دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

# شبه-میانگین‌پذیری جبرهای باناخ

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض

**مهدی نعمتی**

استاد راهنما

**دکتر رسول نصر اصفهانی**

۱۳۸۶

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض آقای مهدی نعمتی

تحت عنوان

# شبه-میانگین‌پذیری جبرهای باناخ

در تاریخ ۱۳۸۶/۱۲/۱۹ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهائی قرار گرفت.

| | |
|---|---|
| ۱– استاد راهنمای پایان‌نامه | دکتر رسول نصر اصفهانی |
| ۲– استاد مشاور پایان‌نامه | دکتر فرید بهرامی |
| ۳– استاد داور ۱ | دکتر سعید مقصودی (دانشگاه زنجان ) |
| ۴– استاد داور ۲ | دکتر محمود منجگانی |

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده دکتر رسول نصر اصفهانی

# فهرست مطالب

## چکیده:

در این پایان‌نامه مفهوم شبه‌-میانگین‌پذیری و شبه‌-انقباض پذیری جبرهای باناخ را معرفی می‌کنیم و به مقایسه‌ی آن‌ها با میانگین‌پذیری و میانگین‌پذیری تقریبی می‌پردازیم. در ادامه، ضمن یافتن شرایط معادل شبه‌-میانگین‌پذیری جبرهای گروهی ثابت می‌کنیم که میانگین‌پذیری و شبه‌-میانگین‌پذیری آن‌ها با هم معادلند. در نهایت با معرفی جبرهای باناخ دنباله‌ای به‌خصوص $l^p(\mathbb{N})$، برای هر $1 \leqslant p < \infty$، نشان می‌دهیم که $l^p(\mathbb{N})$ شبه‌-میانگین‌پذیر است ولی میانگین‌پذیر تقریبی نیست.

# پیش‌گفتار

فرض کنیم $A$ یک جبر باناخ و $X$ یک $A-$مدول باناخ باشد. در این صورت نگاشت خطی و کران‌دار $D: A \to X$ یک مشتق نامیده می‌شود هرگاه برای هر $a, b \in A$ داشته باشیم $D(ab) = D(a).b + a.D(b)$. مشتق $D$ داخلی نامیده می‌شود هرگاه عنصر $\xi_\circ \in X$ موجود باشد به طوری که برای هر $a \in A$ داشته باشیم $D(a) = a.\xi_\circ - \xi_\circ.a$. جبر باناخ $A$ میانگین‌پذیر نامیده می‌شود هرگاه برای هر $A-$مدول $X$، هر مشتق $D: A \to X^*$، داخلی باشد. همچنین جبر باناخ $A$ انقباض پذیر نامیده می شود هرگاه برای هر $A-$مدول $X$، هر مشتق پیوسته $D: A \to X$ داخلی باشد. جانسون در [۱۷] نشان داد که جبر باناخ $A$ میانگین پذیر است اگر و تنها اگر یک قطر تقریبی کراندار داشته باشد؛ یعنی تور $(u_\alpha) \subset A\widehat{\otimes}A$ موجود باشد به طوری که برای هر $a \in A$ داشته باشیم $au_\alpha - u_\alpha a \to \circ$ و $\pi(u_\alpha)a \to a$. به‌طور مشابه جبر باناخ $A$

انقباض پذیر است اگر و تنها اگر یک قطر داشته باشد؛ یعنی یک عنصر $u \in A\hat{\otimes}A$، به طوری که برای هر $a \in A$ داشته باشیم $au = ua$ و $\pi(u)a = a$. که در این‌جا $\pi$ نگاشتی خطی از $A\hat{\otimes}A$ به $A$ است که برای هر $a, b \in A$ با ضابطه‌ی $\pi(a \otimes b) = ab$ تعریف می‌شود. در سال ۲۰۰۷ قهرمانی، لوی و ژانگ در مقاله‌ی [۱۲]، مفهوم دیگری از میانگین‌پذیری به نام شبه ـ میانگین‌پذیری را معرفی و مطالعه نمودند؛ درواقع، جبر باناخ $A$ را شبه ـ میانگین پذیر نامیدند هرگاه یک قطر تقریبی داشته باشد. همچنین جبر باناخ $A$ را شبه ـ انقباض پذیر نامیدند هرگاه یک قطر تقریبی مرکزی داشته باشد.

مفهوم میانگین‌پذیری مکان مهمی را در جبر های باناخ، جبرهای عملگر و آنالیز هارمونیک به خود اختصاص داده است که اولین بار در سال ۱۹۷۲ توسط جانسون در [۱۷]، معرفی شد. در واقع هدف جانسون یافتن خاصیت مناسبی روی جبر گروهی $L^1(\mathcal{G})$ از یک گروه موضعاً فشرده‌ی $\mathcal{G}$ بود که با میانگین‌پذیری $\mathcal{G}$ معادل باشد. وی پس از یافتن این خاصیت، آن را میانگین‌پذیری $L^1(\mathcal{G})$ نام نهاد و این مفهوم را به کلیه‌ی جبرهای باناخ تعمیم داد. سپس ضمن اثبات قضایای بسیاری در این زمینه، معادل‌های متعددی برای میانگین‌پذیری جبرهای باناخ ارایه کرد. بنابراین نه تنها یک خاصیت، بلکه خواص معادل بسیاری از $L^1(\mathcal{G})$ یافت که با میانگین‌پذیری $\mathcal{G}$ معادلند. به هر حال، اهمیت و جذابیت این موضوع سبب شد که ریاضی‌دانان بسیاری به سمت آن گرایش یابند. از جمله بید، کرتیز و دیلز [۱] که مفهوم میانگین‌پذیری ضعیف را در سال ۱۹۸۷ برای جبرهای باناخ جابه‌جایی معرفی کردند. همچنین در سال ۲۰۰۴ قهرمانی و لوی، مفهوم میانگین‌پذیری تقریبی را معرفی و مطالعه نمودند.

