دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دانشکده علوم — گروه ریاضی

پایان نامه جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی — آنالیز عددی

موضوع:

یک روش عددی در حل معادلات مربوط به پیش بینی وضع هوا

نگارش:

کبری ربیعی

استاد راهنما:

دکتر علی ذاکری

استاد مشاور:

دکتر فریده قریشی

شهریور ۱۳۸۹

تقدیم به

مادر مهربان و پدر عزیزم که هرچه دارم از ایشان است،

تشکر و قدردانی

اکنون که مرحله‌ای دیگر از دوران تحصیل را به پایان می‌رسانم، فرصت را مغتنم شمرده و بر خود لازم می‌دانم از پدر و مادر عزیز و مهربانم که همواره مشوق من بوده‌اند، تشکر و قدردانی کنم.

همچنین، از استاد راهنمای ارجمندم، جناب آقای دکتر علی ذاکری که راهنمای اینجانب بوده‌اند و هدایت این پایان‌نامه را بر عهده داشته‌اند، و استاد مشاور بزرگوارم، سرکار خانم فریده قریشی، کمال تشکر و سپاس را دارم.

چکیده

این پایان نامه به مدل سازی ریاضی مسئله پیش‌بینی وضع هوا می‌پردازد. دستگاه معادلات دیفرانسیلی حاصل از نوع ناویه استوکس در مختصات کروی می‌باشد. برای حل مسئله روش‌های عددی مختلفی مطرح می‌شود. در بین روش‌های ارائه شده با استفاده از روش طیفی تقریبی از مؤلفه‌های افقی سرعت و ارتفاع سیال بیان می‌گردد. در انتها یک نمونه عددی برای مسئله مورد نظر مطرح و جواب‌های عددی حاصل با جواب تحلیلی موجود مقایسه می‌شوند.

کلمات کلیدی

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی – معادلات حرکت – معادله پیوستگی – معادله جزر ومدی لاپلاس – حل عددی با روش طیفی

فهرست مندرجات

لیست اشکال

فهرست جدول‌ها

پیشگفتار

در این پایان‌نامه پیش‌بینی عددی وضع هوا مورد بحث قرار می‌گیرد. اما قبل از آن نگاهی اجمالی بر مراحل پیش‌بینی وضع هوا خواهیم داشت.

درک علمی فرآیندهای جوی

هواشناسی به معنای به کارگیری علم و فناوری برای حدس زدن و پیش‌بینی وضعیت جو زمین در زمان آینده و برای یک منطقه مشخص جغرافیایی می‌باشد. نسل بشر از دوره‌های تاریخی بسیار دور و زمان‌های گذشته تلاش می‌کرد که وضعیت جو را پیش‌بینی کند. اما در آن زمان پیش‌بینی بر پایه علمی استوار نبوده و بیشتر براساس گمانه زنی بوده است. اما امروزه پیش‌بینی وضع هوا از راه جمع آوری اطلاعات ارزشمند از وضعیت کنونی جو زمین و استفاده از درک علمی فرآیندهای جوی در شاخه‌ای از علم به نام متئورولوژی[۱] انجام می‌شود و اغلب منجر به نتایج دقیق و علمی می‌شود. ماهیت بی‌نظم جو زمین باعث می‌شود نیازمند قدرت محاسباتی بزرگی شویم که با آن بتوان معادلات توصیف‌گر وضعیت جو را محاسبه و تجزیه و تحلیل کرد. به دست نیاوردن درک درست و علمی از پدیده‌های جوی به معنای آن است که هر چقدر محدوده پیش‌بینی ما گسترش بیابد نتیجه پیش‌بینی از دقت و صحت کمتری برخوردار خواهد بود. پس اولین گام در پیش بینی، شناخت علمی پدیده‌های اتمسفری می‌باشد.

