2m_k}, x_{2n_k+1}) - d(x_{2m_k}, x_{2n_k})| \leq d(x_{2n_k}, x_{2n_k+1})| \tag{۵-۲}$$

حال اگر k را به بینهایت میل دهیم و با استفاده از (۲-۲) و (۲-۳) و (۲-۴) در (۲-۵) داریم

$$\lim d(x_{2n_k+1}, x_{2m_k}) = \delta \tag{۶-۲}$$

و با توجه به

$$\begin{cases} d(x_{2m_k-1}, x_{2n_k}) \leq d(x_{2m_k-1}, x_{2m_k}) + d(x_{2m_k}, x_{2n_k}) \\ \\ d(x_{2m_k}, x_{2n_k}) \leq d(x_{2m_k}, x_{2m_k-1}) + d(x_{2m_k-1}, x_{2n_k}) \end{cases}$$

داریم

$$|d(x_{2m_k-1}, x_{2n_k}) - d(x_{2m_k}, x_{2n_k})| \leq d(x_{2m_k}, x_{2m_k-1})| \tag{۷-۲}$$

و اگر k را به بینهایت میل دهیم و با استفاده از (۲-۲) و (۲-۴) در (۲-۷) داریم

$$\lim d(x_{2n_k+1}, x_{2m_k}) = \delta \tag{۸-۲}$$