بسم الله الرحمن الرحیم

بِسمِ اللّه الرَّحمنِ الرَّحیم

۲۵ /۱۱/ ۱۳۸۰

دانشگاه تربیت معلم

دانشکدهٔ علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر

پایان نامهٔ کارشناسی‌ارشد ریاضی محض

(شاخهٔ جبر)

عنوان:

آشنایی بیشتر با زیرگروههای آبلی p- گروهها

استادراهنما:

دکتر علیرضا جمالی

پژوهش و تدوین:

مرتضی جعفرپور

۱۳۸۰

تقدیم به همسرم

تقدیر و تشکر

حمد وسپاس آموزگار خلقت را که این میسر نبود مگر به توفیقش .

خداوند را شکر گزارم که در همه مراحل زندگی پشتیبان من بود ، امیدوارم بتوانم بنده ای شاکر باشم .

در اینجا بر خود لازم میدانم از استاد ارجمندم آقای دکتر علیرضا جمالی که در طول تدوین این پایان نامه راهگشا و راهنمای ارزشمند برای من بوده اند قدردانی نموده و تشکرات صمیمانه خود را تقدیم کنم .

همچنین از آقای دکتر ایرانمنش بعنوان داور خارجی و آقای دکتر دوستی بعنوان داور داخلی که زحمت خواندن و بیان نظرات اصلاحی خود را درباره این پایان نامه فرموده اند تشکر و قدردانی می نمایم .

مرتضی جعفر پور

دی ماه ۱۳۸۰

صورتجلسهٔ دفاع از پایان‌نامهٔ کارشناسی‌ارشد

جلسهٔ دفاع از پایان‌نامهٔ آقای مرتضی جعفرپور دانشجوی دورهٔ کارشناسی‌ارشد رشتهٔ ریاضی محض تحت عنوان:

آشنایی بیشتر با زیرگروههای آبلی p- گروهها

در روز شنبه مورخ ۸۰/۱۰/۱۵ در دانشکدهٔ علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر تشکیل گردید و نتیجهٔ آزمون به شرح زیر تعیین می‌گردد. نمرهٔ این آزمون ۱۸/۵ هجده و نیم می‌باشد.

۱- عالی ☒
۲- بسیار خوب ☐
۳- خوب ☐
۴- قابل قبول ☐
۵- غیرقابل قبول ☐

استادراهنما	داور خارجی	داور داخلی
دکتر علیرضا جمالی	دکتر علی ایرانمنش	دکتر حسین دوستی

اسماعیل بابلیان
رئیس دانشکدهٔ علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر

تهران، خیابان طالقانی بین بهار وشریعتی، پلاک ۵۹۹ کدپستی ۱۵۶۱۸ تلفن ۷۵۰۷۷۷۲ فاکس ۷۶۲۹۸۸

فهرست مطالب

چکیده

فرض کنیم G یک p- گروه متناهی از مرتبهٔ p^m باشد که در آن p یک عدد اول فرد است. در این پایان‌نامه موضوعات زیر را مورد بحث قرار خواهیم داد:

الف) تعداد زیرگروههای آبلی مقدماتی G از مرتبه‌های $p^۳$ و $p^۴$.

ب) تعداد زیرگروههای فرادوری G از مرتبهٔ p^n که در آن $۴ \leq n \leq m - ۱$.

ج) مطالعهٔ بیشتر $\mathrm{Aut}(G)$.

د) مطالبی در مورد p- گروههای از ردهٔ ماکسیمال و تعیین چند محک برای تشخیص آنها.

همچنین پایدارساز یک زنجیر نرمال از زیرگروههای یک π- گروه را معرفی و خواص آن را بیان خواهیم کرد.

واژه‌های کلیدی: ردهٔ ماکسیمال، اصل شمارش هال، p- گروه آبلی مقدماتی، گروه فرادوری، نمای یک p- گروه، G- پایا.

پیشگفتار

مبحث p- گروهها یکی از مهمترین مباحث نظریهٔ گروهها می‌باشد. در این پایان‌نامه به بررسی بیشتر این نوع از گروهها پرداخته، و بیشتر با آنها آشنا خواهیم شد. لازم به ذکر است که در اغلب موارد p- گروهها را متناهی، که در آن p یک عدد اول فرد است، در نظر خواهیم گرفت.

این پایان‌نامه مشتمل بر چهار فصل می‌باشد که موضوعات اصلی آن به توسط برکوویچ[1] در سال ۱۹۹۸ مطرح و ثابت گردیده است.

پیش از اینکه به معرفی فصلها بپردازیم، لازم است به دو نتیجهٔ ساده اشاره کنیم که در اثبات بسیاری از قضایا و لمها از آنها استفاده شده است. فرض کنیم G یک p- گروه متناهی، باشد و $\mathfrak{M}$ مجموعه‌ای از زیرگروههای G باشد که دارای خاصیت Θاند. در این صورت اگر $p \nmid |\mathfrak{M}|$ آنگاه G دارای زیرگروهی نرمال با خاصیت Θ است. همچنین اگر G خود زیرگروه نرمالی از p- گروه وسیعتری مانند W باشد آنگاه $\mathfrak{M}$ شامل زیرگروهی مانند K است که K زیرگروه نرمالی از W است.

