بسم الله الرحمن الرحیم

بسمه تعالی

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی

تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد

اعضای هیأت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامه **خانم مرضیه بختیاری** رشته ریاضی‌محض به شماره دانشجویی ۸۸۵۲۶۵۱۰۱۸ تحت عنوان: «**مقدمه‌ای بر خمینه‌های شبه ریمانی سایا**» را از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آن را برای اخذ درجهٔ کارشناسی‌ارشد مورد تأیید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام‌خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر عباس حیدری	استادیار	
۲- استاد ناظر داخلی	دکتر سیدمسعود امینی	دانشیار	
۳- استاد ناظر داخلی	دکتر سیدمحمدباقر کاشانی	استاد	
۴- استاد ناظر خارجی	دکتر ناصر بروجردیان	دانشیار	
۵- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر سیدمحمدباقر کاشانی	استاد	

آیین نامه چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه،دانش آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

ماده ۱: در صورت اقدام به چاپ پایان نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اطلاع دهد.

ماده ۲: در صفحه سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه) عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان نامه کارشناسی ارشد/ رساله دکتری نگارنده در رشته ریاضی محض است که در سال ۹۰ در دانشکده علوم ریاضی دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی سرکار خانم/جناب آقای دکتر عباس حیدری ، مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر — و مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر از آن دفاع شده است.»

ماده ۳: به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت‌چاپ) را به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر درمعرض فروش قرار دهد.

ماده ۴: در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت‌مدرس، تأدیه کند.

ماده ۵: دانشجو تعهد و قبول می کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در ماده ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه شده نگارنده برای فروش، تامین نماید.

ماده ۶: اینجانب مرشد بختیاری دانشجوی رشته ریاضی محض مقطع کارشناسی ارشد تعهد فوق وضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می شوم.

نام و نام خانوادگی: مرشد بختیاری

تاریخ و امضا: ۹۱/۱/۲۲

آیین‌نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه: با عنایت به سیاست‌های پژوهشی و فناوری دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیأت علمی، دانشجویان، دانش‌آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد زیر را رعایت نمایند:

ماده ۱- حق نشر و تکثیر پایان نامه/ رساله و درآمدهای حاصل از آنها متعلق به دانشگاه می باشد ولی حقوق معنوی پدید آورندگان محفوظ خواهد بود.

ماده ۲- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و با تایید استاد راهنمای اصلی، یکی از اساتید راهنما، مشاور و یا دانشجو مسئول مکاتبات مقاله باشد. ولی مسئولیت علمی مقاله مستخرج از پایان نامه و رساله به عهده اساتید راهنما و دانشجو می باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳- انتشار کتاب، نرم افزار و یا آثار ویژه (اثری هنری مانند فیلم، عکس، نقاشی و نمایشنامه) حاصل از نتایج پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی کلیه واحدهای دانشگاه اعم از دانشکده ها، مراکز تحقیقاتی، پژوهشکده ها، پارک علم و فناوری و دیگر واحدها باید با مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و براساس آئین نامه های مصوب انجام شود.

ماده ٤- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه یافته ها در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق معاونت پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ٥- این آیین‌نامه در ٥ ماده و یک تبصره در تاریخ ۸۷/٤/۱ در شورای پژوهشی و در تاریخ ۸۷/٤/۲۳ در هیأت رئیسه دانشگاه به تایید رسید و در جلسه مورخ ۸۷/۷/۱۵ شورای دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب در شورای دانشگاه لازم‌الاجرا است.

