بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضیات و کاربردها

عنوان پایان نامه:

توپولوژی زاریسکی روی طیف $L-$ زیرمدول‌های اول

استاد راهنما:

دکتر احمد یوسفیان دارانی

استاد مشاور:

دکتر نسرین اقبالی

توسط:

سهیلا ابراهیمیان نجف‌آبادی

دانشگاه محقق اردبیلی

تابستان ۱۳۹۱

تقدیم:

ناچیزتر از آن است که تقدیم را شایسته باشد اما به رسم مرسوم تقدیم می‌کنم به پدر و مادر عزیزم، که قلبشان محل معرفت خداوند و وجودشان روشن از عشق است.

اولین و برترین آموزگارانم، که بهترین برایم هستند و بهترین‌ها را برایم ساختند.

دو ستاره درخشان زندگیم که وجود پرمهرشان تکیه‌گاهم و تلألؤ چشمانشان نور امید است.

به عزیزانی که بالاترین ایثارها، عمیق‌ترین دلسوزی‌ها و عظیم‌ترین ظرفیت تحمل و فداکاری را بدون هیچ چشم‌داشتی در سراسر زندگی به من هدیه کردند.

شاید این لحظه نگین کوچکی باشد بر دستان همیشه مهربان شما.

تقدیر و تشکر:

تمام سپاس من از آن کسی است که نیازی به من نداشت و هیچ‌گاه مرا تنها نگذاشت.

مهربان دوست بی‌همتایم را شاکرم که در کوله‌بار من عشق و محبت را گذاشت تا بگذرم، دل را گذاشت که جا دهم و اشک را که همراهی‌ام کند. او که از روی کرم پدر و مادری عاشق، آگاه و فهیم نصیبم ساخته که بودنشان تاج افتخاری است بر سرم.

خدای خوبی که چاره‌ساز من است، عالم است و دوستدار علم و جهان‌بینی که سایه لطف و کرمش بر لحظه لحظه زندگیم افتاد و حرکت را در وجودم جاری کرد، او که یاد و نامش همواره هدایت‌گر راهم شد.

سپاس بیکران پروردگار یکتا را که مرا به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخر نمود و خوشه‌چینی از خرمن دانش را روزیم ساخت.

اکنون که به پاس نعمات بی‌حد معبود، این پروژه به پایان رسید لازم می‌دانم سپاسگذار تمام کسانی باشم که در برابر سختی‌ها و ناملایمات روزگار یاریم کرده‌اند.

از خانواده مهربان و پدر و مادر عزیزم که در همه دوران، پشتوانه و امید من در زندگی هستند، گذر از این راه و فائق آمدن بر مشکلات ممکن نبود مگر به لطف و فداکاری و مهربانیشان، از آن‌ها صمیمانه قدردانی می‌کنم.

انجام و به ثمر رسیدن این پایان‌نامه مرهون زحمات بی‌شائبه و راهنمایی‌های خردمندانه استاد گرامی جناب آقای دکتر احمد یوسفیان دارانی، که همیشه با گفتن جمله موفق باشید، دلگرمی خاصی به من می‌دادند می‌باشد، از ایشان به پاس راهنمایی‌های ارزنده‌شان صمیمانه سپاسگذارم.

از استاد مشاور بزرگوارم سرکار خانم دکتر نسرین اقبالی و داور ارجمندم جناب آقای دکتر حسین عبدلزاده که زحمت بازخوانی پایان‌نامه را بر عهده گرفتند کمال تشکر را دارم.

و از همه دوستان، همکلاسی‌ها و هم‌اتاقی‌های مهربانم که در طول دوره تحصیل همراه من بودند و لحظات شیرینی در کنارشان داشتم قدردانی می‌کنم.