بالاخره قهرمانی، لوی و ژانگ در سال ۲۰۰۷ در مقاله‌ی [۱۲] با حذف شرط کران‌داری قطرهای تقریبی از شرط معادل میانگین‌پذیری که توسط جانسون در [۱۷] ارایه شده بود و تعریف شبه ـ میانگین‌پذیری، ما را به عرصه‌ی دیگری از جبرهای باناخ می‌برند که ارتباط نزدیکی با میانگین‌پذیری دارد.

هدف این پایان‌نامه که شامل ۴ فصل است، بررسی مفهوم شبه ـ میانگین‌پذیری جبرهای باناخ و ارتباط آن با میانگین‌پذیری و میانگین‌پذیری تقریبی است. فصل اول، به مقدمه اختصاص یافته است که در آن، تنها به بیان مختصری از تعاریف و قضایایی در آنالیزتابعی، آنالیز حقیقی و نظریه‌ی جبرهای باناخ می‌پردازیم که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند.

در فصل دوم، شبه ـ میانگین‌پذیری جبرهای باناخ را معرفی کرده‌ایم و ضمن مقایسه‌ی آن با میانگین‌پذیری به بیان و اثبات قضایایی در این زمینه پرداخته‌ایم.

در فصل سوم، ضمن معرفی $\mathcal{G}$-مدول‌های باناخ برای هر گروه موضعاً فشرده‌ی $\mathcal{G}$، شرایطی را برای بررسی شبه-میانگین‌پذیری جبرگروهی $L^1(\mathcal{G})$ و جبر اندازه‌ی $M(\mathcal{G})$ و برخی دیگر از جبرهای باناخ گروهی فراهم می‌کنیم. ضمن این بررسی مشاهده خواهیم کرد که شبه-میانگین‌پذیری و میانگین‌پذیری آن‌ها با هم معادلند. سپس با معرفی یک ضرب مناسب روی $LUC(\mathcal{G})^*$ از نوع ضرب آرنز، خواهیم دید که شبه-میانگین‌پذیری و میانگین‌پذیری آن معادل با متناهی بودن $\mathcal{G}$ است.

در فصل چهارم، با معرفی جبرهای باناخ دنباله‌ای نشان می‌دهیم برای $1 \leqslant p < \infty$، جبر باناخ $l^p(\mathbb{N})$ میانگین‌پذیر تقریبی نیست ولی شبه-میانگین‌پذیر است که تفاوت این دو مفهوم را نشان می‌دهد.

# فصل ۱

# مقدمه

**در این فصل، به طور مختصر تعاریف و قضایایی از آنالیز تابعی، آنالیز حقیقی و نظریه‌ی جبرهای باناخ را که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند بیان می‌کنیم.**

فرض کنیم $X$ و $Y$ دو فضای نرم‌دار باشند. $\mathfrak{B}(X,Y)$ فضای نرم‌دار همه‌ی عملگرهای خطی و کران‌دار $T$ از $X$ به $Y$ با نرم $\|T\| = \sup\{\|Tx\| \ : \ x \in B_X\}$ است، که در آن $B_X$ گوی یکه‌ی بسته در $X$ را نشان می‌دهد. در حالت $X = Y$، $\mathfrak{B}(X,Y)$ را با $\mathfrak{B}(X)$ نمایش می‌دهیم. همچنین در حالت $Y = \mathbb{C}$، $\mathfrak{B}(X,Y)$ را با $X^*$ و مقدار $f \in X^*$ را در $x \in X$ با $f(x)$ یا $\langle f, x\rangle$ نشان می‌دهیم.

**۱.۱ قضیه (کران‌داری یکنواخت).** فرض کنیم $X$ یک فضای باناخ، $Y$ یک فضای نرم‌دار باشد و $\Lambda \subseteq \mathfrak{B}(X,Y)$. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند.

(الف) برای هر $x \in X$، مجموعه‌ی $\{T(x) : \ T \in \Lambda\}$ در $Y$ کران‌دار است. به عبارت دیگر

$$\sup\{\|Tx\| \ : \ T \in \Lambda\} < \infty$$

(ب) $\Lambda$ در $\mathfrak{B}(X,Y)$ کران‌دار است. به عبارت دیگر، $\sup\{\|T\| \ : \ T \in \Lambda\} < \infty$.

اثبات. به بخش ۲—٦ از [۱۸] رجوع کنید. □

**۲.۱ قضیه (هان— باناخ) .** فرض کنیم $X$ یک فضای خطی نرم‌دار، $Y$ یک زیرفضای خطی $X$ و $m$ یک تابعک خطی و پیوسته روی $Y$ باشد. در این صورت تابعک خطی و پیوسته‌ی $m'$ روی $X$ وجود دارد به طوری که $\|m'\| = \|m\|$ و $m'|_Y = m$.

اثبات. به قضیه‌ی ۵—۱٦ از [۱۹] رجوع کنید. □

فرض کنیم $D$ یک مجموعه باشد و رابطه‌ای مانند $\geq$ روی $D$ وجود داشته باشد که $(D, \geq)$،

(الف) متعدی باشد؛ یعنی اگر $\alpha \geq \beta$ و $\beta \geq \gamma$، آن‌گاه $\alpha \geq \gamma$.