«اینجانب مرضیه [illegible] دانشجوی رشته ریاضی محض ورودی سال تحصیلی ۸۸ مقطع کارشناسی ارشد دانشکده علوم ریاضی متعهد می شوم کلیه نکات مندرج در آئین نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهش های علمی دانشگاه تربیت مدرس را در انتشار یافته های علمی مستخرج از پایان نامه / رساله تحصیلی خود رعایت نمایم. در صورت تخلف از مفاد آئین نامه فوق الاشعار به دانشگاه وکالت و نمایندگی می دهم که از طرف اینجانب نسبت به لغو امتیاز اختراع بنام بنده و یا هر گونه امتیاز دیگر و تغییر آن به نام دانشگاه اقدام نماید. ضمناً نسبت به جبران فوری ضرر و زیان حاصله بر اساس برآورد دانشگاه اقدام خواهم نمود و بدینوسیله حق هر گونه اعتراض را از خود سلب نمودم»

امضا:

تاریخ: ۹۱/۱/۲۲

دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه برای دریافت درجه

کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض

عنوان:

مقدمه ای بر خمینه های شبه ریمانی سایا

نگارش:

مرضیه بختیاری

استاد راهنما:

دکتر عباس حیدری

بهمن ۱۳۹۰

به نظر می‌رسد معمار بزرگ جهان ریاضیدان است. (هیلبرت)

تقدیر و تشکر

با سپاس از خانواده‌ام که محیط آرامی را برایم فراهم کردند.
تقدیر و تشکر از استاد ارجمند و گرامی جناب دکتر عباس حیدری که همواره با راهنمایی‌ها و رهنمودهای ارزنده خود مرا یاری نمودند. با سپاس از تنها دوستم خانم مریم طهرانی،
و با سپاس از کسی که قلب مهربانش همواره مشوق من بود.

مرضیه بختیاری
بهمن ۱۳۹۰

چکیده

این نوشته مطالعه‌ای اصولی از ساختارهای سایا با متر شبه‌ریمانی با تاکید بر شباهت و تفاوت‌های آن با متر ریمانی خواهد داشت. به‌خصوص مطالعه خواهد شد که هیچ خمینه شبه‌ریمانی سایای تخت از بعد بزرگ‌تر از ۵ وجود ندارد. خمینه‌های ریمانی با خمیدگی ثابت، خمینه‌های سه بعدی موضعاً متقارن با خمیدگی برشی ثابت و خمینه‌های سه بعدی همگن لورنتزی سایا طبقه‌بندی خواهند شد.

کلید واژه: خمینه سایا،خمینه ساساکی، متر شبه‌ریمانی، متر لورنتزی، خمیدگی، تانسور ریچی، موضعاً متقارن، همگن، خمینه‌های سه بعدی شبه‌ریمانی سایا.

فهرست مطالب

مقدمه

در این پایان نامه مطالعه ای اصولی از ساختارهای سایا همرا با متریک شبه ریمانی داده می شود. خمینه‌های شبه‌ریمانی سایا با خمیدگی برشی ثابت، خمینه‌های شبه‌ریمانی سایای موضعاً متقارن ۳-بعدی و همچنین خمینه‌های لورنتزی سایای همگن ۳-بعدی رده‌بندی می‌شوند. یک ساختار شبه‌ریمانی سایا گسترشی طبیعی از یک ساختار ریمانی سایا است. ساختارهای سایای مجهز شده با متریک شبه‌ریمانی اولین بار توسط تاکاهاشی مطالعه شدندکه روی مترهای ساساکی تمرکز کرد. ثابت خواهد شد که خمینه شبه‌ریمانی سایای تخت با بعد بزرگتر از ۵ وجود ندارد. همچنین خمینه‌های شبه‌ریمانی سایای موضعاً متقارن ۳-بعدی و خمینه‌های لورنتزی سایای همگن ۳-بعدی رده‌بندی می شود.افزون بر آن، نشان داده می شود. گروه $SU(2)$ تنها خمینه ۳-بعدی ساده همبندی است که متریک لورنتزی سایای همگن با خمیدگی اسکالری می‌پذیرد. مرجع اصلی این پایان‌نامه [۳] می‌باشد .

فصل ۱

پیش نیازها

برای درک بهتر فصل های آینده، در این فصل به بیان مفاهیم و تعاریف اولیه می‌پردازیم.