نام خانوادگی: ابراهیمیان نجف‌آبادی **نام:** سهیلا
عنوان پایان نامه : توپولوژی زاریسکی روی طیف $L-$ زیرمدول‌های اول
استاد راهنما: دکتر احمد یوسفیان دارانی
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته:** ریاضی محض **گرایش:** جبر **دانشگاه:** محقق اردبیلی **دانشکده:** علوم ریاضی **تاریخ فارغ التحصیلی:** ۱۳۹۱/۷/۸ **تعداد صفحه:** ۶۴
کلید واژه‌ها : $L-$ زیرمدول‌های اول، طیف اول فازی، $L-$ تاپ مدول
چکیده: مفهوم ریاضیات فازی برای اولین بار توسط لطفی زاده در سال ۱۹۶۵ معرفی گردید. از آن زمان به بعد، بسیاری از ریاضیدانان تلاش‌های خود را جهت ارائه‌ی مفهوم فازی در زمینه‌های مختلف ریاضی، از جمله جبر، آغاز نمودند. امروزه جبر جابجایی فازی طرفداران زیادی در دنیا دارد. در این پایان‌نامه ابتدا مفاهیم اولیه‌ی جبر جابجایی فازی را مطالعه می‌کنیم. سپس زیرمدول‌های اول فازی را مورد مطالعه و بررسی قرار می‌دهیم. همچنین مجموعه‌ی همه‌ی زیرمدول‌های اول فازی یک مدول را مجهز به یک توپولوژی به نام توپولوژی زاریسکی می‌نماییم. در آخر هم طیف زیرابرمدول‌های اول کلاسیک را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

فهرست مندرجات

مقدمه

فرض کنید R یک حلقه‌ی جابجایی یکدار و M یک $R-$ مدول یکانی باشد. طیف اول از یک حلقه‌ی جابجایی یکدار و فضای توپولوژیکی حاصل شده توسط تعریف توپولوژی زاریسکی [۱] روی آن نقش مهمی را در جبر جابجایی، هندسه‌ی جبری و نظریه‌ی شبکه ایفا می‌کند. اخیراً نظریه‌ی زیرمدول‌های اول و توپولوژی زاریسکی روی $Spec(M)$ که مجموعه‌ی تمام زیرمدول‌های اول M می‌باشد، توسط بسیاری از ریاضیدانان مطالعه و بررسی شده است(برای مثال می توانید [۱۱]، [۱۲]، [۱۳] و [۱۵] را ببینید).

اولین بار در سال ۱۹۶۵، مفهوم زیرمجموعه‌ی فازی μ به صورت تابعی از مجموعه‌ی غیرتهی X به بازه‌ی حقیقی $L = [0, 1]$ توسط لطفی زاده [۲] معرفی گردید. گوگوئن [۳] در سال ۱۹۶۷ در تعریف مجموعه‌های فازی یک شبکه‌ی کامل L را با بازه‌ی $[0, 1]$ جایگزین کرد و نظریه‌ی مجموعه‌های $L-$ فازی را ارائه داد. گروه‌های فازی در سال ۱۹۶۷ توسط روزنفلد [۴] معرفی شد، و برای اولین بار زیرمدول‌های فازی توسط نگوئیتا [۵] و رالسکو [۶] در سال ۱۹۷۵ مورد مطالعه قرار گرفت. پن [۷] درسال ۱۹۸۷ مدول‌های تولید شده‌ی فازی و مدول‌های خارج‌قسمتی را معرفی کرد(مقاله‌ی [۲۱] را ببینید).

---

[۱] Zariski topology

[۲] Zadeh

[۳] Goguen

[۴] Rosenfeld

[۵] Negoita

[۶] Ralescu

[۷] Pan

در سال‌های اخیر تحقیقات قابل ملاحظه‌ای در مورد ایده‌آل‌های فازی و ایده‌آل‌های اول فازی انجام شده است. و نیز برخی خواص توپولوژیکی جالب از طیف ایده‌آل‌های اول فازی حلقه‌ی R به دست آمده است(مقالات [۲]، [۴]، [٦]، [۷]، [۸]، [۹]، [۱۰] و [۱۷] را ببینید).

در این پایان نامه یک توپولوژی روی $L-Spec(M)$ (مجموعه همه‌ی $L-$ زیرمدول‌های اول M) که توپولوژی زاریسکی نامیده می‌شود و ویژگی‌های این فضای توپولوژیکی را بررسی می‌کنیم. همچنین رابطه‌ی بین فضاهای توپولوژیکی $L-Spec(M)$ و $L-Spec(R/Ann(M))$ را مطالعه می‌کنیم. و پایه‌ای برای توپولوژی زاریسکی روی $L-Spec(M)$ پیدا می‌کنیم. در پایان طیف زیرابرمدول‌های اول کلاسیک و خواص مقدماتی آن مورد مطالعه قرار گرفته‌اند.

