
بسم الله الرحمن الرحیم
الحمد لله رب العالمین الرحمن الرحیم مالک یوم الدین
ایاک نعبد و ایاک نستعین اهدنا الصراط المستقیم
صراط الذین انعمت علیهم غیر المغضوب علیهم و لا الضالین

دانشگاه شهید باهنر کرمان

دانشکده ریاضی و کامپیوتر

گروه ریاضی

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض

حلقه های ارزیاب شامل یک دامنه صحیح

استاد راهنما :

دکتر سینا هدایت

مؤلف :

سمیه حاجی رضائی

شهریور ماه ۸۶

دانشگاه شهید باهنر کرمان

این پایان نامه

به عنوان یکی از شرایط احراز کارشناسی ارشد

به

بخش ریاضی – دانشکده ریاضی و کامپیوتر

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود .

دانشجو : سمیه حاجی رضایی

استاد راهنما : دکترسینا هدایت

داور ۱ : دکتر اسفندیار اسلامی

۱۳۸۷ /۲/ ۱۷

داور ۲ : دکتر رضا نکویی

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه : دکتر سید ناصر حسینی

تقدیم بــه

پــدر

و

مــادرم

تقدیر و تشکر

از زحمات استاد دلسوزم جناب آقای دکتر هدایت که در همه مراحل تکمیل این پایان نامه از هیچ راهنمایی وکمکی دریغ ننموده اند کمال تشکر را دارم.

همچنین از پدر و مادر مهربانم که همواره در تحصیل و زندگی مشوق و پشتیبانم بوده و هستند قدردانی می نمایم.

چکیده

فرض کنید R یک دامنه صحیح و

$$P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_n$$

زنجیری از ایده‌ال های اول R باشد. در این پایان نامه ثابت می کنیم:

۱) اگر R نوتری باشد، آنگاه یک توسیع با تولید متناهی T (به عنوان R- جبر) شامل R و

زنجیر اشباع شده

$$Q_0 \subset Q_1 \subset \cdots Q_n$$

از ایده‌ال های اول T وجود دارد به طوری که $Q_i \cap R = P_i$ ، $(1 \le i \le n)$.

همچنین یک حلقه ارزیاب با رتبه n وجود دارد به طوری که اشتراک ایده‌ال های اول آن با R

همان زنجیر

$$P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_n$$

است.

۲) اگر $\{P_\alpha\}$ زنجیره ای دلخواه از ایده‌ال های اول R باشد، آنگاه یک دامنه ارزیاب شامل

زنجیرهٔ ایده‌ال های اول $\{Q_\alpha\}$ وجود دارد به طوری که $Q_\alpha \cap R = P_\alpha$ ، برای هر α .

مقدمه

مسأله یافتن توسیع هایی با ویژگی های خاص از یک حلقه همواره جالب توجه بوده است. به خصوص وقتی حلقه R یک دامنه صحیح باشد، همواره می توان آن را در یک حلقه ارزیاب از میدان کسرهایش، یعنی F نشاند. این مطلب یک نتیجه کلاسیک در نظریه ضربی ایده‌ال‌ها است که ما صورت قوی تری از آن را در فصل سوم اثبات می‌کنیم.

این پایان نامه در چهار فصل تنظیم شده است.در اینجا مفهوم حلقه ارزیاب گسسته با تعریفی که در[3] آمده است، مورد نظر می باشد. فرض کنید V یک حلقه ارزیاب از میدان F باشد. V را حلقه ارزیاب گسسته می‌گوییم هرگاه هر ایده‌ال اولیهٔ V توانی از رادیکالش باشد.

در فصل اول این پایان نامه تعاریفی از نظریه بعد را ، که پیش نیاز فصول آینده است، بیان می‌کنیم. در فصل دوم به بیان پاره ای از خصوصیات حلقه های ارزیاب می پردازیم و نشان می‌دهیم حلقه ارزیاب V نوتری است اگر و تنها اگر یک حلقه ارزیاب گسسته با رتبه یک باشد. همچنین ثابت می کنیم اگر R زیر حلقه ای از میدان F و شامل زنجیر ایده‌ال های اول

$$P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_n$$

باشد، آنگاه حلقه ارزیاب V از F شامل R و زنجیر

$$Q_0 \subset Q_1 \subset \cdots Q_n$$

از ایده‌ال های اول V وجود دارد به طوری که Q_n ایـده‌ال بیـشین V اسـت و $Q_i \cap R = P_i$، بـرای هـر $i = 1,\ldots,n$. در فصل سوم قضیه ای اساسی را که در مرجع [۶] آمـده اسـت بـه تفـصیل شـرح مـی- دهیم. یعنی یک R ‒جبر با تولید متناهی شامل R و همچنین یک حلقه ارزیاب گسسته از رتبـه n پیـدا می‌کنیم که هر یک شامل زنجیری اشباع شده از ایده‌ال های اولند که اشتراک ایـن زنجیـر بـا R همـان زنجیر

$$P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_n$$

از ایده ال های اول R است.