تاریخچه هواشناسی

در طول هزاران سال مردم ساکن در همه مکان‌ها سعی می‌کردند وضعیت هوا را به گونه‌ای پیش‌بینی کنند. در سال ۶۵۰ قبل از میلاد مسیح، اهالی بابل از روی شکل هندسی ابرها در مورد وضعیت هوا در زمان آینده نظر می‌دادند. ارسطو نیز در این زمینه مطالعاتی داشت. در سال ۳۰۰ قبل از میلاد مسیح چینی‌ها نیز با شیوه‌های سنتی سعی در پیش‌بینی وضع هوا داشتند که روش‌های سنتی متکی بر

---
[۱] Meteorology

صفات و خصوصیات آب و هوای مشاهده شده توسط مردم بود. تجربیات جمع شده و قالب علمی آن‌ها در طول زمان سبب کامل شدن و ارائه علمی به نام هواشناسی گردید. بااین حال به عقیده جری ویلسون [۱] هواشناس برجسته بسیاری از پیش‌بینی‌های امروزی نیز کاملاً علمی نیست و به هیچ وجه نمی‌تواند پایه ارائه اطلاعات آماری دقیق باشد. در هر صورت پیشرفت واقعی این علم در قرن بیستم اتفاق افتاد و روش عددی پیش‌بینی وضع هوا در آن زمان مطرح گردید. اگرچه به دلیل محدودیت های محاسباتی رایانه‌های متداول آن زمان این روش قابل پیاده‌سازی نبود اما بعد از اختراع رایانه‌های الکترونیکی قابل برنامه‌ریزی در سال ۱۹۵۵ استفاده از این روش آغاز شد.

سیستم نوین پیش بینی وضع هوا

در پیش‌بینی نوین پنج مرحله وجود دارد که به صورت خلاصه به آن‌ها اشاره می‌کنیم.

جمع آوری اطلاعات

مشاهده وضعیت جوی فشار هوا، دما، سرعت باد، جهت جریان باد و رطوبت هوا توسط ایستگاه‌های خودکار پیش‌بینی هوا، شناورهای آبی و ماهواره‌های هواشناسی صورت می‌گیرد. در حال حاضر استفاده از ماهواره رایج‌ترین شیوه جمع آوری اطلاعات در سراسر جهان است ضمن این‌که تصویرهای شفاف و مشاهده آن‌ها از عوارض جوی به هواشناسان در تشخیص جهت حرکت ابرها و پیش‌بینی عددی کمک بسیاری خواهد کرد. این تصویرها که به صورت امواج مادون قرمز مخابره می‌شوند، می‌تواند از دمای سطح ابر و بالاتر از آن نیز خبر دهد و به پیش‌بینی جهت وزش باد کمک کند. رادارهای خاصی نیز در مراکز هواشناسی به کار گرفته می‌شود که شدت و محل اتفاق افتادن یک پدیده جوی را نشان می‌دهد و سرعت و جهت جریان باد را مورد بررسی قرار می‌دهد. با فرستادن بالن‌های هواشناسی به آسمان می‌توان دما، رطوبت و میزان ابرهای بالای جو را نیز اندازه‌گیری کرد.این بالن‌ها اطلاعات را از سطح ۳۰ هزار متری بالای زمین تا رسیدن به استراتوسفر می‌سنجند و مخابره می‌کنند. البته در سال‌های اخیر هواپیماهای تجاری نیز که تا سطح قابل قبولی به پرواز در می‌آیند، به فرآیند هواشناسی و جمع آوری اطلاعات کمک زیادی کرده‌اند.

[۱] Jerry Vilson

جمع‌بندی اطلاعات

در این فرآیند که جمع‌بندی و ترکیب اطلاعات نامیده می‌شود، اطلاعات به دست آمده از طریق مشاهدات و منابع در مقایسه و نتیجه‌گیری با آخرین مدل‌های عددی و گرافیکی از وضع هوای ساعات و لحظات قبل قرار می‌گیرد و با مدت مشابه در روزها و هفته‌های پیش سنجیده می‌شود تا وضعیت هوا آنالیز و تحلیل شود. به همین دلیل نیز این کار بهترین تخمین از وضعیت هوای کنونی و آینده را ارائه می‌دهد. برای این جمع‌بندی نیز از یک شبیه‌سازی سه وجهی شامل دما، رطوبت و مشخصات باد استفاده می‌شود.