فصل ۱

مقدمات و پیش‌نیازها

در این فصل تعاریف و قضایای اساسی مورد استفاده در فصل‌های آتی بیان می‌شود. این فصل شامل سه بخش می‌باشد. در بخش اول مقدماتی درمورد حلقه‌ها و مدول‌ها بیان می‌گردد. مفاهیم مورد نیاز درمورد زیرمجموعه‌های فازی و ایده‌آل‌های فازی در بخش دوم مطرح می‌شوند و در نهایت به مقدماتی درمورد زیرمدول‌های فازی در بخش سوم پرداخته می‌شود.

قابل ذکر است که در این پایان‌نامه R یک حلقه‌ی جابجایی و یکدار و M یک $R-$ مدول یکانی در نظر گرفته می‌شود مگر آنکه خلاف آن صریحاً ذکر شود.

۱.۱ مقدماتی در مورد حلقه‌ها و مدول‌ها

تعریف ۱.۱. فرض کنید R یک حلقه باشد. ایده‌آل P از R را یک ایده‌آل اول R گوییم هرگاه

۱) P سره باشد.

۲) به ازای هر $x, y \in R$، اگر $xy \in P$ آنگاه $x \in P$ یا $y \in P$.

مجموعه‌ی تمام ایده‌آل‌های اول حلقه‌ی R را با $Spec(R)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲.۱. فرض کنید I ایده‌آلی از حلقه‌ی R باشد. واریته‌ی I راکه با $V(I)$ نمایش می‌دهیم عبارت است از مجموعه‌ی همه‌ی ایده‌آل‌های اول R که شامل I می‌باشند. به عبارت

دیگر:

$$V(I) = \{P \in Spec(R) \mid I \subseteq P\}$$

واضح است اگر I و J ایده‌آل‌هایی از حلقه‌ی R باشند و $I \subseteq J$، آنگاه $V(J) \subseteq V(I)$.

لم ۳.۱ فرض کنید R یک حلقه‌ی جابجایی باشد، آنگاه:

۱) $V(0) = Spec(R)$ و $V(R) = \phi$.

۲) اگر $\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ خانواده‌ای از ایده‌آل‌های R باشد آنگاه،

$$V(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} V(I_\lambda).$$

۳) برای ایده‌آل‌های I و J از R،

$$V(I) \cup V(J) = V(I \cap J).$$

اثبات. ۱) به وضوح $V(0) = Spec(R)$، زیرا هر ایده‌آل اول R شامل صفر می‌باشد.

همین طور چون هر ایده‌آل اول R یک ایده‌آل سره است پس هیچ ایده‌آل اولی شامل R نیست، بنابراین $V(R) = \phi$.

۲) ابتدا ثابت می‌کنیم $V(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda) \subseteq \bigcap_{\lambda\in\Lambda} V(I_\lambda)$. به ازای هر $\lambda \in \Lambda$، $I_\lambda \subseteq \sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$، پس $V(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda) \subseteq V(I_\lambda)$. لذا $V(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda) \subseteq \bigcap_{\lambda\in\Lambda} V(I_\lambda)$.

حال نشان می‌دهیم $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} V(I_\lambda) \subseteq V(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda)$. فرض کنید $P \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} V(I_\lambda)$، بنابراین به ازای هر $\lambda \in \Lambda$، $P \in V(I_\lambda)$ یعنی $I_\lambda \subseteq P$ لذا $\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda \subseteq P$، پس $P \in V(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda)$. بنابراین $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} V(I_\lambda) \subseteq V(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda)$. پس $V(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} V(I_\lambda)$.

۳) می‌دانیم $I \cap J \subseteq I$ و $I \cap J \subseteq J$. پس داریم $V(I) \subseteq V(I \cap J)$ و $V(J) \subseteq V(I \cap J)$. بنابراین $V(I) \cup V(J) \subseteq V(I \cap J)$.

فرض کنید $P \in V(I \cap J)$. چون P اول است و $IJ \subseteq I \cap J \subseteq P$ ، پس $I \subseteq P$ یا $J \subseteq P$. بنابراین $P \in V(I)$ یا $P \in V(J)$ لذا $P \in V(I) \cup V(J)$. پس $V(I \cap J) \subseteq V(I) \cup V(J)$. بنابراین $V(I) \cup V(J) = V(I \cap J)$. ■

فرض کنیدR یک حلقه‌ی جابجایی باشد. قرار می دهیم:

$\zeta(R) = \{V(I) \mid I \trianglelefteq R\}$.

