دانشکده علوم

پایان نامه کارشناسی ارشد در رشته فیزیک ذرات بنیادی

بررسی جواب های کامپکتون معادلات دیفرانسیل غیرخطی با استفاده از Finite Element Method

توسط:

سمیه اسداللهی زوج

استاد راهنما:

دکتر عزیزالله عزیزی

شهریور ۸۷

بسم الله الرحمن الرحيم

به نام خدا

اظهارنامه

اینجانب **سمیه اسداللهی زوج** دانشجوی رشته **فیزیک** گرایش **ذرات بنیادی** دانشکده **علوم** اظهار می کنم که این پایان نامه حاصل پژوهش خودم بوده و در جاهایی که از منابع دیگران استفاده کرده ام، نشانی دقیق و مشخصات کامل آن را نوشته ام .همچنین اظهارمی کنم که تحقیق و موضوع پایان نام هام تکراری نیست و تعهد می نمایم که بدون مجوز دانشگاه دستاوردهای آن را منتشر ننموده و یا در اختیار غیر قرار ندهم .کلیه حقوق این اثر مطابق با آیین نامه مالکیت فکری و معنوی متعلق به دانشگاه شیراز است.

نام ونام خانوادگی: سمیه اسداللهی زوج

تاریخ و امضا: ۸۸/۷/۲۰

به نام خدا

بررسی جواب های کامپکتون معادلات دیفرانسیل غیرخطی

با استفاده از FEM

به وسیله ی:

سمیه اسدللهی زوج

پایان نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت های

تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته ی:

فیزیک ذرات بنیادی

از دانشگاه شیراز

شیراز

جمهوری اسلامی ایران

ارزیابی شده توسط کمیته پایان نامه با درجه: **عالی**

دکتر عزیزاله عزیزی، استادیار بخش فیزیک (رئیس کمیته)........................

دکتر نعمت اله ریاضی، استاد بخش فیزیک........................

دکتر سید محمد زبرجد، استادیار بخش فیزیک........................

شهریورماه ۱۳۸۷

تقدیم

تقدیم به

همسرم که با صبر و تلاشش در این راه بر من منّت گذاشت.

موفقیت های روز افزونش را از خداوند خواستارم.

سپاسگزاری

با تشکر و سپاس فراوان از استاد گرانقدر جناب آقای دکتر عزیزاله عزیزی که با راهنمایی ها و کمک های فراوان خود، در طول انجام این تحقیق با من همراه بودند و با نهایت دقت و ظرافت، پیشرفت کار را زیر نظر داشتند و همچنین با تشکر از همسرم، جناب آقای اسرار که با پشتکار فراوان خود در به پایان رسیدن این تحقیق سهم به سزایی ایفا کردند.

چکیده

بررسی جواب های کامپکتون معادلات دیفرانسیل غیرخطی با استفاده از Finite Element Method

توسط

سمیه اسداللهی زوج

کامپکتون ها، سالیتون هایی با پهنای محدود هستند. معادلات K(m,n) به ازای مقادیر خاصی از m و n دارای جواب کامپکتون هستند. از جمله این معادلات، معادلات K(۲,۲) و K(۳,۳) است. به دلیل خاصیت شبه ذره ای کامپکتون ها، این امواج بسیار مورد توجه فیزیکدانان قرار گرفته اند. برای بررسی کامپکتون ها، روش های عددی بسیاری وجود دارد. یکی از این روش ها که می توان برای حل این معادلات از آن استفاده کرد، روش المان های محدود است. هرچند که این روش بسیار پیچیده و وقت گیر است، ولی از دقت بسیار بالایی برخوردار است. در این تحقیق با استفاده از روش المان های محدود به بررسی خواص کامپکتون ها پرداخته ایم.