پیش‌بینی عددی وضع هوا

در پیش بینی وضع هوابه روش عددی که اصطلاحاً به NWP [۱] موسوم است، از میکرورایانه‌هایی با پردازنده‌های فرا معمولی استفاده می‌شود که وضعیت جو را شبیه‌سازی می‌کنند.آن‌ها اطلاعات فعلی را دریافت کرده و به طراحی نقشه‌هاو ترسیم نمودارهای آن می‌پردازند. سپس برای یک مدت زمان مشخص از طریق برنامه‌هایی که بر مبنای معادلات مربوط به جو نوشته شده‌اند، وضعیت جو را در آینده پیش‌بینی می‌کنند. قابل ذکر است که معادلات یاد شده معادلاتی هستند که به کمک علم فیزیک و مطالعات مکانیکی سیالات بر روی اتمسفر به دست می‌آیند. این معادلات به دلیل وجود متغیرهای زیاد و پیچیدگی بیش از حد معمول با هر رایانه‌ای قابل محاسبه نبوده و نیاز به ابررایانه‌هایی دارد که در اختیار مراکز و پایگاه‌های هواشناسی است.

فرآیند شبیه سازی مدل پیش‌بینی

اطلاعات خروجی به دست آمده، اغلب خام هستند و قبل از انتشار ویرایش شده و تغییر می‌یابند. برای این کار از روش‌ها و فنون آماری استفاده می‌شود که جانبداری غیر عمدی ناشی از ساختار خاص کدهای برنامه نویسی نرم افزار پیش‌بینی ونیز دخالت عوامل انسانی را حذف می‌کند. ایجاد هماهنگی با دیگر پایگاه‌های ارائه دهنده اطلاعات که وضعیت جو را با NWP سنجیده‌اند، نیز از دیگر کارهای

[۱] numerical weather pridiction

مخصوص این فرآیند است.

پخش داده ها بین کاربران

آخرین مرحله در پیش‌بینی جمع‌بندی کلیه مراحل فوق و بیان نتیجه است به طوری که قابل فهم برای عموم باشد و اطلاعات ارائه شده از سادگی و کارایی لازم برای کلیه کاربران برخوردار باشد.

با دقت در مطالب دیده می‌شود که یکی از مهمترین مراحل پیش‌بینی وضعیت هوا، پیش‌بینی عددی می‌باشد. به همین دلیل در این پایان نامه این مبحث را مورد بررسی قرار می‌دهیم که در سه فصل به شرح زیر تنظیم شده است.

فصل اول : در این فصل برخی قضایا و تعاریف مقدماتی مورد استفاده در پایان نامه بیان شده است.

فصل دوم : با توجه به اهمیت معادلات مربوط به پیش‌بینی وضع هوا فصل دوم به بررسی چگونگی پیدایش این معادلات و ارائه مدل ساده شده‌ای از معادلات کامل اختصاص یافته است.

فصل سوم : این بخش به بررسی معادلات از دید ریاضی و روش حل عددی معادلات مربوط به آن می‌پردازد.

فصل چهارم : روش‌های عددی ارائه شده در فصل سوم در قالب یک نمونه عددی ارائه و نتایج حاصل مورد بررسی قرار می‌گیرد.

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

از مطالعه فیزیکی پدیده‌های جوی و پیاده‌سازی مبحث مکانیک سیالات روی وضعیت اتمسفر معادلاتی حاصل می‌شود که آن ها را تحت عنوان معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی [۱] می‌شناسیم. به دلیل اهمیت این معادلات ابتدا به تعریف و معرفی آن می‌پردازیم.

معادلات دیفرانسیل بامشتقات جزیی

فرض کنیم که $x, y, z, \cdots$ نمایش دهنده متغیرهای مستقل و u نیز نمایشی برای متغیر وابسته باشد. تابعی را به شکل زیر در نظر بگیرید:

$$u = u(x, y, z) \qquad (۱-۱)$$

در این حالت خاص u تابعی از متغیرهای x, y, z می‌باشد و همچنین مشتقات جزئی آن به صورت زیر می‌باشند.