تعریف ۴.۱. بنابر لم ۳.۱، $\zeta(R)$ شامل مجموعه $\varnothing$ و $Spec(R)$ است و تحت اجتماع متناهی و اشتراک گردایه‌ی دلخواه بسته می‌باشد. بنابراین $\zeta(R)$ در اصول مجموعه‌های بسته برای یک توپولوژی روی $Spec(R)$ صدق می‌کند، این توپولوژی را توپولوژی زاریسکی بر روی $Spec(R)$ می‌نامیم.

تعریف ۵.۱. اگر R یک حلقه‌ی جابجایی، M یک $R-$ مدول و N زیرمدولی از M باشد آنگاه $(N :_R M)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(N :_R M) = \{r \in R \mid rM \subseteq N\}$$

واضح است که $(N :_R M)$ ایده‌آلی از R است.

تعریف ۶.۱. اگر M یک $R-$ مدول و N زیرمدولی از M باشد N را زیرمدول اول M می‌نامیم هرگاه

۱) N زیرمدول سره‌ی M باشد.

۲) به ازای هر $r \in R$ و هر $x \in M$، اگر $rx \in N$، آنگاه $r \in (N :_R M)$ یا $x \in N$.

تعریف ۷.۱. اگر M یک $R-$ مدول باشد، مجموعه‌ی همه‌ی زیرمدول‌های اول M را طیف اول M می‌نامیم و با $Spec_R(M)$ نمایش می‌دهیم.

لم ۸.۱ اگر N زیرمدول اول از $R-$ مدول M باشد، آنگاه $P := (N : M)$ یک ایده‌آل اول R است.

اثبات. فرض کنید N یک زیرمدول اول M باشد. نشان می‌دهیم $(N : M)$ یک ایده‌آل اول R است. فرض کنید $x, y \in R$ به‌طوریکه $xy \in (N : M)$ ولی $y \notin (N : M)$. پس $m \in M$ وجود دارد که $(xy)m \in N$ ولی $ym \notin N$. چون N اول است، از $x(ym) \in N$ و $ym \notin N$ نتیجه می‌شود که $x \in (N : M)$. پس $(N : M)$ ایده‌آل اول R است. ■

تعریف ۹.۱. اگر M یک $R-$ مدول و N زیرمدول M باشد، $V(N)$ عبارت است از مجموعه‌ی همه‌ی زیرمدول‌های اول M که شامل N می‌باشند. به عبارت دیگر:

$$V(N) = \{P \in Spec_R(M) \mid N \subseteq P\}.$$

لم ۱۰.۱ فرض کنید M یک $R-$ مدول باشد آنگاه:

۱) $V(0) = Spec_R(M)$ و $V(M) = \varnothing$.

۲) اگر $\{N_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از زیرمدول‌های M باشد آنگاه،

$$\bigcap_{i\in I} V(N_i) = V(\sum_{i\in I} N_i).$$

۳) اگر N و L زیرمدول‌های M باشند آنگاه،

$$V(N) \cup V(L) \subseteq V(N \cap L).$$

اثبات. اثبات مشابه لم ۳.۱ می‌باشد. ■

فرض کنید M یک $R-$ مدول باشد. قرار می‌دهیم:

$$\zeta(M) = \{V(N) \mid N \preceq M\}.$$

تعریف ۱۱.۱. طبق لم ۱۰.۱، $\zeta(M)$ شامل مجموعه‌ی $\varnothing$ و $Spec_R(M)$ می‌باشد و تحت اشتراک گردایه‌ی دلخواه بسته است، ولی تحت اجتماع بسته نمی‌باشد. حال اگر $\zeta(M)$ تحت اجتماع متناهی از زیرمدول‌ها بسته باشد آنگاه $\zeta(M)$ در اصول مجموعه‌های بسته برای یک توپولوژی روی $Spec_R(M)$ صدق می‌کند. توپولوژی مربوطه را با $\tau(M)$ نمایش می‌دهیم و آن را توپولوژی زاریسکی روی $Spec_R(M)$ می‌نامیم.

تعریف ۱۲.۱. M را یک تاپ‌ـ مدول می‌نامیم هرگاه، $\tau(M)$ یک توپولوژی روی $Spec_R(M)$ تشکیل دهد یا به عبارت دیگر برای زیرمدول‌های N و L از M، زیرمدول J موجود باشد به طوری که $V(N) \cup V(L) = V(J)$.