فهرست مطالب

فهرست شکل ها

فصل ۱

مقدمه

به دلیل پیچیده بودن معادلات غیرخطی و کاربرد بسیار زیاد این معادلات در فیزیک، فیزیک دانان همواره به دنبال راه های مختلفی هستند تا به جواب دقیق تری برای این معادلات دست یابند. از جمله معادلات غیرخطی که در فیزیک زیاد مورد مطالعه قرار گرفته اند، معادلات ساین گوردون[۱]، شرودینگر غیرخطی[۲] و معادله KdV است.

بسیاری از پدیده های پویا و غیرپویای طبیعت اطراف ما دارای گستره محدودی هستند. جواب بیشتر معادلات پاشندگی خطی و غیرخطی ضعیف که در بررسی امواج منزوی[۳] به کار می روند، از جمله معادله KdV، اگرچه جایگزیده هستند، اما دارای پهنای نامحدودند. سالیتون[۴] یک موج منزوی رونده است که بعد از برخورد با سالیتون دیگر بدون هیچ تغییر شکلی از آن عبور می کند[۱].

۱ Sine-Gordon
۲ Nonlinear Schrodinger equation
۳ Solitary waves
۴ Soliton

بنابراین دستاوردهای اخیر در مورد جواب های کامپکتونی[۵] معادلات غیرخطی و پاشنده K(m,n)، در بررسی اثر پاشندگی غیرخطی بر ساختار پدیده ها حائز اهمیت هستند چرا که این امواج دارای پهنای محدودی هستند[۱]

برخلاف سالیتون ها که تا بی نهایت گسترده اند، کامپکتون ها دارای پهنای محدودی هستند. سرعت کامپکتون ها مانند سالیتون ها به ارتفاع آنها بستگی دارد ولی برخلاف سالیتون ها پهنای کامپکتون ها مستقل از سرعت آنهاست. کامپکتون ها دارای خواص سالیتونی بارزی هستند از جمله اینکه برخوردشان الاستیک است ولی برخلاف سالیتون ها که برخوردشان در یک سیستم انتگرال پذیر رخ می دهد، در نقطه برخورد کامپکتون ها جفت هایی از کامپکتون- آنتی کامپکتون های کم دامنه تولید می شود که نشان دهنده انتگرال ناپذیر بودن دسته معادلات K(m,n) است. علت همزمانی این دو خصوصیت، انتگرال ناپذیری و الاستیک بودن برخوردها هنوز در پرده ای از ابهام به سر می برد[۲].

بررسی جواب های این معادلات بیشتر به روش های عددی صورت می گیرد به همین منظور بر آن شدیم تا از روش اجزای محدود[۶] برای حل برخی از این معادلات استفاده کنیم. درست است که روش انتخابی ما بسیار پیچیده است، ولی از دقت بالایی برخوردار است. این تحقیق در شش فصل تنظیم شده است.

در فصل دوم، راجع به معادلات دیفرانسیل غیرخطی و دستگاه معادلات دیفرانسیل توضیح مختصری آورده ایم. همچنین درباره خصوصیات آنها مواردی را ذکر کرده ایم.

در فصل سوم، نگاهی داریم به چگونگی پیدایش و نامگذاری امواج منزوی، سالیتون ها و کامپکتون ها. دلیل این نامگذاری را بیان کرده و خصوصیات بارز این امواج را بیان می کنیم. همچنین به بیان برخی از کاربردهای سالیتون ها می پردازیم. در ادامه فصل به بررسی جواب های معادلات مربوط به سالیتون ها و کامپکتون ها، به روش تحلیلی پرداخته و برای به دست آوردن جواب این معادلات غیرخطی، نتایج استفاده از چند روش عددی را با یکدیگر مقایسه کرده ایم.

[۵] Compacton
[۶] Finite Element

در فصل چهارم، به طور کامل روش انتخابی خود یعنی روش اجزای محدود را توضیح داده و با ذکر چند مثال، چگونگی استفاده از این روش را در حل معادلات دیفرانسیل خطی و غیرخطی، به طور جداگانه بررسی کرده ایم. در قسمت آخر این فصل نیز توضیحاتی راجع به کاربرد این روش در زمینه معادلات وابسته به زمان بیان کرده ایم.