(ب) ارشمیدسی باشد؛ یعنی برای هر $\alpha, \beta \in D$، عنصر $\gamma \in D$ موجود باشد که $\gamma \geq \alpha$ و $\gamma \geq \beta$.

در این صورت $D$ را جهت‌دار می‌نامیم.

منظور از یک تور در مجموعه‌ی $X$ تابعی است مانند $f : D \longrightarrow X$ که در آن $D$ یک مجموعه‌ی جهت‌دار است. با فرض $x_\alpha = f(\alpha)$ برای هر $\alpha \in D$، تور $f$ را با $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ یا به اختصار با $(x_\alpha)$ نمایش می‌دهیم.

فرض کنیم $E$ و $D$ مجموعه‌های جهت‌دار باشند. در این صورت تور $(y_\beta)_{\beta \in E}$ را یک زیرتور $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ نامیم اگر تابعی مانند $g : E \longrightarrow D$ موجود باشد به طوری که

(الف) $y_\beta = x_{g(\beta)}$ برای هر $\beta \in E$.

(ب) برای هر $\alpha \in D$، $\beta \in E$ موجود باشد که $g(\gamma) \geq \alpha$ برای هر $\gamma \in E$ با شرط $\gamma \geq \beta$.

فرض کنیم $X$ یک فضای توپولوژیک باشد. گوییم تور $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ در $X$ به $x$ همگراست اگر برای هر همسایگی $U$ از $x$ در $X$ عنصر $\alpha_\circ \in D$ موجود باشد به‌طوری که $x_\alpha \in U$ برای هر $\alpha \geq \alpha_\circ$ و می‌نویسیم $x_\alpha \to x_\circ$ یا $\lim_\alpha \, x_\alpha = x_\circ$.

در صفحه‌ی ۱۴ [۱۵] مشاهده می‌کنیم که برای هر $A \subseteq X$، اگر $\overline{A}$ بستار $A$ در $X$ را نشان دهد، آن‌گاه

(الف) $x \in \overline{A}$ اگر و تنها اگر یک تور $(x_\alpha)$ در $A$ موجود باشد که $x_\alpha \longrightarrow x$.

(ب) $A$ فشرده است اگر و تنها اگر هر تور در $A$، دارای یک زیرتور همگرا باشد.

به‌علاوه اگر $Y$ نیز یک فضای توپولوژیک و $f : X \longrightarrow Y$ یک تابع باشد، آن‌گاه $f$ پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر تور $(x_\alpha)$ همگرا به $x$ در $X$ داشته باشیم $f(x_\alpha) \xrightarrow{Y} f(x)$.

اکنون در مثال زیر مجموعه‌ی جهت‌داری را معرفی می‌کنیم که در فصل دوم از آن استفاده می‌کنیم.

**۳.۱ مثال .** فرض کنیم $X$ یک مجموعه‌ی دلخواه باشد. در این صورت مجموعه $D$ را به صورت $D=\{\alpha=(\varepsilon,F):\ \varepsilon>0,\ F\subseteq X,\ \ \mathrm{card}(F)<\infty\}$ تعریف می کنیم. اکنون رابطه‌ی " $\geq$ " را به صورت زیر روی $D$ تعریف می کنیم

$$\alpha_1=(\varepsilon_1,F_1)\geq\alpha_2=(\varepsilon_2,F_2)\Longleftrightarrow\varepsilon_1\leq\varepsilon_2,\ F_2\subseteq F_1.$$

واضح است که $D$ با رابطه‌ی $\geq$، جزیی مرتب است. همچنین اگر $\alpha_1=(\varepsilon_1,F_1)$ و $\alpha_2=(\varepsilon_2,F_2)$ دو عضو از $D$ باشند، آن‌گاه با فرض $\varepsilon=\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$، $F=F_1\bigcup F_2$ و $\alpha=(\varepsilon,F)$، داریم $\alpha\geq\alpha_1$ و $\alpha\geq\alpha_2$. درنتیجه $D$ یک مجموعه‌ی جهت‌دار است .

**۴.۱ تعریف.** فرض کنیم $X$ یک فضای خطی نرم‌دار باشد.

(۱) منظور از توپولوژی ضعیف روی $X$، کوچکترین توپولوژی روی $X$ است که تحت آن هر $f\in X^*$ پیوسته است. این توپولوژی را با $\sigma(X,X^*)$ نمایش می‌دهیم. همگرایی تور $(x_\alpha)$ به $x$ در $X$ در توپولوژی ضعیف را همگرایی ضعیف $(x_\alpha)$ به $x$ می‌نامیم و با $x_\alpha\xrightarrow{w}x$ یا $x=w-\lim\limits_{\alpha}x_\alpha$ نمایش می‌دهیم. توجه کنیم که $x_\alpha\xrightarrow{w}x$ اگر و تنها اگر $f(x_\alpha)\longrightarrow f(x)$ برای هر $f\in X^*$.