تعریف ۱.۱۳. فرض کنید M یک $R-$ مدول باشد. عنصر $r \in R$ را یک مقسوم‌علیه صفر روی M می‌نامیم هرگاه $0 \neq m \in M$ موجود باشد به طوری که $rm = 0$. مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های صفر روی M را با $Z_R(M)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۱۴. فرض کنید M یک $R-$ مدول باشد، $x \in M$ و $a \in R$. گوییم a در M، x را عاد می‌کند یعنی $a |_M x$، اگر عضوی از M مثل y موجود باشد که $x = ay$.

اگر هر عضو R که مقسوم‌علیه صفر نیست، هر عضو از M را عاد کند می‌گوییم M، $R-$ مدولی بخشپذیر است.

تعریف ۱.۱۵. فرض کنید R یک حوزه صحیح و M یک $R-$ مدول باشد. در اینصورت مجموعه‌ی

$$T(M) = \{m \in M \mid \exists r \in R, r \neq 0, rm = 0\}$$

زیرمدولی از M خواهد بود. اگر $T(M) = M$، آنگاه $R-$ مدول M را تابی گوییم و اگر $T(M) = 0$، دراینصورت M یک $R-$ مدول بی‌تاب یا بدون‌تاب نامیده می‌شود.

تعریف ۱.۱۶. $R-$ مدول M را بی‌اول می‌نامیم، هرگاه $Spec_R(M)$ تهی باشد.

ملاحظه: اگر R یک حلقه‌ی جابجایی و M یک $R-$ مدول بی‌اول باشد، آنگاه M یک تاپ- مدول است.

تعریف ۱.۱۷. فرض کنید R یک حلقه‌ی جابجایی، M یک $R-$ مدول و S زیرمدولی از M باشد. S را زیرمدول نیم‌اول می‌نامیم هرگاه S اشتراکی از زیرمدول‌های اول M باشد.

تعریف ۱.۱۸. اگر M یک $R-$ مدول و K زیرمدول اول M باشد، K را زیرمدول فوق‌العاده می‌نامیم هرگاه برای هر دو زیرمدول نیم‌اول N و L از M، از $N \cap L \subseteq K$ داشته باشیم $N \subseteq K$ یا $L \subseteq K$.

توجه کنید که هر ایده‌آل اول از حلقه‌ی R یک زیرمدول اول فوق‌العاده از $R-$ مدول R می باشد.

تعریف ۱۹.۱. فرض کنید M یک $R-$ مدول و N زیرمدولی از M باشد. رادیکال اول N را با $rad(N)$ نشان می‌دهیم که عبارت است از اشتراک همه‌ی زیرمدول‌های اول M که شامل N می‌باشد به عبارت دیگر $rad(N) = \bigcap_{P\in V(N)} P$. توجه کنید که $N \subseteq rad(N)$ و در مواردی که $V(N) = \varnothing$ داریم $rad(N) = M$، در واقع اگر $rad(N) \neq M$ باشد زیرمدول نیم‌اول است.

لم ۲۰.۱ فرض کنید N زیرمدولی از $R-$ مدول M و $rad(N)$ رادیکال اول N باشد. در اینصورت:

$$.V(N) = V(rad(N))$$

اثبات. می‌دانیم $N \subseteq rad(N)$. در نتیجه طبق تعریف واریته خواهیم داشت $.V(rad(N)) \subseteq V(N)$

فرض کنید $q \in V(N)$. چون $rad(N) = \bigcap_{P\in V(N)} P$ بنابراین $q \subseteq rad(N)$. لذا $q \in V(rad(N))$. پس $V(N) \subseteq V(rad(N))$ و درنتیجه $.V(N) = V(rad(N)$ ■

لم ۲۱.۱ اگر S و T زیرمدول‌هایی از M و $rad(S)$ و $rad(T)$ رادیکال‌های اول S و T باشند، آنگاه

$$.rad(S\cap T) \subseteq rad(S) \cap rad(T)$$

اثبات. از آنجایی که $S \cap T \subseteq S$، بنابراین $rad(S\cap T) \subseteq rad(S)$. و باز $S\cap T \subseteq T$ پس $rad(S\cap T) \subseteq rad(T)$. لذا $.rad(S\cap T) \subseteq rad(S)\cap rad(T)$ ■

لم ۲۲.۱ اگر M یک $R-$ مدول باشد شرایط زیر معادلند:

۱) M یک تاپ‌ـ مدول است.

۲) هر زیرمدول اول ازM، فوق‌العاده است.

۳) به ازای هر زیرمدول نیم‌اول N و L از M داریم:

$$.V(N) \cup V(L) = V(N \cap L)$$

اثبات. اگر M یک $R-$ مدول بی‌اول باشد، اثبات واضح است زیرا $Spec_R(M)$ تهی است.