در فصل پنجم، به بیان جزئیات حل معادلات غیرخطی و وابسته به زمان KdV، K(۲,۲) و K(۳,۳) با استفاده از روش اجزای محدود پرداخته ایم. همچنین در این فصل با استفاده از این روش خصوصیات سالیتون ها و کامپکتون ها را مورد بررسی قرار داده ایم و نتایج به دست آمده را که تا حد بسیار زیادی با جواب های تئوری سازگار بود، در قالب نمودار نشان دادیم. در قسمت دیگر این فصل برخورد سالیتون ها و کامپکتون ها را نیز مورد تحلیل و بررسی قرا داده ایم.

در فصل ششم به ذکر تفاوت میان روش اجزای محدود با روش فواصل محدود[۷] پرداخته و همچنین مزیت ها و معایب این روش را بازگو کرده ایم. در ادامه نیز پیشنهاداتی را که به برای استفاده هرچه بهتر و گسترده تر از این روش مثمرثمر به نظر می رسید، مطرح کرده ایم.

---

[۷] Finite difference

فصل ۲

معادلات غیرخطی

۱-۲ سیستم های غیرخطی

در ریاضیات سیستم غیرخطی به سیستمی اتلاق می شود که از اصل برهم نهی[۸] تبعیت نکند. با دقت کمتر، سیستم غیر خطی سیستمی است که متغیرهای آن سیستم را نمی توان به صورت جمع خطی از مؤ لفه های مستقل از هم نوشت.

معادلات غیرخطی به راحتی قابل پاسخ گویی نیستند و نتیجه آنها بیشتر باعث پدید آمدن یک سری هرج و مرج و بی نظمی است. از جمله سیستم های غیرخطی را که می توان در طبیعت نام برد وضع هواست، که یک تغییر کوچک در یک قسمت، تأثیرات پیچیده ای را در جای دیگر باعث می شود[۳].

در ریاضیات اگر تابع $f(x)$ خطی باشد، باید از هر دو شرط زیر تبعیت کند:

۱) خاصیت جمع پذیری:

[۸] Superposition principle

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad (۱-۲)$$

۲) خاصیت همگنی:

$$f(\alpha x) = \alpha f(x) \qquad (۲-۲)$$

اگر رابطه ای به صورت $f(x) = C$ داشته باشیم که $f(x)$ از شرایط فوق تبعیت کند، یک رابطه خطی داریم، در غیر این صورت رابطه ما غیر خطی است.

در حالت کلی، معادلات غیرخطی معمولاً به طور دقیق قابل حل نیستند و در این حالت می توان از روش های عددی و یا از روش های کیفی برای حل آن استفاده کرد.

۲-۲ معادلات دیفرانسیل غیرخطی

مسائلی که شامل معادلات دیفرانسیل غیرخطی هستند تا حدودی متنوع اند و روش حل آن ها، بسیار به خود مسئله وابسته است. یکی از بزرگ ترین مشکلات این نوع مسائل این است که نمی توان با ترکیبی از جواب های شناخته شده جواب کل مسئله را یافت. به طور مثال در مسائل خطی می توانیم با استفاده از اصل برهم نهی و یک سری از جواب های مستقل، به هر جواب دیگری برسیم. البته در برخی موارد ممکن است بتوان جواب های خاصی برای معادلات دیفرانسیل غیرخطی یافت، ولی نمی توان برای این معادلات از اصل برهم نهی استفاده کرد. معادلات دیفرانسیل غیرخطی به دو دسته ی معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی و معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی تقسیم می شود. دسته اول در زمینه کار ما نیست و توجه ما بیشتر به معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی معطوف می شود[۳].