(۲) فرض کنیم $X$ یک فضای باناخ باشد. نگاشت $\Phi:X\longrightarrow X^{**}$ را با ضابطه‌ی $x\mapsto\hat{x}$ تعریف می‌کنیم که در آن،

$$\hat{x}(f)=f(x)\quad(f\in X^*).$$

توجه کنیم که $\Phi$ خطی و طولپاست. لذا یک به یک نیز هست. در حالتی که $\Phi$ پوشا باشد، $X$ را انعکاسی می‌نامیم. در ضمن $\hat{x}$ را به طور ساده با $x$ نمایش می‌دهیم. منظور از توپولوژی ضعیف* روی $X^*$، کوچکترین توپولوژی روی $X^*$ است که خانواده‌ی $\Phi(X)$ را پیوسته می‌سازد. این توپولوژی را با $\sigma(X^*,X)$ نمایش می‌دهیم. همگرایی تور $(f_\alpha)$ به $f$ در این توپولوژی را همگرایی ضعیف* $(f_\alpha)$ به $f$ می‌نامیم و با نمادهای $f_\alpha\xrightarrow{w^*}f$ یا $f=w^*-\lim\limits_{\alpha}f_\alpha$ نمایش می‌دهیم که معادل است با این‌که $f_\alpha(x)\longrightarrow f(x)$ برای هر $x\in X$. در ضمن یادآوری می‌کنیم که یک پایه‌ی همسایگی‌های نقطه‌ی

$f_\circ \in X^*$ برای توپولوژی $\sigma(X^*, X)$ با در نظر گرفتن تمام مجموعه‌های به شکل

$$V = \{f \in X^* \ : \ |\langle f - f_\circ, x_i\rangle| < \epsilon \text{ ،} i \in I \text{ برای هر } \}$$

به‌دست می‌آید که در آن $I$ متناهی است و $x_i \in X$ و $\varepsilon > \circ$.

**۵.۱ تعریف.** فرض کنیم $X$ یک فضای خطی و $A \subseteq X$ ناتهی باشد. منظور از پوش محدب $A$، که با $\mathrm{co}(A)$ نمایش داده می‌شود، اشتراک همه‌ی زیرمجموعه‌های محدب $X$ است که شامل $A$ هستند. در واقع،

$$\mathrm{co}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i x_i \ : n \geqslant 1,\ \sum_{i=1}^{n} t_i = 1,\ \forall\, i\ t_i \geqslant \circ,\ x_i \in A \right\}.$$

**۶.۱ قضیه (مازور).** اگر $X$ یک فضای نرم‌دار و $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ یک تور در $X$ باشد به طوری که $x_\alpha \xrightarrow{w} x$، آن‌گاه $x \in \overline{\mathrm{co}(\{x_\alpha \ : \ \alpha \in D\})}$.

اثبات. به بخش ۳—۳ از [۴] رجوع کنید. □

**۷.۱ لم (گلدشتاین).** فرض کنیم $X$ یک فضای برداری نرم‌دار باشد. در این صورت $B_X$ در $B_X^{**}$، ضعیف* چگال است.

اثبات. به لم ۴ از فصل ۳ در [۴] رجوع کنید. □

**۸.۱ قضیه (باناخ — آلااُغلو).** فرض کنیم $X$ یک فضای نرم‌دار باشد. در این‌صورت گوی یکه‌ی $B_{X^*}$ از $X^*$ فشرده‌ی ضعیف* است.

اثبات. به قضیه‌ی ۱۵ از فصل ۳ در [۴] رجوع کنید. □

**۹.۱ تعریف.** فرض کنیم $X$ و $Y$ فضاهای نرم‌دار باشند. منظور از توپولوژی عملگری قوی روی $\mathfrak{B}(X,Y)$، توپولوژی حاصل از پایه‌ی همسایگی صفر متشکل از مجموعه‌ی $\{T \in \mathfrak{B}(X,Y) : \|Tx\| < \epsilon, x \in A\}$ است که در آن $A \subseteq X$ متناهی و $\epsilon > 0$ است. این توپولوژی را با $so$ نمایش می‌دهیم. در واقع تور $(T_\alpha) \subseteq \mathfrak{B}(X,Y)$ در توپولوژی عملگری قوی همگرا به صفر است اگر و تنها اگر برای هر $x \in X$، تور $(T_\alpha x)$ در $Y$ به صفر همگرا باشد. بدیهی است که اگر $Y = \mathbb{C}$، آن‌گاه توپولوژی عملگری قوی روی $X^* = \mathfrak{B}(X,\mathbb{C})$ بر توپولوژی ضعیف* منطبق است.

**۱۰.۱ تعریف.** فرض کنیم $X$ یک فضای توپولوژیک باشد. منظور از $C(X)$، مجموعه‌ی تمام توابع پیوسته‌ی مختلط ـ مقدار روی $X$ است که همراه با اعمال نقطه‌ای توابع یک فضای خطی است. به علاوه برای $f \in C(X)$ محمل $f$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathrm{supp}\ (f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}.$$

مجموعه‌ی تمام توابع پیوسته‌ی مختلط ـ مقدار کران‌دار روی $X$ را با $C_b(X)$ نمایش می‌دهیم. که با نرم $\|.\|_\infty$ یک فضای باناخ است

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : \ x \in X\} \quad (f \in C_b(X)).$$

$C_0(X)$ معرف زیرفضای $C(X)$ متشکل از توابع $f \in C(X)$ است که در بی‌نهایت صفر می‌شوند؛ یعنی برای هر $\varepsilon > 0$، زیرمجموعه‌ی فشرده‌ی $K$ از $X$ وجود دارد به طوری که $|f(x)| < \varepsilon$ برای هر $x \in X \setminus K$. هرگاه $X$ مجهز به توپولوژی گسسته باشد، $C_0(X)$ را با $c_0(X)$ نمایش می‌دهیم.

$C_{00}(X)$ نیز زیرفضای $C(X)$ متشکل از توابع با محمل فشرده است. به علاوه $C_{00}(X)$ همراه $\|.\|_\infty$ یک فضای نرم‌دار است و $C_{00}(X)$ در $C_0(X)$ چگال است. هرگاه $X$ مجهز به توپولوژی گسسته باشد، $C_{00}(X)$ را با $c_{00}(X)$ نمایش می‌دهیم.