۱.۱ تعریف ها

تعریف ۱.۱.۱ ($Nijenhuis$). [۱۷] فرض کنیم J یک تانسور $(1,1)$ روی خمینه‌ی M باشد آنگاه تانسور $Nijenhuis$ آن عبارت است از:

$$[J,J]=(X,Y)=J^2[X,Y]+[JX,JY]-J[JX,Y]-J[X,JY] \qquad (۱.۱)$$

تعریف ۲.۱.۱ (هموستار). [۱۲] هموستار Dبرخمینه‌ی هموار M نگاشت

$$D:\chi(M)\times\chi(M)\longrightarrow\chi(M)$$

$$X,Y\in\chi(M)$$

است، چنان که:

۱ D_VW نسبت به V، $C^\infty(M)$ است.

۲ D_VW نسبت به W، R خطی است.

۳ $D_V(fW)=(Vf)W+fD_V(W)$ برای $f\in C^\infty(M)$.

تعریف ۳.۱.۱ (هموستار لوی چویتا). [۱۲] بر خمینه شبه‌ریمانی (M,g) یک هموستار یگانه هست که برای هر $X,Y,V,W\in\chi(M)$

۱ $[V,W]=D_VW-D_WV$

۲ $X\langle V,W\rangle = \langle D_XV,W\rangle + \langle V,D_XW\rangle$ و آن را هموستار لوی چویتای M نامند.

تعریف ۴.۱.۱ (تانسور خمیدگی ریمانی). [۱۲] فرض کنیم M خمینه شبه‌ریمانی با هموستار لوی چویتای D باشد. نگاشت

$$R : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$
$$R_{XY}Z = D_{[X,Y]}Z - [D_X, D_Y]Z$$

که یک تانسور (۱،۳) است تانسور خمیدگی ریمانی نامیده می‌شود.

از این به بعد (M,g) یک خمینه شبه‌ریمانی است.

تعریف ۵.۱.۱ (صفحه ی ناتبهگون). [۱۲]

زیر فضای دوبعدی π از فضای مماس $T_p(M)$ را یک صفحه ی مماس بر M در نقطه ی p نامند.صفحه ی π را ناتبهگون نامند اگر و تنها اگر برای یک کنج v,w داشته باشیم $\varrho(v,w) \neq 0$ که $\varrho(v,w) = \langle v,v\rangle\langle w,w\rangle - \langle v,w\rangle^2$.

تعریف ۶.۱.۱ (خمیدگی برشی). [۱۲] فرض کنیم π صفحه ی ناتبهگون مماس بر M در نقطه ی p باشد. عدد $K(v,w) = \langle R_{vw}v,w\rangle/\varrho(v,w)$ را که مستقل از انتخاب v,wاست خمیدگی برشی نامند.

تعریف ۷.۱.۱ (ساختار تقریباً مختلط). [۱۷]

فرض کنیم Mیک خمینه‌ی هموار باشد، میدان تانسوریJ از نوع $(1,1)$ Jیک ساختار تقریباً مختلط روی Mاست هرگاه $J^2 = -Id$.

تعریف ۸.۱.۱ (خمینه‌ی تقریباً مختلط). خمینه‌ی هموار Mهمراه با ساختار تقریباً مختلط J را خمینه‌ی تقریباً مختلط می‌نامند

تبصره ۹.۱.۱. بعد هرخمینه‌ی تقریباً مختلط با بعد زوج می‌باشد.

تعریف ۱۰.۱.۱ (توزیع). فرض کنیم M یک خمینه از بعد m باشد.یک توزیع K بعدی D روی Mیک انتخاب از زیر فضای K بعدی $D(x)$ از $T_x(M)$ است که برای هر $x \in M$ همسایگی U از x هست که میدان های برداری مستقل خطی $X_1, ..., X_k$ وجود دارند که کنج ای برای $D(y)$ به ازای هر $y \in U$ می‌باشند.