حال فرض کنید M بی‌اول نباشد.

(۱ $\Leftarrow$۲) فرض کنید K یک زیرمدول اول M و N و L زیرمدول‌های نیم‌اول M باشند به‌طوریکه $N \cap L \subseteq K$. ثابت می‌کنیم $N \subseteq K$ یا $L \subseteq K$. چون M یک تاپ$-$ مدول است پس زیرمدول J از M وجود دارد به‌طوریکه $V(N) \cup V(L) = V(J)$. چون N زیرمدول نیم‌اول است پس $N = \bigcap_{i \in I} K_i$ که در آن هر K_i یک زیرمدول اول است. طبق تعریف واریته‌ی N، به ازای هر $i \in I$، $K_i \in V(N)$. از طرفی $V(N) \subseteq V(J)$، پس $K_i \in V(J)$ و در نتیجه $J \subseteq K_i$. بنابراین $J \subseteq \bigcap_{i \in I} K_i$، پس $J \subseteq N$. به همین روش $J \subseteq L$. پس نتیجه می‌شود $J \subseteq N \cap L$ لذا $V(N \cap L) \subseteq V(J)$ بنابراین $V(N) \cup V(L) \subseteq V(N \cap L) \subseteq V(J) = V(N) \cup V(L)$، پس $V(N) \cup V(L) = V(N \cap L)$.

حال طبق فرض $N \cap L \subseteq K$ بنابراین $K \in V(N \cap L)$ که نتیجه می‌شود $K \in V(N) \cup V(L)$ پس $K \in V(N)$ یا $K \in V(L)$، و این یعنی $N \subseteq K$ یا $L \subseteq K$. که این همان تعریف زیرمدول فوق‌العاده است.

(۳ $\Leftarrow$۲) فرض کنید N و L زیرمدول‌های نیم‌اولند واضح است که $V(N) \cup V(L) \subseteq V(N \cap L)$ زیرا $N \cap L \subseteq N$، که طبق تعریف ۹.۱، $V(N) \subseteq V(N \cap L)$. همین‌طور $N \cap L \subseteq L$ که $V(L) \subseteq V(N \cap L)$ این نتیجه می‌دهد $V(N) \cup V(L) \subseteq V(N \cap L)$.

حال فرض کنید $K \in V(N \cap L)$ بنابراین $N \cap L \subseteq K$. با توجه به فوق‌العاده بودن K، $N \subseteq K$ یا $L \subseteq K$ پس $K \in V(N)$ یا $K \in V(L)$ و لذا $K \in V(N) \cup V(L)$. بنابراین $V(N \cap L) \subseteq V(N) \cup V(L)$. درنتیجه $V(N \cap L) = V(N) \cup V(L)$.

(۱ $\Leftarrow$ ۳) فرض کنید S و T زیرمدول‌های M باشند. اگر $V(S) = \varnothing$ آنگاه $V(S) \cup V(T) = V(T)$ و به همین صورت اگر $V(T) = \varnothing$ پس $V(S) \cup V(T) = V(S)$.

بنابراین فرض کنید $V(S)$ و $V(T)$ غیرتهی باشند. طبق لم ۲۰.۱ خواهیم داشت $V(S) \cup V(T) = V(rad(S)) \cup V(rad(T))$. از آنجایی که $rad(S)$ و $rad(T)$ زیرمدول‌های نیم‌اول هستند پس طبق فرض $V(rad(S)) \cup V(rad(T)) = V(rad(S) \cap rad(T))$. با قرار دادن

$J = rad(S) \cap rad(T)$ نتیجه می‌شود که $V(S) \cup V(T) = V(J)$ که این تاپ− مدول بودن را نتیجه می‌دهد. ∎

۲.۱ مقدماتی درمورد زیرمجموعه‌های فازی و ایده‌آل‌های فازی

تعریف ۲۳.۱. مجموعه‌ی مرتب جزئی $(L, \leq)$ یک شبکه نامیده می‌شود اگر به ازای هر دو عضو $a, b \in L$، مجموعه‌ی $\{a, b\}$ کوچکترین کران بالا و بزرگترین کران پایین داشته باشد. کوچکترین کران بالای این مجموعه را با $a \vee b$ و بزرگترین کران پایین رابا $a \wedge b$ نمایش می‌دهیم. $a \vee b$ را اتحاد و $a \wedge b$ را مقطع می‌نامیم.