توجه کنیم که $C_{00}(X) \subseteq C_0(X) \subseteq C_b(X) \subseteq C(X)$.

**۱۱.۱ تعریف.** فرض کنیم $X$ یک مجموعه باشد. خانواده‌ی $\Sigma$ از زیرمجموعه‌های $X$ را یک $\sigma$ـجبر در $X$ گوییم هرگاه $\Sigma$ دارای خواص زیر باشد.

(الف) $X \in \Sigma$.

(ب) اگر $E \in \Sigma$، آن‌گاه $E^c \in \Sigma$ که در آن $E^c$ متمم $E$ نسبت به $X$ است.

(ج) اگر $E_1, E_2, \dots \in \Sigma$، آن‌گاه $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in \Sigma$.

منظور از یک فضای اندازه‌پذیر $(X, \Sigma)$، مجموعه‌ی $X$ مجهز به $\sigma$ـجبر $\Sigma$ است. در این صورت اعضای $\Sigma$ را مجموعه‌های اندازه پذیر در $X$ می‌نامیم.

هرگاه $(X, \Sigma)$ یک فضای اندازه‌پذیر باشد و تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ به گونه‌ای باشد که برای هر مجموعه‌ی باز $V$ در $\mathbb{C}$، $f^{-1}(V) \in \Sigma$، گوییم $f$ اندازه‌پذیر است.

برای یک فضای اندازه‌پذیر $(X, \Sigma)$، یک اندازه مثبت تابعی مانند $\mu : \Sigma \longrightarrow [0, \infty]$ است به طوری که $\mu(\varnothing) = 0$ و $\mu$ جمعی شمارش‌پذیر باشد؛ یعنی برای دنباله‌ی $(E_n)$ از عناصر دو به دو مجزای $\Sigma$ داریم

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

در این حالت، $(X, \Sigma, \mu)$ یا به طور ساده $(X, \mu)$ را یک فضای اندازه می‌نامیم. به‌علاوه، اندازه‌ی مثبت $\mu$ یک اندازه‌ی متناهی است هرگاه $\mu(X) < \infty$. منظور از یک اندازه‌ی مختلط روی $X$، تابعی جمعی شمارشی مانند $\mu : \Sigma \longrightarrow \mathbb{C}$ است. برای هر اندازه‌ی مختلط $\mu$ روی $\Sigma$، تابع $|\mu| : \Sigma \longrightarrow [0, +\infty)$ را با دستور زیر تغییر کلی $\mu$ می‌نامیم

$$|\mu|(E) = \sup \sum_{i=1}^{n} |\mu(E_i)| \qquad (E \in \Sigma),$$

که در آن سوپریمم روی همه‌ی افرازهای متناهی $\{E_i\}_{i=1}^{n}$ از $E$ متشکل از عناصر $\Sigma$ تغییر می‌کند. در قضیه‌ی ۶ـ۴ از [۱۹] مشاهده می‌کنیم که $|\mu|$ یک اندازه‌ی مثبت متناهی روی $X$ است.

**۱۲.۱ تعریف.** فرض کنیم $(X, \Sigma, \mu)$ یک فضای اندازه باشد.

(الف) هر تابع مختلط ـ مقدار $s$ بر $X$ که دارای برد متناهی است یک تابع ساده نام دارد. در واقع، اگر $t_1, \dots, t_n$ مقادیر متمایز تابع ساده‌ی $s$ باشند و قرار دهیم $E_i = \{x \in X \ : \ s(x) = t_i\}$، آن‌گاه $s = \sum_{i=1}^{n} t_i \, \chi_{E_i}$ که در آن $\chi_{E_i}$ تابع مشخصه‌ی $E_i$ تعریف شده روی $X$ است.

(ب) فرض کنیم $s : X \longrightarrow [0, \infty)$ یک تابع ساده‌ی اندازه‌پذیر باشد و $E \in \Sigma$. در این‌صورت تعریف می‌کنیم

$$\int_E s \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} t_i \, \mu(E_i \cap E)$$

و

$$\int_E f\ d\mu = \sup_{۰\leqslant s\leqslant f} \int_E s\ d\mu$$

که در آن $f : X \longrightarrow [۰,\infty]$ تابعی اندازه‌پذیر است.

(ج) برای هر تابع حقیقی ـ مقدار $f$ روی $X$، توابع نامنفی $f^+$ و $f^-$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f^+ = \max\{f, ۰\}, \quad f^- = -\min\{f, ۰\}.$$

بدیهی است که $f = f^+ - f^-$ و $|f| = f^+ + f^-$. حال اگر $\int_X f^+\ d\mu$ و $\int_X f^-\ d\mu$ متناهی باشند، آن‌گاه قرار می‌دهیم

$$\int_X f\ d\mu = \int_X f^+\ d\mu - \int_X f^-\ d\mu.$$

برای هر تابع مختلط ـ مقدار $f = f_۱ + if_۲$ روی $X$، اگر $\int_X f_i\ d\mu$ برای $i = ۱, ۲$ تعریف شده و متناهی باشد، آن‌گاه تعریف می‌کنیم

$$\int_X f\ d\mu = \int_X f_۱\ d\mu + i\int_X f_۲\ d\mu.$$

(د) برای هر $۱ \leqslant p < \infty$، خانواده‌ی همه‌ی توابع اندازه‌پذیر $f$ روی $X$ با شرط