تعریف ۱۱.۱.۱ (ساختارتقریباً سایا). [۱] یک ساختار تقریباً سایا روی یک خمینه‌ی $(1+2n)$ -بعدی هموار مانند M عبارت است از سه تایی (φ,ξ,η) که φ یک میدان تانسوری از نوع $(1,1)$و $\xi \in \chi(M)$ یک میدان

بردار سراسری می‌باشد و η یک ۱-فرم است که

$$\varphi(\xi) = 0, \quad \eta \circ \varphi = 0,$$
$$\eta(\xi) = 1, \quad \varphi^2 = Id + \eta \otimes \xi \tag{۲.۱}$$

به ξمیدان برداری مشخصه و به $ker\eta$ توزیع سایا می‌گویند.

تعریف ۱۲.۱.۱ (یک متریک سازگار). [۱] متریک شبه‌ریمانی g روی خمینه‌ی Mرا با ساختار تقریباً سایای (φ, ξ, η) سازگار می‌گویند هرگاه

$$g(\varphi(X), \varphi(Y)) = g(X, Y) - \varepsilon\eta(X)\eta(Y)$$
$$\varepsilon = g(\xi, \xi) \tag{۳.۱}$$

تعریف ۱۳.۱.۱ (خمینه شبه‌ریمانی تقریباً سایا). [۱] خمینه‌ی هموار Mهمراه با ساختار تقریباً سایای (φ, ξ, η)و متریک شبه‌ریمانی سازگار gرا خمینه‌ی شبه‌ریمانی تقریباً سایا نامند.

تبصره ۱۴.۱.۱. با توجه به رابطه ی (۲.۱) و (۳.۱)،برای هر متریک سازگار g داریم

$$\eta(X) = \varepsilon g(\xi, X)$$

بنابر این، میدان برداری مشخصه ی ξ می‌تواند زمان گون یا فضاگون باشد، ولی نورگون نیست.

تعریف ۱۵.۱.۱ (خمینه شبه‌ریمانی سایا). [۱] اگر برای متریک شبه‌ریمانی g روی خمینه‌ی M رابطه ی

$$g(X, \varphi(Y)) = (d\eta)(X, Y) \tag{۴.۱}$$

درست باشد آنگاه η فرم سایا و ξ میدان برداری ریب و M خمینه شبه‌ریمانی سایا نامیده می‌شود.

تبصره ۱۶.۱.۱. با توجه به (۳.۱) به آسانی می‌توان بدست آورد که $g(\varphi(X), Y) = -g(X, \varphi(Y))$

تعریف ۱۷.۱.۱. ساختار تقریباً مختلط روی $M^{2n+1} \times \mathbb{R}$

با بهره گیری از مبحث مطرح شده در فصل ششم [۳] هر خمینه‌ی $M^{2n+1} \times \mathbb{R}$ یک ساختار مختلط می‌پذیرد. اگر $(X, f\frac{d}{dt})$ یک میدان برداری دلخواه از خمینه باشند، آنگاه عملکرد ساختار تقریباً مختلط روی این میدان برداری بدین صورت می‌باشد

$$J(X, f\tfrac{d}{dt}) = (\varphi(X) - f\xi, \eta(X)\tfrac{d}{dt})$$

تعریف ۱۸.۱.۱ (ساختار تقریباً سایای نرمال). [۳] ساختار تقریباً سایا ی (φ, ξ, η)را نرمال گویند هرگاه ساختار تقریباً سایای Jگفته شده انتگرال پذیر باشد.

تعریف ۱۹.۱.۱ (خمینه های ساساکی و Kسایا). [۱] خمینه‌ی شبه‌ریمانی سایای (M, η, g):

۱)ساساکی است هرگاه نرمال باشد.

۲)K سایا است اگر ξ میدان برداری کیلینگ باشد.