سرانجام فرض کنید R شامل زنجیر $\{P_\alpha\}$ ، به طول دلخواه (نه لزوماً شمارا) از ایده‌ال هـای اول باشـد. در فصل چهارم حلقه ارزیاب V شامل R و زنجیر $\{Q_\alpha\}$ از ایده‌ال های اول V را به گونه‌ای پیـدا مـی- کنیم که $Q_\alpha \cap R = P_\alpha$ ، برای هر α.

فهرست مطالب

عنوان صفحه

فصل اول

تعاریف و پیش نیازها

در این پایان نامه حلقه ها جابجایی و یکدار می‌باشند.

تعریف : فرض کنید R حلقه‌ای ناصفر باشد.

۱) عبارتی چون

$$P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_n$$

که در آن $P_0, \cdots, P_n$ ایده‌ال های اول R هستند، زنجیریده‌ال های اول R نامیده می شود. طول این زنجیر تعداد علامات $\subset$ یعنی یکی کمتر از تعداد ایده‌ال های اول موجود در آن است ($\subset$ نمایش شمول اکید است). لذا طول زنجیر فوق برابر n است.

۲) زنجیر

$$P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_n$$

را اشباع شده می گوئیم اگر به ازای هر $i \in \mathrm{N}$ که $1 \le i \le n$، ایده‌ال اولی چون $Q \in spec(R)$ وجود نداشته باشد به طوری که $P_{i-1} \subset Q \subset P_i$ ؛ یعنی نتوانیم با وارد کردن ایده-ال اول دیگری بین دو جمله مجاور در زنجیر داده شده، زنجیری به طول $n+1$ بسازیم.

۳) بُعد R را برابر

$$\sup \{ n \in N_0 : \text{زنجیری به طول } n \text{ از ایده‌ال های اول } R \text{ وجود داشته باشد} \}$$

تعریف می کنیم، مشروط بر اینکه مجموعهٔ فوق کوچکترین کران بالا داشته باشد و در غیر این صورت آن را ∞ قرار می دهیم. بُعد R را با $\dim R$ نشان می دهیم (منظور از N_0 مجموعه اعداد طبیعی همراه باصفراست).

۴) فرض کنید $P \in spec(R)$. در این صورت ارتفاع P را برابر با کوچکترین کران بالای مجموعهٔ طول های زنجیر های

$$P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_n$$

از ایده‌آل های اول R که در آن ها $P_n = P$ ، تعریف می‌کنیم مشروط بر اینکه این مجموعه کوچکترین کران بالا داشته باشد و در غیر این صورت آن را ∞ قرار می دهیم. ارتفاع P را با $ht(P)$ (و اگر بخواهیم بر حلقهٔ مربوطه تاکید کنیم با $ht_R P$) نشان می دهیم.

مثال ۱-۱ : اگر R یک حلقه آرتینی باشد آنگاه $\dim R = 0$ است، زیرا در این حلقه ها هر ایده‌آل اول بیشین است.□

مثال ۱-۲: بُعد هر میدان برابر صفر است.□

مثال ۱-۳ : برای هر عدد اول p ، $0Z \subset pZ$ زنجیری به طول یک از ایده‌آل های اول حلقه Z است. می‌دانیم هر ایده‌آل اول ناصفر Z بیشین است و لذا نتیجه می شود که زنجیری به طول دو از ایده‌آل های اول Z وجود ندارد. در نتیجه $\dim Z = 1$ است. به طور کلی اگر R یک PID باشد، داریم $\dim R = 1$.□

قضیه ۱-٤ : فرض کنید R یک حلقه نوتری و $S = R[X]$ باشد. اگر $P \in spec(R)$ و $Q = PS$ آنگاه $ht(P) = ht(Q)$ است.

برهان : [۱، گزاره ۸-۳-۳]. □

تعریف : فرض کنید I یک ایده‌آل در حلقه R، P ایده‌آل اولی از R باشد به طوری که $I \subseteq P$ و هیچ ایده‌آل اول دیگری به طور سره بین I و P نباشد. در این صورت P رایک ایده‌آل اول مینیمال I می گوئیم.