$$\|f\|_p = (\int_X |f(x)|^p\ d\mu(x))^{۱/p} < \infty$$

را با $L^p(X,\mu)$ نمایش می‌دهیم. در $L^p(X,\mu)$ توابع تقریباً همه جا یکسان را یکی می‌گیریم؛ در این صورت $L^p(X,\mu)$ با اعمال جمع و ضرب اسکالر توابع و نرم $\|.\|_p$ یک فضای باناخ است. اگر $\mu$ اندازه‌ی شمارشی باشد؛ یعنی اندازه‌ای که به مجموعه‌های متناهی، تعداد عضوها و به مجموعه‌های نامتناهی، بی‌نهایت را نظیر می‌کند، آن‌گاه $L^p(X,\mu)$ را با $\ell^p(X)$ نیز نمایش می‌دهیم. در واقع، $\ell^p(X)$ فضای همه‌ی توابع $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ است به طوری که

$$\|f\|_p = (\sum_{x\in X} |f(x)|^p)^{۱/p} < \infty$$

که در آن

$$\sum_{x\in X} |f(x)|^p = \sup\{\sum_{x\in F} |f(x)|^p : \text{متناهی } F \subseteq X\}.$$

**۱۳.۱ قضـیه (نامساوی هـولدر).** فرض کنیم $(X,\mu)$ یک فضای اندازه باشد، $1 < p,q < \infty$ و $1/p + 1/q = 1$. اگر $f \in L^p(X)$ و $g \in L^q(X)$، آن‌گاه $fg \in L^1(X)$ و $\|f\,g\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

اثبات. به مرجع [۱۹] رجوع کنید. □

**۱۴.۱ تعـریف.** فرض کنیم $(X,\mathcal{F},\mu)$ و $(Y,\mathcal{H},\nu)$ دو فضای اندازه باشند. در این صورت هر مستطیل اندازه‌پذیر مجموعه‌ای است به‌شکل $A \times B$ که در آن $A \in \mathcal{F}$ و $B \in \mathcal{H}$. $\mathcal{F} \times \mathcal{H}$ کوچکترین $\sigma-$جبر در $X \times Y$ که شامل هر مستطیل اندازه‌پذیر است تعریف می‌شود.

اندازه‌ی $\mu \times \nu$ که به اندازه‌ی حاصل ضربی $\mu$ و $\nu$ موسوم است برای هر زیرمجموعه‌ی $Q \in \mathcal{F} \times \mathcal{H}$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$(\mu \times \nu)(Q) = \int_X \nu(Q_x)\ d\mu(x),$$

به طوری که $Q_x = \{y \in Y : (x,y) \in Q\}$ برای هر $x \in X$ مجموعه‌ای $\nu-$اندازه‌پذیر و $x \longmapsto \nu(Q_x)$ تابعی $\mu-$اندازه‌پذیر است.

**۱۵.۱ قضـیه (فوبینی).** فرض کنیم $(X,\mu)$ و $(Y,\nu)$ دو فضای اندازه باشند و $f$ یک تابع مختلط ـ مقدار $\mu \times \nu$ـاندازه‌پذیر روی $X \times Y$ باشد که خارج از مجموعه‌ی $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ تقریباً همه جا صفر می‌شود که در آن هر $E_n$ مجموعه‌ی $\mu \times \nu$ـاندازه‌پذیر است و $(\mu \times \nu)(E_n) < \infty$. در این‌صورت انتگرال‌های زیر

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\ d(\mu\times\nu)(x,y)\ \ ,\ \ \int_X\int_Y f(x,y)\ d\nu(y)\ d\mu(x)\ \ ,\ \ \int_Y\int_X f(x,y)\ d\mu(x)\ d\nu(y)$$

مساوی و متناهی هستند اگر و تنها اگر یکی از انتگرال‌های زیر متناهی باشد

$$\int_{X\times Y} |f(x,y)|\ d(\mu\times\nu)(x,y)\ \ ,\ \ \int_X\int_Y |f(x,y)|\ d\nu(y)\ d\mu(x)\ \ ,\ \ \int_Y\int_X |f(x,y)|\ d\mu(x)\ d\nu(y).$$

اثبات. به مرجع [۱۹] رجوع کنید. □

**۱۶.۱ تعریف.** فرض کنیم $X$ یک فضای توپولوژیک باشد. کوچکترین $\sigma$ـجبر شامل تمام زیرمجموعه‌های بسته‌ی $X$ را با $\mathcal{B}(X)$ نمایش می‌دهیم و $\sigma$ـجبر مجموعه‌های بورل $X$ می‌نامیم. در ضمن، هر عضو $\mathcal{B}(X)$ را یک مجموعه‌ی بورل گوییم. در واقع، $(X,\mathcal{B}(X))$ یک فضای اندازه‌پذیر است.

اندازه‌ی مثبت یا مختلط $\mu$ روی $X$ را بورل می‌نامیم اگر روی $\mathcal{B}(X)$ تعریف شده باشد.

اندازه‌ی مثبت بورل $\mu$ روی $X$ را منظم بیرونی روی $E \in \mathcal{B}(X)$ گوییم هرگاه

$$\mu(E) = \inf\{\mu(V) : \text{باز است } V \supseteq E\}$$

و $\mu$ را منظم درونی می‌نامیم اگر

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : \text{فشرده است } K \subseteq E\};$$

بالاخره $\mu$ را منظم روی $E$ گوییم هرگاه منظم درونی و منظم بیرونی باشد.

اندازه‌ی مختلط بورل $\mu$ را روی $E$ منظم می‌نامیم اگر $|\mu|$ روی $E$ منظم باشد. اندازه‌ی مثبت $\mu$ روی $X$ را رادون می‌نامیم اگر روی مجموعه‌های فشرده مقدار متناهی، روی مجموعه‌های بورل، منظم بیرونی و روی مجموعه‌های باز منظم درونی باشد.