فصل ۲

خمینه های سایا و تقریباً سایا

۱.۲ خمینه های سایا و تقریباً سایا

پس از مطالعه ی مفاهیم گفته شده در فصل قبل این فصل را با چند مثال از خمینه های سایا شروع می‌کنیم.در تمامی

مثال ۱.۱.۲. خمینه ریمانی $\mathbb{R}^{2n+1}$

نقشه داربو $(x^1, x^2, ..., x^n, y^1, y^2, ..., y^n, z)$ از $\mathbb{R}^{2n+1}$ را می‌گیریم. فرم داربو

$$\eta = dz - \sum_{i=1}^{n} y^i dx^i$$

و $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ نشان میدهد که خمینه سایاست و بردار مشخصه (ریب) آن نیز $\xi = \dfrac{\partial}{\partial z}$ و توزیع سایای آن عبارت است از $\{X_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i} + y^i \dfrac{\partial}{\partial z}, \qquad X_{n+i} = \dfrac{\partial}{\partial y^i}. \ \ i = 1, 2, ..., n\}$

مثال ۲.۱.۲. $\mathbb{S}^{2n+1}_{2s}$ فرض کنیم $b^{n+1}_s(u, v)$ یک ضرب داخلی روی $\mathbb{C}^{n+1}$باشد که چنین تعریف می‌شود

$$b^{n+1}_s(u, v) = Re(-\sum_{i=1}^{s} u_i \bar{v}_i + \sum_{j=s+1}^{n+1} u_j \bar{v}_j)$$

فرض کنیم $\tilde{g} = g^{2n+1}_{2s}$ متریک شبه‌ریمانی$\mathbb{C}^{n+1}$(در واقع انتقال موازی b^{n+1}_s) و J ساختار مختلط روی آن باشد.

برای $n \geq 0$ و $0 \leq s \leq n$ فرض کنیم $M = \mathbb{S}^{2n+1}_{2s}$ ابر کره ی $\mathbb{C}^{n+1}$ باشد که به شکل زیر تعریف می‌شود

$$\mathbb{S}^{2n+1}_{2s} = \{u \in \mathbb{C}^{n+1} \ \ ; \ b^{n+1}_s(u, u) = 1\}$$

فرض کنیم $g = \tilde{g}|_{\mathbb{S}^{2n+1}_{2s}}$.آنگاه (M, g)یک خمینه‌ی شبه‌ریمانی با خمیدگی ثابت ۱ از بعد $2n + 1$ و علامت $2s$ می‌باشد. برای $x \in M$ فضای مماس M درxعبارت است از

$$T_x(M) = \{X \in T_x(\mathbb{C}^{n+1}) \ \ ; \tilde{g}(X, x) = 0\}$$

کهx بردار مکان است. فرض کنیم ξ میدان برداری روی M با تعریف

$$\xi : x \in M \longrightarrow \xi_x = Jx$$

است. با انتقال موازی، Jx بردار مماس $\mathbb{C}^{n+1}$ نیز هست. با بهره‌گیری از پادتقارنی J نسبت به $\tilde{g}$، $\tilde{g}(Jx, x) = 0$ بنابراین $Jx \in T_x(M)$ و $g(\xi_x, \xi_x) = \tilde{g}(x, x) = 1$.

تعریف می‌کنیم

$$\eta(X) = g(\xi, X), \quad X \in \chi(M)$$

ξ میدان برداری نورگون نیست، نگاشت افکنشی

$$\pi : T_x\mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow T_x(M)$$

با تحدید بر $\tilde{g}$ عبارت است از

$$\pi(X) = X - \tilde{g}(x, X)x, \qquad X \in T_x(\mathbb{C}^{n+1}), \quad x \in M$$

فرض کنیم φ میدان تانسوری $(1,1)$ روی M توسط $\varphi = \pi oJ$ تعریف شود. با یک محاسبه دیده می‌شود $\varphi(\xi) = 0$و (M, g, η, ξ) یک ساختار سایا تشکیل می‌دهند.