تعریف ۲۴.۱. فرض کنید $(L, \leq)$ یک شبکه باشد. L را کامل می نامیم هرگاه هر زیرمجموعه‌ی M از L دارای کوچکترین کران بالا و بزرگترین کران پایین باشد.

قابل ذکر است که در سراسر این پایان نامه L یک شبکه کامل با ۰ و ۱ است که در آن صفر کوچکترین عضو L و یک بزرگترین عضو L می‌باشد.

تعریف ۲۵.۱. فرض کنید X یک مجموعه‌ی غیرتهی و L یک شبکه‌ی کامل باشد. دراینصورت هر تابع از X به L را یک $L-$ زیرمجموعه‌ی X می‌نامیم و مجموعه‌ی تمام $L-$ زیرمجموعه‌های X را با L^X نمایش می‌دهیم و به آن مجموعه‌ی $L-$ توانی X می‌گوییم.

تعریف ۲۶.۱. در تعریف $L-$ زیرمجموعه‌ی X، هرگاه $L = [0, 1]$ در نظر بگیریم، هر $L-$ زیرمجموعه را یک زیرمجموعه‌ی فازی از X می‌نامیم.

تعریف ۲۷.۱. فرض کنید A زیرمجموعه‌ای از X و $y \in L$ باشد. $y_A \in L^X$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$y_A(x) = \begin{cases} y & if \quad x \in A \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

که در حالت خاص اگر $A = \{a\}$، آنگاه $y_{\{a\}}$ را با y_a نمایش می‌دهیم و به آن $L-$ نقطه‌ی X می‌گوییم.

تعریف ۲۸.۱. فرض کنید $\mu, \nu \in L^X$. اگر برای هر $x \in X$، $\mu(x) \leq \nu(x)$، گوییم μ مشمول در ν (یا ν شامل μ) است و می‌نویسیم $\mu \subseteq \nu$.

اگر $\mu \subseteq \nu$ و $\mu \neq \nu$. آنگاه گوییم μ به طور سره مشمول در ν است (یا ν به طور سره شامل μ است) و به صورت $\mu \subset \nu$ می‌نویسیم.

واضح است که $\subseteq$ یک رابطه‌ی ترتیب جزئی روی L^X می‌باشد.

تعریف ۲۹.۱. فرض کنید $\mu \in L^X$ و $a \in L$ باشد. μ_a را که به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mu_a = \{x \in X \mid \mu(x) \geq a\}$$

یک زیرمجموعه‌ی $a-$ تراز می‌نامیم.

به ازای هر $\mu, \nu \in L^X$ روابط زیر را داریم:

۱) به ازای هر $a \in L$، اگر $\mu \subseteq \nu$، آنگاه $\mu_a \subseteq \nu_a$.

۲) به ازای هر $a, b \in L$، اگر $a \leq b$،آنگاه $\mu_b \subseteq \mu_a$.

۳) $\mu = \nu$ اگر و تنها اگر به ازای هر $a \in L$، $\mu_a = \nu_a$.

تعریف ۳۰.۱. فرض کنید μ یک زیرمجموعه‌ی فازی باشد. آنگاه مجموعه‌ی $\{\mu(x) \mid x \in X\}$ را برد μ می‌نامیم و به صورت $Im(\mu)$ یا $\mu(X)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳۱.۱. مجموعه‌ی $\{x \mid x \in X, \mu(x) > ۰\}$ را محمل μ می‌نامیم و با μ^* نشان می‌دهیم.

تعریف ۳۲.۱. اگر $۱ \in \mu(X)$، آنگاه μ یک $L-$ زیرمجموعه‌ی نرمال نامیده می‌شود. μ را $L-$ زیرمجموعه‌ی متناهی نامیم، هرگاه $Im(\mu)$ مجموعه‌ای متناهی باشد، درغیراینصورت μ را $L-$ زیرمجموعه‌ی نامتناهی نامیم.

تعریف ۳۳.۱. فرض کنید $\mu, \nu \in L^X$. در اینصورت $\mu \cup \nu$ و $\mu \cap \nu$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

به ازای هر $x \in X$،

$$(\mu \cup \nu)(x) = \mu(x) \vee \nu(x)$$
$$(\mu \cap \nu)(x) = \mu(x) \wedge \nu(x)$$

که $\mu \cup \nu$ را اجتماع و $\mu \cap \nu$ را اشتراک μ و ν می‌نامیم.