در حالتی که $\mu$ یک اندازه‌ی رادون روی $X$ باشد، $A \subseteq X$ را موضعاً پوچ نامیم هرگاه برای هر زیرمجموعه‌ی فشرده‌ی $K \subseteq X$ داشته باشیم $\mu(A \cap K) = \circ$. یک خاصیت وابسته به $x \in X$ موضعاً تقریباً در $X$ برقرار است هرگاه مجموعه‌ی نقاطی که دارای آن خاصیت نیست، موضعاً پوچ باشد. $L^{\infty}(X,\mu)$ معرف خانواده‌ی همه‌ی توابع اندازه‌پذیر مختلط$-$ مقدار $f$ روی $X$ است که

$$\|f\|_{\infty} = \inf\{t \in \mathbb{R} :\ t \geqslant \circ, x \in X \text{ برای موضعاً تقریباً هر } |f(x)| \leqslant t\} < \infty.$$

در $L^{\infty}(X,\mu)$ نیز توابعی را که موضعاً تقریباً همه جا یکسان هستند، یکی می‌گیریم. در این صورت $L^{\infty}(X,\mu)$ همره با اعمال نقطه‌ای و نرم $\|.\|_{\infty}$ یک فضای باناخ است.

فرض کنیم $M(X)$ مجموعه‌ی تمام اندازه‌های مختلط بورل منظم روی $X$ باشد. دراین‌صورت $M(X)$ همراه با جمع، ضرب اسکالر و نرم $\|\mu\| = |\mu|(X)$ $(\mu \in M(X))$ یک فضای باناخ است.

اندازه‌ی $\delta_x \in M(X)$ روی $X$ که برای هر زیرمجموعه‌ی بورل $E$ از $X$ به صورت $\delta_x(E) = \chi_E(x)$ تعریف می‌شود اندازه‌ی دیراک در $x$ می‌نامیم، که در آن $\chi_E$ تابع مشخصه‌ی $E$ روی $X$ را نشان می‌دهد.

**۱۷.۱ قضیه.** فرض کنیم $X$ یک فضای موضعاً فشرده‌ی هاسدورف و $\mu$ یک اندازه‌ی رادون روی $X$ باشد و $۱ \leqslant p < \infty$. در این صورت فضای $C_{\circ\circ}(X)$ در $L^p(X,\mu)$ چگال است.

اثبات. به قضیه‌ی ۳–۱۴ از [۱۹] رجوع کنید. □

**۱۸.۱ تعریف.** فرض کنیم $(X, \Sigma, \mu)$ یک فضای اندازه و $Y$ یک فضای باناخ باشد. در این صورت تابع ساده و اندازه‌پذیر $S$ را $\mu$–بوخنر ـانتگرال‌پذیر (یا $\mu$–انتگرال‌پذیر قوی) نامیم هرگاه $\int_X \|S\|\ d\mu < \infty$. تابع اندازه‌پذیر $f : X \longrightarrow Y$ را $\mu$–بوخنر ـانتگرال‌پذیر نامیم هرگاه دنباله‌ای از توابع ساده‌ی بوخنر ـانتگرال‌پذیر مانند $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ موجود باشد به گونه‌ای که داشته باشیم

$$\lim_n \int_X \|f - S_n\|\ d\mu = \circ.$$

در این حالت برای هر $E \in \Sigma$ دنباله‌ی برداری $\int_E S_n\ d\mu$، در $Y$ کشی بوده و تعریف می‌کنیم

$$\int_E f\ d\mu := \lim_n \int_E S_n\ d\mu$$

و آن را انتگرال بوخنر تابع برداری $f$ نسبت به اندازه‌ی $\mu$ می‌نامیم.

**۱۹.۱ قضیه.** تابع $\mu$ ـاندازه‌پذیر $f : X \longrightarrow Y$ بوخنر ـانتگرال‌پذیر است اگر و تنها اگر $\int_X \|f\|\ d\mu < \infty$.

اثبات. به قضیه‌ی ۲ صفحه‌ی ۴۵ از [۹] مراجعه کنید. □

**۲۰.۱ تعریف .** (الف) منظور از یک جبر $A$، یک فضای خطی روی $\mathbb{C}$ همراه با عمل ضرب $. : A \times A \longrightarrow A$ است به طوری که برای هر $a, b, c \in A$ و $t \in \mathbb{C}$ داشته باشیم

$(a.b).c = a.(b.c)$،

$(a+b).c = a.c + b.c$،

$a.(b+c) = a.b + a.c$،

$t(a.b) = (ta).b = a.(tb)$.

(ب) $B \subseteq A$ یک زیرجبر از جبر $A$ است هر گاه همراه با اعمال $A$ یک جبر باشد.

(ج) زیرجبر $I$ از $A$ یک اید آل راست (چپ) $A$ است هر گاه $IA \subseteq I$ $(AI \subseteq I)$.

(د) جبر $A$ نرم‌دار است هر گاه یک فضای خطی نرم‌دار باشد به طوری که برای هر $a,b \in A$ داشته باشیم $\|a.b\| \leqslant \|a\| \ \|b\|$. در این حالت $\|.\|$ را یک نرم جبری می‌نامیم.

(هـ) جبر نرم‌دار $A$ یک جبر باناخ است هرگاه به عنوان یک فضای خطی نرم‌دار کامل باشد.