مثال ۳.۱.۲. به شکل مشابهی می‌توان نشان داد $\mathbb{H}^{2n+1}_{2s-1}$ نیز یک خمینه سایاست.کافی است تغییرهای پایین را بکار ببریم:

$$\mathbb{H}^{2n+1}_{2s-1} = \{u \in \mathbb{C}^{n+1} \ ; \ b^{n+1}_s(u, u) = -1\} \qquad 1 \leq s \leq n+1$$
$$\bar{\xi} : x \in \mathbb{H}^{2n+1}_{2s-1} \longrightarrow \bar{\xi}_x = -Jx$$
$$\bar{\eta} = -\bar{g}(\bar{\xi}, X), \quad X \in \chi(M) \quad \bar{g} = \tilde{g}|_{\mathbb{H}^{2n+1}_{2s-1}}$$
$$\bar{\varphi} = \bar{\pi}oJ, \qquad \pi(X) = X + \tilde{g}(x, X)x, \qquad X \in T_x(\mathbb{H}^{2n+1}_{2s-1})$$

گزاره ۴.۱.۲. فرض کنیم M ساختار تقریباً سایای (φ, η, ξ)را دارد. آنگاه رتبه ی φ ، $2n$ است.

اثبات: چون $\varphi(\xi) = 0$ و $\xi \neq 0$ پس $rank\varphi \leq 2n+1$. فرض کنیم $\bar{\xi}$ وجود دارد که $\varphi(\bar{\xi}) = 0$.با بهره گیری از رابطه ی $\varphi^2 = -Id + \eta \otimes \xi$ داریم $\varphi^2\bar{\xi} = -\bar{\xi} + \eta(\bar{\xi})\xi$ و این نشان می‌دهد که $\bar{\xi}$وξ در یک راستا هستند.

ساختار تقریباً مختلط روی $M^{2n+1}\times\mathbb{R}$ [۳]

با بهره گیری از فصل ششم [۳] هر خمینه‌ی $M^{2n+1}\times\mathbb{R}$ یک ساختار تقریباً مختلط می‌پذیرد. اگر $(X,f\frac{d}{dt})$ یک میدان برداری دلخواه از خمینه باشد، آنگاه عمل ساختار تقریباً مختلط بر این میدان برداری بچنین است:

$$J(X,f\tfrac{d}{dt})=(\varphi(X)-f\xi,\eta(X)\tfrac{d}{dt})$$

فرض کنیم Mیک خمینه‌ی تقریباً سایا با ساختارتقریبا سایا ی (φ,ξ,η)باشد و Jساختار تقریباً مختلط روی $M^{2n+1}\times\mathbb{R}$باشد. بنابر قضیه ی $Newlander-Niremberg$شرط لازم و کافی برای انتگرال پذیری Jاین است که تانسور$Nijenhuis$آ ن صفر باشد.

$$\begin{aligned}
[J,J]((X,0),(Y,0)) &= J^2[(X,0),(Y,0)]+[J(X,0),J(Y,0)]\\
&\quad -J[J(X,0),(Y,0)]-J[(X,0),J(Y,0)]\\
&= -([X,Y],0)+[(\varphi(X),\eta(X)\tfrac{d}{dt}),(\varphi(Y),\eta(Y)\tfrac{d}{dt})]\\
&\quad -J[(\varphi(X),\eta(X)\tfrac{d}{dt}),(Y,0)]-J[(X,0),(\varphi(Y),\eta(Y)\tfrac{d}{dt})]\\
&= -([X,Y],0)+([\varphi(x),\varphi(Y)],(\varphi(X)\eta(Y)-\varphi(Y)\eta(X)\tfrac{d}{dt})\\
&\quad -J([\varphi(x),Y],-Y\eta(X)\tfrac{d}{dt})-J([X,\varphi(Y)],X\tfrac{d}{dt})
\end{aligned}$$