همان طور که اشاره کردیم، این پایان‌نامه در چهار فصل تنظیم شده است. فصل اول آن به تعریفها و قضایای اختصاص یافته است که در فصلهای بعدی مورد نیاز می‌باشند.

در فصل دوم به بیان و اثبات قضیهٔ اساسی برای p- گروهها و نتایج می‌پردازیم. از جملهٔ این نتایج شمارش تعداد زیرگروههای آبلی مقدماتی از هر یک از مرتبه‌های p^3 و p^4 در p- گروههای متناهی است که در آن p عدد اول فرد است، می‌باشد. در این فصل همچنین به شمارش تعداد زیرگروههای، فرادوری در p- گروههای متناهی که p عدد اول فرد است نیز پرداخته شده است.

فصل سوم پایان‌نامه به p- گروههای از ردهٔ ماکسیمال اختصاص یافته، و آزمونهایی برای تشخیص آنها بیان شده است.

در فصل چهارم نتایجی را در مورد پایدارساز یک زنجیر از زیرگروههای نرمال یک π - گروه

---

1) Berkovich

به‌دست خواهیم داد. اگر G یک πـ گروه و

$$۱ = G_۰ < G_۱ < \cdots < G_n = G \qquad (*)$$

یک زنجیر از زیرگروههای نرمال G باشد، آنگاه مجموعهٔ

$$\mathscr{A} = \{\alpha \in \mathrm{Aut}(G) | xG_i^\alpha = xG_i \quad (۱ \leq i \leq n), \quad x \in G_{i-۱} - G_i\}.$$

را پایدارساز زنجیر (*) می‌نامیم. در این فصل چند نتیجه مهم نیز در مورد $\mathscr{A}$ ثابت خواهد شد.

فصل اول

پیشنیازها

۱.۱ تعریفها و قضیه‌های بنیادی

از تمامی قضایا و لمهای بیان شده در این فصل در فصلهای بعد استفاده خواهیم کرد و حتی‌الامکان از اثبات قضایا و لمهای متعارف خودداری می‌شود.

۱.۱.۱ تعریف. فرض کنیم π مجموعه‌ای از اعداد اول باشد. تمام اعداد اولی را که به π تعلق ندارند را به π' نمایش می‌دهیم و هرگاه π فقط شامل یک عضو مانند p باشد، به جای علامت $\{p\}$ از p استفاده خواهیم کرد. و همچنین π' را به p' نمایش خواهیم داد. منظور از یک πـ عدد، عددی است که همهٔ عوامل اول آن در π باشند.

اگر برای هر عضو از گروه G مانند a، $O(a)$ یک πـ عدد باشد آنگاه گروه G را یک πـ گروه می‌نامیم.

۲.۱.۱ تعریف. فرض کنیم n عددی طبیعی باشد به طوری که $n \geq ۲$. گروه دو وجهی $D_{۲n}$ را با نمایش زیر تعریف می‌کنیم:

$$D_{۲n} =< \langle x, y | x^{۲} = y^n = ۱, xy = y^{-۱}x \rangle.$$

۳.۱.۱ لم. به ازای هر عدد طبیعی مانند n، که $n \geq ۲$

$$Z(D_{۲n}) = \begin{cases} \langle y^{\frac{n}{۲}} \rangle & (\text{زوج } n) \\ ۱ & (\text{فرد } n). \end{cases}$$

۴.۱.۱ تعریف. فرض کنیم G یک گروه، و X زیرمجموعه‌ای ناتهی از G باشد. مرکزساز X در G که با علامت $C_G(X)$ نشان می‌دهیم، عبارت است از تمام اعضایی از G که با هر عضو از X جابجا می‌شوند. یعنی

$$C_G(X) = \{g \in G | gx = xg, \quad \text{به‌ازای هر } x \text{ از } X\}.$$

۵.۱.۱ تعریف. فرض کنیم G یک pـ گروه متناهی باشد. $exp(G)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\exp(G) = \max\{O(a) | a \in G\}.$$

همچنین منظور ما از $\exp(a)$ که در آن a عضوی از G است، همان مرتبهٔ a می‌باشد. یعنی $\exp(a) = O(a)$.

۶.۱.۱ تعریف. فرض کنیم G یک pـ گروه متناهی از مرتبهٔ p^m، و H زیرگروهی از G باشد. $\mho_n(H)$ و $\Omega_n(H)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Omega_n(H) = \langle x \in H | x^{p^n} = 1 \rangle \qquad (n \leq m),$$

$$\mho_n(H) = \langle x^{p^n} | x \in H \rangle.$$

۷.۱.۱ تعریف. فرض کنیم q توان مثبتی از یک عدد اول مانند p، و n عددی طبیعی باشد. منظور از $GL(n,q)$، مجموعهٔ همهٔ ماتریسهای $n \times n$ با درایه‌های Z_p است که دترمینان آنها ناصفر می‌باشد. به راحتی دیده می‌شود $GL(n,q)$ تشکیل یک گروه می‌دهد. این گروه را گروه خطی کلی می‌نامیم.