قضیه ۳۴.۱ فرض کنید $\mu \in L^X$ باشد. آنگاه $\mu = \bigcup_{a\in L} a_{\mu_a} = \bigcup_{a\in\mu(X)} a_{\mu_a}$.

اثبات. فرض کنید $x \in X$، طبق تعریف اجتماع و با توجه به تعاریف ۲۷.۱ و ۲۹.۱، خواهیم داشت:

$$\bigcup_{a\in L} a_{\mu_a}(x) = \bigvee_{a\in L} a_{\mu_a}(x) = \bigvee\{a \mid x \in \mu_a\} = \bigvee\{a \in L \mid a \leq \mu(x)\} = \mu(x)$$

بنابراین $\mu = \bigcup_{a\in L} a_{\mu_a}$.

به طور مشابه $\mu = \bigcup_{a\in\mu(X)} a_{\mu_a}$ هم به دست می‌آید، زیرا

$$\bigcup_{a\in\mu(X)} a_{\mu_a}(x) = \bigvee_{a\in\mu(X)} a_{\mu_a}(x) = \bigvee\{a \mid x \in \mu_a\} = \bigvee\{a \in \mu(X) \mid a \leq \mu(x)\} = \mu(x)$$

■

تعریف ۳۵.۱. اگر $f : M \to N$ یک نگاشت، $\mu \in L^M$ و $\nu \in L^N$ باشد آنگاه L− زیرمجموعه‌های $f(\mu) \in L^N$ و $f^{-1}(\nu) \in L^M$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

به ازای هر $y \in N$،

$$f(\mu)(y) = \begin{cases} \vee\{\mu(x) \mid x \in f^{-1}(y)\} & f^{-1}(y) \neq \varnothing \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

و به ازای هر $x \in M$،

$$f^{-1}(\nu)(x) = \nu(f(x))$$

که به ترتیب برد μ تحت f و تصویر معکوس ν تحت f نامیده می‌شوند.

توجه کنید که در این تعریف کوچکترین کران بالای مجموعه‌ی تهی، عضو صفر از L می‌باشد.

تعریف ۳۶.۱. فرض کنید M و N دو $R-$ مدول و $f : M \to N$ یک $R-$ همومورفیسم باشد. $L-$ زیرمجموعه‌ی μ از M را $f-$ پایا گوییم، هرگاه به ازای هر $x, y \in M$ از $f(x) = f(y)$ نتیجه شود $\mu(x) = \mu(y)$.

تعریف ۳۷.۱. فرض کنید R یک حلقه‌ی جابجایی و $\mu \in L^R$ باشد. در اینصورت μ را یک $L-$ ایده‌آل R می‌نامیم هرگاه به ازای هر $x, y \in R$،

۱) $\mu(x-y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$.

۲) $\mu(xy) \geq \mu(x) \vee \mu(y)$.

مجموعه‌ی تمام $L-$ ایده‌آل های حلقه‌ی R را با $LI(R)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۳۸.۱. در تعریف $L-$ ایده‌آل، هرگاه $L = [0, 1]$ آنگاه $L-$ ایده‌آل را یک ایده‌آل فازی گوییم.

مجموعه‌ی همه‌ی ایده‌آل‌های فازی حلقه‌ی R را با $FI(R)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳۹.۱. به ازای هر $\mu \in LI(R)$، قرار می‌دهیم:

$$\mu_* = \{x \in R \mid \mu(x) = \mu(0)\}$$

ملاحظه: فرض کنید $\mu \in L^R$باشد. به ازای هر $x, y \in R$، درحالیکه R حلقه‌ی جابجایی است، $\mu(xy) \geq \mu(x)$ اگر و تنها اگر μ در شرط دوم $L-$ ایده‌آل صدق کند.

تعریف ۴۰.۱. فرض کنید $\mu, \nu \in L^R$. به ازای هر $x \in R$ تعریف می‌کنیم:

۱) $(\mu + \nu)(x) = \bigvee\{\mu(y) \wedge \nu(z) \mid y, z \in R, y + z = x\}$

۲) $(-\mu)(x) = \mu(-x)$

۳) $(\mu - \nu)(x) = \bigvee\{\mu(y) \wedge \nu(z) \mid y, z \in R, y - z = x\}$

۴) $(\mu \circ \nu)(x) = \bigvee\{\mu(y) \wedge \nu(z) \mid y, z \in R, yz = x\}$