(و) جبر $A$ یک $*$—جبر است هر گاه مجهز به یک برگشت $*$ باشد؛ یعنی یک نگاشت $* : A \longrightarrow A$ به طوری که برای هر $a,b \in A$ و $t \in \mathbb{C}$،

$$(a^*)^* = a \ \ , \ \ (a+b)^* = a^* + b^*,$$

$$(ta)^* = \bar{t}a^* \ \ , \ \ (ab)^* = b^*a^*.$$

(ز) جبر نرم‌دار $A$ یک $*$—جبر نرم‌دار است هرگاه مجهز به یک برگشت پیوسته‌ی $*$ با شرط $\|a\| = \|a^*\|$ برای هر $a \in A$ باشد.

(ح) $*$—جبر باناخ $A$ یک $C^*$—جبر است هر گاه $\|a^*a\| = \|a\|^2$ برای هر $a \in A$.

(ط) به ازای یک جبر باناخ $A$، منظور از$A$—مدول باناخ، فضای باناخ $X$ مجهز به نگاشت‌های $(a,\xi) \mapsto a.\ \xi$ از $A \times X$ به $X$ و $(\xi,a) \mapsto \xi.\ a$ از $X \times A$ به $X$ است به طوری که برای هر $a,b \in A$ ، $\xi,\eta \in X$ و $t \in \mathbb{C}$ داریم

(۱) $(t\xi+\eta).\ a = t(\xi.\ a) + \eta.\ a$ و $a.\ (t\xi+\eta) = t(a.\ \xi) + a.\ \eta$.

(۲) $\xi.(ab) = (\xi.\ a).b$، $(ab).\xi = a.(b.\ \xi)$ و $a.(\xi.\ b) = (a.\ \xi).b$.

(۳) یک مقدار ثابت و نامنفی $C = C_X$ وجود دارد به طوری که برای هر $a \in A$ و $\xi \in X$،

$$\|a.\ \xi\| \leqslant C\|a\| \ \|\xi\|, \ \ \|\xi.\ a\| \leqslant C\|a\| \ \|\xi\|.$$

در این پایان‌نامه، منظور ما از یک $A$_مدول، یک $A$_مدول باناخ است.

(ی) منظور از $A$—مدول باناخ اساسی $X$ که به طور خلاصه $A$—مدول اساسی گفته می‌شود، $A$—مدول باناخ $X$ است به طوری که $X = A.X.A$.

**۲۱.۱ تذکر.** (۱). اگر $J$ یک ایدآل بسته‌ی جبر نرم‌دار $A$ باشد، آن‌گاه فضای $A/J$ همراه با ضرب برداری

$$(a+J)(b+J) = ab + J \quad (a,b \in A)$$

و نرم $\|a+J\| = \inf\{\|a+b\| \ : \ b \in J\}$ یک جبر نرم‌دار است. در حالتی که $A$ جبر باناخ باشد، $A/J$ نیز یک جبر باناخ است.

(۲). برای هر جبر باناخ $A$، $A^\# := A \oplus \mathbb{C}e$ همراه با ضرب برداری تعریف شده به‌وسیله‌ی

$$(a+te)(b+se) = ab + ta + sb + tse \quad (a, b \in A, t, s \in \mathbb{C})$$

و نرم $\|a+te\| = \|a\| + |t|$ برای هر $a \in A$ و $t \in \mathbb{C}$ یک جبر باناخ است. به‌علاوه، $A$ یک ایدآل $A^\#$ است. که در این‌جا $e = (\circ, 1)$ عنصر همانی $A^\#$ است.

(۳). فرض کنیم $A$ یک جبر باناخ و $X$ یک $A$—مدول باناخ باشد. در این صورت $X^*$ همراه با ضرب‌های زیر یک $A$—مدول باناخ است

$$\langle f.a, \xi \rangle = \langle f, a.\, \xi \rangle, \quad \langle a.f, \xi \rangle = \langle f, \xi.a \rangle \quad (a \in A, \xi \in X, f \in X^*).$$

**۲۲.۱ تعریف .** فرض کنیم $\{X_i : i \in I\}$ خانواده‌ای از فضاهای باناخ باشد. فضای حاصلضرب این خانواده را با $\prod_{i \in I} X_i$ نشان می‌دهیم و برابر فضای همه‌ی نگاشت‌های $a : I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} X_i$ تعریف می‌کنیم به طوری که برای هر $i \in I$ داریم $a(i) \in X_i$؛ در واقع، با فرض $a_i = a(i)$ به ازای هر $i \in I$، عنصر $a$ را به طور ساده با $(a_i)_{i \in I}$ نیز نمایش می‌دهیم. همچنین برای $1 \leq p < \infty$، فضای $l_p$—حاصلجمع این خانواده را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\bigoplus_{i \in I}^{p} X_i = \{a \in \prod_{i \in I} X_i \ \ , \ \ \|a\|_p := (\sum_{i \in I} \|a(i)\|^p)^{1/p} < \infty\}$$

به علاوه فضای $c_\circ$—حاصلجمع این خانواده را نیز به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\bigoplus_{i \in I}^{\circ} X_i = \{a \in \prod_{i \in I} X_i \ \ , \ \ \|a\|_\infty := \sup_{i \in I} \|a(i)\| < \infty \ \ , \ \ \lim_i a(i) = \circ\}$$

که در آن $\lim_i a(i) = \circ$ بدین معنی است که $a \in c_\circ(\prod_{i \in I} X_i)$.

**۲۳.۱ تعریف .** فرض کنیم $A$ یک جبر نرم‌دار باشد.

(الف) گوییم تور $(e_\alpha)$ در $A$ یک همانی تقریبی چپ (راست) است هرگاه برای هر $a \in A$ داشته باشیم