همچنین مجموعهٔ $SL(n,q)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$SL(n,q) = \{A \in GL(n,q) | \det A = 1\}.$$

به راحتی دیده می‌شود که $SL(n,q) \leq GL(n,q)$.

۸.۱.۱ قضیه. با توجه به نمادهای تعریف قبل:

$$(i) \qquad |GL(n,q)| = (q^n - 1)(q^n - q)\dots(q^n - q^{n-1}),$$

$$(ii) \qquad |SL(n,q)| = \frac{|GL(n,q)|}{q-1}.$$

برهان. به راحتی دیده می‌شود که $GL(n,q) \cong GL(V,q)$، که در آن $GL(V,q)$ تبدیلهای خطی ناتکین از فضای برداری n بعدی V روی میدان Z_p است. همچنین داریم $|GL(n,q)| = |\beta|$ که در آن β تعداد پایه‌های مرتب فضای برداری V می‌باشد.

حال تابع زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\det : GL(n,q) \longrightarrow F^*$$

$$A \mapsto \det A$$

که در آن F میدان q عضوی است. به راحتی دیده می‌شود det یک همریختی پوشا با هستهٔ $SL(n,q)$ است. بنابراین

$$|SL(n,q)| = \frac{|GL(n,q)|}{q-1}.$$

۹.۱.۱ تعریف. فرض کنید K و H دو گروه دلخواه باشند، و φ یک همریختی از H به $\mathrm{Aut}(K)$ باشد. حاصلضرب نیم مستقیم H و K با φ را با نماد $H \times_\varphi K$ نمایش می‌دهیم و عمل آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(h_1, k_1).(h_2, k_2) = (h_1 h_2, (k_1 \varphi_{h_2} k_2)$$

که (h_1, k_1) و (h_2, k_2) اعضایی از $H \times K$ می‌باشند.

اگر $\varphi = id$ آنگاه حاصلضرب نیم مستقیم فوق را حاصلضرب مستقیم می‌نامیم و با $H \times K$ نمایش می‌دهیم.

۱۰.۱.۱ تعریف. گروه G را آبلی مقدماتی گوئیم هرگاه حاصل‌ضرب مستقیم گروههای دوری از مرتبهٔ p باشد.

۱۱.۱.۱ قضیه. فرض کنیم G یک گروه آبلی مقدماتی از مرتبهٔ p^n باشد، در این صورت

$$GL(n,p) \cong \mathrm{Aut}(G).$$

برهان. G را می‌توان به عنوان یک فضای برداری روی $\mathbb{Z}_p$ در نظر گرفت. به‌راحتی دیده می‌شود هر تبدیل خطی ناتکین از G به G یک خودریختی G است و بنابراین حکم ثابت است. □

۱۲.۱.۱ تعریف. گروه G را فرادوری نامیم هرگاه زیرگروهی نرمال و دوری مانند L داشته باشد که $\frac{G}{L}$ نیز دوری باشد.

۱۳.۱.۱ قضیه. اگر G یک گروه فرادوری باشد، و $L \leq G$ و $N \trianglelefteq G$ آنگاه L و $\frac{G}{N}$ فرادوری می‌باشند.

برهان. چون G فرادوری است، لذا شامل زیرگروه نرمالی مانند H می‌باشد، که H و $\frac{G}{H}$، هر دو دوری می‌باشند. بنابراین چون $L \cap H \leq H$، لذا $L \cap H$ دوری است. همچنین چون

$$\frac{L}{L \cap H} \cong \frac{LH}{H} \leq \frac{G}{H},$$

لذا $\frac{L}{L \cap H}$ نیز به عنوان زیرگروهی از $\frac{G}{H}$ دوری می‌باشد.

برای اثبات فرادوری بودن $\frac{G}{N}$ زیرگروه $\frac{NH}{N}$ را در نظر می‌گیریم. به راحتی دیده می‌شود که این زیرگروه خواص مطلوب را داراست. □

۱۴.۱.۱ تعریف. فرض کنیم G یک گروه باشد. در این صورت $M(G)$ را مجموعهٔ همهٔ زیرگروههای ماکسیمال G در نظر خواهیم گرفت.

اشتراک تمام زیرگروههای ماکسیمال G را زیرگروه فراتینی یا Φ- زیرگروه می‌نامیم و آن را با $\Phi(G)$ نمایش می‌دهیم. بنابراین

$$\Phi(G) = \bigcap_{M \in M(G)} M.$$

۱۵.۱.۱ قضیه. فرض کنیم G یک p- گروه و $\Phi = \Phi(G)$. در این صورت،

الف) Φ زیرگروه مشخصه G است.

ب) به‌ازای هر زیرمجموعهٔ G مانند X، اگر $G = \langle X, \Phi \rangle$، آنگاه $G = \langle X \rangle$.

برهان. ([۳۷] و ص. ۹۲).□