۲-۲-۱ معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی

معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول، معمولاً با استفاده از روش جداسازی متغیرها قابل حل است. به غیر از برخی از معادلات دیفرانسیل غیرخطی مثل معادله زیر:

$$\frac{du}{dx} = -u^{۲} \qquad (۳-۲)$$

جواب عمومی این معادله $u = (x + c)^{-۱}$ است. معادله فوق یک معادله دیفرانسیل غیرخطی است زیرا می توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$\frac{du}{dx} + u^{۲} = ۰ \qquad (۴-۲)$$

که طرف چپ این معادله تابع خطی از u نیست. اگر $u^{۲}$ را با u جایگذاری کنیم، معادله خطی خواهد بود که جواب آن تابع exp است.

معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم و بالاتر که عموماً معادلات غیرخطی را شامل می شود، به ندرت دارای جواب های صریح هستند بلکه جواب های این معادلات معمولاً با استفاده از انتگرال های نامتعارف به دست می آیند که روش های عددی بهترین کارآیی را در حل این معادلات دارند.

روش های متعارفی که برای آنالیز معادلات دیفرانسیل غیرخطی استفاده می شوند، مراحل زیر را شامل می شوند[۳]:

۱- بررسی کمیت های پایا، مخصوصاً در سیستم های هامیلتونی
۲- بررسی کمیت های ناپایا در مقایسه با کمیت های پایا
۳- خطی سازی به وسیله بسط تیلور
۴- تغییر متغیرها به متغیرهای ساده تر
۵- استفاده از تئوری اختلال

۲-۲-۲ معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی

یکی از روش های متداول برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی غیر خطی، تغییر متغیر است. در اغلب موارد، با این کار مسئله ما ساده تر شده و حتی در بعضی موارد معادله ما به یک معادله خطی تبدیل می شود. گاهی اوقات نیز یک معادله دیفرانسیل جزئی غیرخطی به چند معادله معمولی غیرخطی تبدیل می شود که راحت تر حل می شود.

یک روش متداول دیگر (که در ریاضیات کمتر از روش قبل مورد استفاده قرار می گیرد) و بیشتر در مکانیک سیالات و گرما استفاده می شود، آنالیز مقیاسی است. این روش با ساده سازی معادلات عمومی در یک مقدار مرزی مشخص، معادلات را قابل حل می کند[۳]. روش های دیگری که می توان برای حل چنین معادلاتی به کار برد، همگی از روش های حل عددی است که در فصل های بعد، به نمونه ای از آن خواهیم پرداخت.

فصل ۳

نگاهی به امواج منزوی، سالیتون ها و کامپکتون ها

۳-۱ چگونگی پیدایش امواج منزوی

امواج منزوی هیدرودینامیک، از زمان های بسیار دور در خلیج های تنگ و شاخه های باریک دریا، رخ می داد ولی هیچ کس به آن توجهی نداشت. تا این که در سال ۱۸۳۴ یک مهندس اسکاتلندی به نام جان اسکات راسل[۹] با یک اتفاق مواجه شد. در آن سال او به انجام یک سری آزمایشات پرداخته بود و می خواست رابطه بین سرعت قایق ها و نیروی جلو برنده آن ها را پیدا کند. در آن زمان در انگلستان، اسب ها قایق ها را در طول کانال می کشیدند. هدف او از انجام این آزمایشات این بود که بتواند به طرحی برای تبدیل نیروی اسب ها به نیروی بخار دست یابد تا شاید بتوان به جای قایق و کانال، از راه آهن برای جابه جایی مردم استفاده کرد[۴].

در یکی از روزهای تابستان که او مشغول آزمایش بود، ناگهان طناب یکی از قایق ها و دستگاه اندازه گیری از هم جدا شد و قایق از حرکت ایستاد ولی مقدار آبی که در کانال بود و در حال حرکت بود، از حرکت نایستاد. این مقدار آب به صورت یک آشفتگی در اطراف قایق جمع شد و

[۹] John Scott Russell