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x};\ u_y = \frac{\partial u}{\partial y}\ ;\ u_{xx} = \frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}\ ;\ u_{xy} = \frac{\partial^۲ u}{\partial x \partial y} \quad \cdots \qquad (۱-۲)$$

با در نظر گرفتن روابط (۱ − ۱) و (۲ − ۱) می‌توان یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی را به صورت زیر تعریف کرد.

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}, \cdots) = ۰ \qquad (۱-۳)$$

که در آن F یک تابع نمایش دهنده کمیت‌ها و یا حداقل یکی از مشتقات جزئی موجود است. مرتبه یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی را مرتبه بالاترین مشتق در یک معادله تعریف می‌کنند. اگر در معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی، ضرایب مشتقات به صورت توابعی از متغیرهای مستقل در نظر گرفته شوند، معادله دیفرانسیلی را معادله دیفرانسیل جزئی خطی می‌نامند و اگر این ضرایب توابعی از متغیرهای وابسته نیز باشند، آن را معادله دیفرانسیل جزئی شبه خطی نامند و در نهایت اگر این ضرایب توابعی از مشتقات اول نیز باشند، معادله را معادله دیفرانسیل جزئی غیرخطی می‌نامند.

[۱] partial differential equation

برای یافتن یک جواب یکتا در یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی، باید شرایط اضافه‌ای را بر مسئله اعمال کرد. این شرایط، شرایط جانبی نامیده می شوند. در جواب این شرایط معمولاً به شکل شرایط مرزی و اولیه و یا به صورت ترکیبی از هر دو در نظر گرفته می‌شوند.

فرض کنیم Ω ناحیه‌ای باشد که U (یک جواب معادله دیفرانسیل) بر آن تعریف می‌شود به طوری که U و مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم آن بر Ω تعریف شده باشند. $\partial\Omega = \beta$ را مرز Ω در نظر می‌گیریم. اگر مقدار تابع روی کرانه β یا شار گذرا از مرز β در جهت قائم بر سطح داده شده باشد، مساله‌ای با شرایط کرانه‌ای داریم، که انواع شرایط کرانه‌ای در حالت استاندارد را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت .

۱. اگر مقدار تابع در سراسر β داده شده باشد آنگاه مساله را با شرایط کرانه‌ای دیریکله [۱] می‌نامند.

۲. اگر شار گذرا از سراسر مرز ناحیه در جهت قائم بر سطح (بردار قائم یکه برون سو) داده شده باشد آنگاه مساله را با شرایط کرانه‌ای نیومن [۲] می‌نامند.

۳. اگر مقدار تابع و شار تابع در جهت قائم بر سطح (بردار یکه برون سو) داده شده باشد، مساله را آمیخته [۳] می‌گویند.

برای حل عددی یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی روش‌های عددی متعددی وجود دارد که به اختصار بیان می‌شود.

۱.۱ روش تفاضلات متناهی برای تقریب معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی

روش تفاضلات متناهی روشی برای گسسته سازی معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی است. در این روش تقریب‌هایی برای مشتقات مراتب مختلف به کار می‌بریم. برای حالت یک متغیره با بسط تیلور

[۱] Dirichlet
[۲] Neuman
[۳] Mixed

$y(x)$ حول x داریم :

$$y(x+\Delta x) = y(x) + \Delta x \frac{\partial y}{\partial x}|_x + \frac{\Delta x^2}{2!}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}|_x + \frac{\Delta x^3}{3!}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}|_x + \cdots \qquad (1-4)$$

$$y(x-\Delta x) = y(x) - \Delta x \frac{\partial y}{\partial x}|_x + \frac{\Delta x^2}{2!}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}|_x - \frac{\Delta x^3}{3!}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}|_x + \cdots \qquad (1-5)$$