حال به بیان یکی از اساسی ترین قضایا در نظریه بُعد می پردازیم.

قضیه ایده‌ال اصلی کرول (۱-۵) :

فرض کنید R حلقه‌ای نوتری و عضو $a \in R$ غیر یکه باشد. فرض کنید P یک ایده‌ال اول مینیمال ایده‌ال اصلی Ra از R باشد. در این صورت $ht(P) \leq 1$ است.

برهان : [۲، قضیه ۱۵-۲].□

تعمیم قضیه ایده‌ال اصلی کرول(۱-۶) :

فرض کنید R حلقه‌ای نوتری و I ایده‌ال سره ای از R باشد که توسط n عضو تولید می شود. در این صورت برای هر ایده‌ال اول مینیمال I چون P، $ht(P) \leq n$ است.

برهان :[۲، قضیه ۱۵-۴].□

تعریف : فرض کنید R زیر حلقه‌ای ازحلقه S و $s \in S$ باشد . گوئیم s روی R صحیح است اگر $h \in N$ و $r_{h-1}, \cdots, r_0 \in R$ وجود داشته باشند به طوری که

$$s^h + r_{h-1}s^{h-1} + \cdots + r_1 s + r_0 = 0 .$$

یعنی s ریشه یک چند جمله ای تکین متعلق به $R[X]$ باشد.

به وضوح هر عضو R روی R صحیح است. همچنین گوئیم S روی R صحیح است اگر هر عضو S روی R صحیح باشد.

تعریف : فرض کنید K زیر میدانی از میدان F و $u \in F$ باشد. گوئیم u روی K جبری است هرگاه یک چند جمله ای مانند $f(X) \in K[X]$ موجود بوده به طوری که $f(u) = 0$ باشد. در غیر این صورت u را روی K متعالی می گوئیم. اگر $f(X)$ تحویل ناپذیر باشد آن را چند جمله‌ای مینیمال u روی K می گوئیم.

تعریف : فرض کنید K زیر میدانی از میدان F باشد. گوئیم F روی K جبری است (یا

F توسیع جبری K است) اگر هر عضو F روی K جبری باشد.

تعریف : فرض کنید K زیر میدانی از میدان F باشد. در این صورت می توان F را به عنوان فضای برداری روی K در نظر گرفت. بُعد این فضا را با $[F:K]$ نمایش داده وآن را درجه F روی K می نامیم. گوئیم F توسیع متناهی از K است (یا F روی K متناهی است) اگر $[F:K]$ متناهی باشد.

تعریف وقضیه ۱-۷ : فرض کنید R زیر حلقه‌ای از حلقه S باشد در این صورت

$$R' := \{ s \in S : \text{صحیح است } R \text{ روی } s \}$$

یک زیر حلقه S است که R را شامل می شود. R' بستار صحیح R در S نام دارد. گوئیم R در S صحیحاً بسته است اگر $R' = R$ باشد.

برهان : [۲، نتیجه و تعریف ۱۳-۲۲].□

گزاره ۱-۸ : فرض کنید R زیر حلقه‌ای از حلقهٔ S و S روی R صحیح باشد. فرض کنید $P_1, P_2 \in spec(S)$ که $P_1 \subseteq P_2$ و $P_1 \cap R = P_2 \cap R = P$. در این صورت $P_1 = P_2$است .

برهان : [۱ ، نتیجه ۴-۲-۲].□

گزاره ۱-۹ : فرض کنید R زیر حلقه‌ای از حلقهٔ S و S روی R صحیح باشد و $P \in spec(R)$. در این صورت ایده‌ال اول P' از S وجود دارد به طوری که $P' \cap R = P$است .

برهان : [۱ ، گزاره ۴-۲-۲].□

قضیه صعود (Going Up Theorem) ۱-۱۰:

فرض کنید R زیر حلقه‌ای ازحلقه S و S روی R صحیح باشد. فرض کنید $m \in N_0$ و $n \in N$ و $m < n$. فرض کنید

$$P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_{n-1} \subset P_n$$

زنجیری از ایده‌ال های اول R و

$$Q_0 \subset Q_1 \subset \cdots \subset Q_{m-1} \subset Q_m$$

زنجیری از ایده‌ال های اول S باشد و به ازای هر i ، $0 \le i \le m$ ، $Q_i \cap R = P_i$. در این صورت زنجیر دوم را می توانیم با ایده‌ال های اولی چون $Q_{m+1}, \cdots, Q_n$ از S گسترش دهیم و زنجیر زیر را بدست آوریم

$$Q_0 \subset Q_1 \subset \cdots \subset Q_{n-1} \subset Q_n$$

به طوری که به ازای هر i ، $0 \le i \le n$ ، $Q_i \cap R = P_i$.