بنابر رابطه ی (۲.۱)

$$\begin{aligned}
&= (\varphi^2[X,Y]-\eta([X,Y])\xi,0)\\
&\quad +([\varphi(X),\varphi(Y)],(\varphi(X)\eta(Y)-\varphi(Y)\eta(X)\tfrac{d}{dt})\\
&\quad -(\varphi[\varphi(X),Y]+Y\eta(X)\xi,\eta([\varphi(X),Y])\tfrac{d}{dt})\\
&\quad -(\varphi[X,\varphi(Y)]-X\eta(X)\xi,\eta[X,\varphi(Y)]\tfrac{d}{dt})
\end{aligned}$$

$$=([\varphi,\varphi][X,Y]+2d\eta(X,Y)\xi,((\mathcal{L}_{\varphi(X)}\eta)(X)-(\mathcal{L}_{\varphi(Y)}\eta)(X))\tfrac{d}{dt})$$

$$\begin{aligned}
[J,J]((X,0),(0,\tfrac{d}{dt})) &= -[(X,0),(0,\tfrac{d}{dt})]+[J(X,0),J(0,\tfrac{d}{dt})]\\
&\quad -J[J(X,0),(0,\tfrac{d}{dt})]-J[(X,0),J(0,\tfrac{d}{dt})]\\
&= [(\varphi(X),\eta(X)\tfrac{d}{dt}),(-\xi,0)]-J[(\varphi(X),\eta(X)\tfrac{d}{dt}),(0,\tfrac{d}{dt})]\\
&\quad -J[(X,0),(-\xi,0)]\\
&= -([\varphi(X),\xi],(\xi\eta(X))\tfrac{d}{dt})+J([X,\xi],0)\\
&= -(\varphi([X,\xi]),\eta([X,\xi])\tfrac{d}{dt})
\end{aligned}$$

$$= ([\xi, \varphi(x)], (\xi\eta(X))\tfrac{d}{dt}) + (\varphi[X, \xi], (\eta([X, \xi])\tfrac{d}{dt})$$
$$= ((\mathcal{L}_\xi\varphi)(X), (\mathcal{L}_\xi\eta(X))$$

داریم:

$$[J, J]((X, 0), (Y, 0)) = (N^1(X, Y), N^2(X, Y)),$$
$$[J, J]((X, 0), (0, \tfrac{d}{dt})) = (N^3(X), N^4(x))$$

که

$$N^{(1)} = [\varphi, \varphi] + 2d\eta \otimes \xi, \qquad N^{(2)}(X, Y) = (\mathcal{L}_{\varphi(X)}\eta)(X) - (\mathcal{L}_{\varphi(Y)}\eta)(X)$$
$$N^{(3)} = \mathcal{L}_\xi\varphi, \qquad N^{(4)} = \mathcal{L}_\xi\eta$$

بنابر[۱۹] و[۱۸] گفته شده با صفر شدن $N^{(1)}$، داریم $N^{(2)} = N^{(3)} = N^{(4)} = 0$

قضیه ۵.۱.۲. [۱۷] شرط لازم و کافی برای انتگرال پذیری J این است که $N^1 = 0$.

لم ۶.۱.۲. [۱]

فرض کنیم (φ, ξ, η)ساختار تقریباً سایا و gمتریکشبه‌ریمانی سازگار روی M^{2n+1}باشد. آنگاه برای همه ی میدان های برداری X, Y, Z داریم:

$$2(g(\nabla_X\varphi)Y, Z) = 3d\Phi(X, \varphi(Y), \varphi(Z)) - 3d\Phi(X, Y, Z) + g(N^{(1)}(Y, Z), \varphi(X))$$
$$+^{(2)}(Y, Z)\eta(x) + 2\eta(\varphi(Y), X)\eta(Z) - 2\varepsilon d\eta(\varphi(Z), X)\eta(Y)$$

(۱.۲)

که $\Phi(X, Y) = g(X, \varphi(Y))$

اثبات. بنابر فرمول کزول داریم

$$\begin{aligned}2g((\nabla_X\varphi)Y,Z) &= 2g((\nabla_X\varphi(Y),Z)+2g(\nabla_XY,\varphi(Z))\\ &= Xg(\varphi(Y),Z)+\varphi(Y)g(X,Z)-Zg(X,\varphi(Y))\\ &\quad +g([X,\varphi(Y)],Z)+g([Z,X],\varphi(Y))-g([\varphi(Y),Z],X)\\ &\quad +Xg(Y,\varphi(Z))+Yg(X,\varphi(Z))-\varphi(Z)g(X,Y)\\ &\quad +g([X,Y],\varphi(Z))+g([\varphi(Z),X],Y)-g([Y,\varphi(Z)],X)\end{aligned}$$