رابطه (۴ − ۱) را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$\frac{\partial y}{\partial x}|_x = \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} + O(\Delta x) \qquad (1-6)$$

که یک تقریب پیشرو برای مشتق مرتبه اول است و دارای خطایی از مرتبه $O(\Delta x)$ است. به طور مشابه از رابطه (۵ − ۱) خواهیم داشت:

$$\frac{\partial y}{\partial x}|_x = \frac{y(x) - y(x-\Delta x)}{\Delta x} + O(\Delta x) \qquad (1-7)$$

که یک تقریب پسرو برای مشتق مرتبه اول با خطایی از مرتبه $O(\Delta x)$ می باشد.

همچنین با تفریق دو رابطه (۴ − ۱) و (۵ − ۱) تقریب مرکزی زیر را با خطایی از مرتبه $O(\Delta x)^2$ برای مشتق مرتبه اول خواهیم داشت:

$$\frac{\partial y}{\partial x}|_x = \frac{y(x+\Delta x) - y(x-\Delta x)}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2 \qquad (1-8)$$

و با جمع دو رابطه (۴ − ۱) و (٦ − ۱) داریم:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}|_x = \frac{y(x+\Delta x) - 2y(x) + y(x-\Delta x)}{\Delta x} + O(\Delta x)^2 \qquad (1-9)$$

که یک تقریب برای مشتق مرتبه دوم با خطایی از مرتبه $O(\Delta x)^2$ است. فرض کنیم $y = y(x,t)$ در این صورت $y(i\Delta x, j\Delta t)$ را با y_{ij} نشان می‌دهیم که Δx طول گام مکانی و Δt طول گام زمانی می‌باشد و تقریب زیر را برای مشتق مرتبه دوم به کار می‌بریم.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}|_{i,j} = \frac{1}{2\Delta x^2}([y_{i+1,j+1} - 2y_{i,j+1} + y_{i-1,j+1}] + [y_{i+1,j} - 2y_{i,j} + y_{i-1,j}]) \qquad (1-10)$$

تقریب بالا معروف به تقریب کرانک – نیکلسون [۱] است که مشتق مرتبه دوم را با استفاده از دو گام زمانی تقریب می‌زند.
برای حل یک معادله با مشتق جزیی بسته به احتیاج روابط فوق را در معادله قرار داده و مقادیر متغیرها در نقاط مش‌بندی شده ناحیه جایگذاری می‌شود.

قبل از معرفی روش های دیگر ابتدا لازم است حل عددی یک معادله مشتق جزیی به اختصار بیان شود برای این منظور معادله زیر با شرط کرانه‌ای را در نظر بگیرید.

$$Lu(x) = s(x) \qquad x \in U$$

$$Bu(y) = 0 \qquad y \in \partial U$$

که L و B عملگرهای خطی دیفرانسیلی هستند. در واقع جواب عددی معادلات فوق تابعی مانند $\bar{u}$ است که در شرط کرانه‌ای صدق می‌کند و عبارت باقیمانده $R = L(\bar{u}) - s$ به ازای آن کوچک می‌شود. اما مفهوم کوچک بودن باقیمانده را در قالب روش‌های زیر بیان می‌کنیم.

۲.۱ روش باقیمانده‌های وزن‌دار

در این روش جواب عددی را در یک زیر فضا مانند P_N جستجو می‌کنیم. پایه این زیر فضا را به صورت $p_N = (\phi_0, \cdots, \phi_N)$ در نظر گرفته و آن‌ها را توابع بسط [۲] یا توابع آزمایش [۳] می‌نامیم. سپس جواب عددی را به صورت بسط متناهی از این توابع به صورت

$$\bar{u} = \sum_{n=0}^{N} \hat{u}\phi_n$$

قرار می‌دهیم.
خانواده توابع $(\chi_0, \cdots, \chi_N)$ توابع تست نامیده می‌شوند که برای ضرب نقطه‌ای فضای مورد نظر رابطه

[۱] Crank - Nicolson
[۲] expansion functions
[۳] trial functions