برهان : اگر حکم را در حالت خاص $m = 0$ و $n = 1$ ثابت کنیم، آنگاه حالت کلی با استفاده از استقرا به سهولت اثبات می شود. فرض کنید $f : R \to S$ نگاشت شمول و $g : \frac{R}{P_0} \to \frac{S}{Q_0}$ همریختی یک به یک بدست آمده از f باشد. فرض کنید $\varphi : R \to \frac{R}{P_0}$ و $\psi : S \to \frac{S}{Q_0}$ همریختی های متعارف باشند. توجه کنید $\psi o f = g o \varphi$. به آسانی دیده می شود که روی $\frac{S}{Q_0}$ صحیح است و لذا بنابر گزارهٔ ۱-۹ ، ایده‌ال $Q_1 \in spec(S)$ وجود داردبه طوری که $g^{-1}(\frac{Q_1}{Q_0}) = \frac{P_1}{P_0}$. در این صورت داریم :

$$Q_1 \cap R = f^{-1}(\psi^{-1}(\frac{Q_1}{Q_0})\ ) = \varphi^{-1}(g^{-1}(\frac{Q_1}{Q_0}) = \varphi^{-1}(\frac{P_1}{P_0}) = P_1$$

با این مطلب اثبات کامل می شود.□

قضیه ۱-۱۱ : فرض کنید R زیر حلقه‌ای از حلقه S و S روی R صحیح باشد. در این صورت $\dim R = \dim S$ است.

برهان : فرض کنید $f : R \to S$ نگاشت شمول و I ایده‌الی در S باشد. منظـور از نمـاد I^c ، $I \bigcap R = f^{-1}(I)$ می‌باشد. فرض کنید

$$Q_0 \subset Q_1 \subset \cdots \subset Q_n$$

زنجیری از ایده‌ال های اول S باشد در این صورت

$$Q_0^c \subset Q_1^c \subset \cdots \subset Q_n^c$$

زنجیری ازایده‌ال های اول R است که اکید بودن شمول ها از گزاره ۱-۸ نتیجه می شود. پس $\dim S \leq \dim R$.

حال فرض کنید که

$$P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_n$$

زنجیری از ایده‌ال های اول R باشد. بنابر گزاره ۱-۹ ، ایده‌ال اولی چـون $Q_0 \in spec(S)$ وجـود دارد که $Q_0^c = P_0$. حال از قضیه صعود یعنی ۱-۱۰ ، نتیجه می شود که زنجیری چون

$$Q_0 \subset Q_1 \subset \cdots \subset Q_n$$

از ایده‌ال های اول S وجود دارد و لذا $\dim R \leq \dim S$.□

تعریف : فرض کنید I ایده‌الی از حلـــقه R باشد. در این صورت ارتفاع I را چنین تعریـــف می کنیم :

$$ht(I) = \inf \{ht(P) : P \supseteq I , P \in spec(R)\} .$$

تعریف : فرض کنید K یک حلقه باشد. یک $K-$جبر A حلقه‌ایست که :

۱) $(A,+)$ یک K – مدول یکانی است.

۲) برای هر $k \in K$ و $a,b \in A$ داریم : $k(ab)=(ka)b=a(kb)$.

K – جبر A را با تولید متناهی می‌گوئیم اگر مجموعه $\{a_1,\dots,a_N\} \subseteq A$ وجود داشته باشد به طوری که نگاشت $\varphi : K[X_1,\dots,X_N] \to A$ با ضابطه $\varphi(f(X_1,\dots,X_N)) = f(a_1,\dots,a_N)$ پوشا باشد.

قضیه ۱–۱۲ : فرض کنید S یک مجموعه بسته ضربی و P یک ایده‌ال اول از R باشد به طوری که $S \cap P = \phi$. آنگاه $R_P \cong (R_s)_{P_s}$.

برهان : [۱ ، نتیجه گزاره ۲–۳–۸].□

نتیجه ۱–۱۳ : اگر R یک دامنه صحیح و S یک مجموعه بسته ضربی باشد ، آنگاه میدان کسرهای R_s با میدان کسرهای R یکریخت است.

برهان : در قضیه قبل قرار می دهیم $P=0$.□

قضیه ۱–۱٤ : فرض کنید I ایده‌الی از حلقه R و S یک زیر مجموعه بسته ضربی از R باشد به طوری که $I \cap S = \phi$ و $\pi : R \to \frac{R}{I}$ همریختی طبیعی باشد. در این صورت $\frac{R_s}{I_s} \cong (\frac{R}{I})_{\pi(s)}$.

برهان : [۱، گزاره ۲–۳–۷].□

قضیه ۱–۱۵ : فرض کنید R زیر حلقه‌ای از حلقه S و T زیر مجموعه بسته ضربی از R باشد. اگر R' بستار صحیح R در S باشد، آنگاه R'_T بستار صحیح R_T در S_T است.

برهان : [۱ ، گزاره ۴–۳–۱].□

فصل دوم

حلـقه های ارزیاب

فرض کنید K یک میدان و R زیر حلقه‌ای از K باشد. فرض کنید K^* گروه ضربی از عناصر غیر صفر K باشد. همچنین U مجموعه یکه های R را به عنوان زیر گروهی از K^* در نظر بگیرید. عمل جمع روی گروه خارج قسمتی $G=\frac{K^*}{U}$ را چنین تعریف می‌کنیم: $xU+yU=xyU$ برای هر $yU, xU\in G$. همچنین رابطه "$\leq$" را روی G این طور در نظر می‌گیریم: $xU\leq yU$ اگر و فقط اگر $\frac{y}{x}\in R$. توجه کنید $xU\leq yU$ اگر و فقط اگر Rx به عنوان $R-$ زیر مدولی از K، شامل Ry باشد. به وضوح گزاره های زیر برقرارند:

۱) $Rx\subseteq Rx$، برای هر x در K .

۲) $Rx\subseteq Ry$ و $Ry\subseteq Rx$ نتیجه می دهد $Rx=Ry$، برای هر $x,y\in K$.

۳) $Rx\subseteq Ry$ و $Ry\subseteq Rz$ نتیجه می دهد $Rx\subseteq Rz$، برای هر $x,y,z\in K$.

بنابراین "$\leq$" یک رابطه جزئاً مرتب روی G است. G گروه تقسیمی K نسبت به R نامیده می شود.

قضیه ۲-۱ : فرض کنید R یک دامنه صحیح با میدان کسرهای K و G گروه تقسیمی K نسبت به R باشد. آنگاه گزاره های زیر معادلند:

۱) G کلاً مرتب است.

۲) مجموعه ایده‌ال های R یک مجموعه کلاً مرتب (تحت رابطه شمول) است.

۳) اگر $x\in K-\{0\}$ ، آنگاه $x\in R$ یا $x^{-1}\in R$.

برهان : [۳، قضیه ۱۶-۳].□

قضیه ۲-۲ : فرض کنید K ، R و $G=\frac{K^*}{U}$ مانند بالا باشند. اگر w همریختی طبیعی از K^* به G باشد، آنگاه w خواص زیر را دارد :

۱) $w(xy)=w(x)+w(y)$ ، برای هر $x,y\in K^*$.

۲) اگر $t,x,y\in K^*$ و $x+y\neq 0$ ، آنگاه

$w(t)\leq w(x+y)$ ، برای هر t که $w(t)\leq w(x)$ و $w(t)\leq w(y)$.

۳) $w(1)=0$.

برهان : با توجه به تعاریف واضح است.□

تعریف : فرض کنید K یک میدان و G یک گروه آبلی جمعی کلاً مرتب باشد. رابطه ترتیب روی G را با "$\leq$" نمایش می دهیم. یک ارزیاب روی K نگاشتی مانند $w:K^*\to G$ است که در شرایط زیر صدق می کند :

۱) $w(K^*)=G$.

۲) $w(xy)=w(x)+w(y)$ ، برای هر $x,y\in K$.

۳) $w(x+y)\geq Min\,\{w(x),w(y)\}$ ، برای هر $x,y\in K$.

در ضمن با اضافه کردن عنصری به صورت ∞ به G می توان نگاشت w را به K گسترش داد. به این صورت که $w(0)=\infty$ و برای هر $g\in G$ ، قرار می دهیم

$$g+\infty=\infty+g=\infty+\infty=\infty \quad \text{و} \quad g<\infty .$$

تعریف : زیر حلقه R از میدان K را یک حلقه ارزیاب از K گوئیم هرگاه برای هر $0\neq x\in K$ داشته باشیم $x\in R$ یا $x^{-1}\in R$.