با بهره گیری از (۳.۱) داریم:

$$\begin{aligned}&= -X\Phi(Y,Z)+\varphi(Y)(g(\varphi(X),\varphi(Z))+\varepsilon\eta(X)\eta(Z))-Z\Phi(X,Y)\\ &\quad +g(\varphi([X,\varphi(Y)]),\varphi(Z))+\varepsilon\eta([X,\varphi(Y)])\eta(Z)+\Phi([Z,X],Y)\\ &\quad -g(\varphi([\varphi(Y),Z]),\varphi(X))-\varepsilon\eta([\varphi(X),Z])\eta(X)\\ &\quad +X\Phi(Y,Z)+Y\Phi(X,Z)-\varphi(Z)(g(\varphi(X),\varphi(Y))+\varepsilon\eta(X)\eta(Y))\\ &\quad +\Phi([X,Y],Z)+g(\varphi[\varphi(Z),X],\varphi(Y))\\ &\quad +\varepsilon\eta([\varphi(Z),X])\eta(Y)-g(\varphi[Y,\varphi(Z)],\varphi(X))-\varepsilon\eta([Y,\varphi(Z)])\eta(X)\end{aligned}$$

با بهره گیری از $\Phi(Y,Z)=-\Phi(\varphi(Y),\varphi(Z))$داریم:

$$\begin{aligned}&= -X\Phi(Y,Z)-\varphi(Y)(\Phi(X,\varphi(Z)))+\varphi(Y)\varepsilon\eta(X)\eta(Z)-\\ &\quad Z\Phi(X,Y)\\ &\quad -\Phi([X,\varphi(Y)],\varphi(Z))-\varepsilon\eta([X,\varphi(Y)]\eta(Z))\\ &\quad +\Phi([Z,X],Y)-g(\varphi[Y,\varphi(Z)],\varphi(X))-\varepsilon\eta[Y,\varphi(Z)]\eta(X)\\ &\quad +X\Phi(\varphi(Y),\varphi(Z)+Y\Phi(X,Z)+\varphi(Z)\Phi(X,\varphi(Y))\\ &\quad -\varphi(Z)\varepsilon\eta(X)\eta(Y)+\Phi([X,Y],Z)-\Phi([\varphi(Z),X],\varphi(Y))\\ &\quad +\varepsilon\eta([\varphi(Z),X])\eta(Y)-g(\varphi[Y,\varphi(Z)],\varphi(X))-\varepsilon\eta([Y,\varphi(Z)]\eta(X)\end{aligned}$$

و این جمله را اضافه می‌کنیم.

$$+\Phi([Y,Z],X)-g([Y,Z],\varphi(X))-\{\Phi([\varphi(Y),\varphi(Z)],X)-g([\varphi(Y),\varphi(Z)],\varphi(X))\}$$
$$+g(2d\eta(Y,Z)\xi,\varphi(X))$$

پس رابطه به شکل پایین تبدیل می‌شود :

$$=3d\Phi(X,\varphi(Y),\varphi(Z))-3d\Phi(X,Y,Z)+g(N^1(Y,Z),\varphi(X))$$
$$+\varphi(Y)\varepsilon\eta(X)\eta(Z)+\varepsilon\eta([X,\varphi(Y)])\eta(Z)-g(\varphi[Y\varphi(Z)],\varphi(X))$$
$$-\varepsilon\eta([Y,\varphi(Z)]\eta(X))-\varphi(Z)\varepsilon\eta(X)\eta(Y)+\varepsilon\eta([\varphi(Z),X])\eta(Y)$$
$$-g(\varphi[Y,\varphi(Z)],\varphi(X))-\varepsilon\eta([Y,\varphi(Z)]\eta(X)-g([Y,Z],\varphi(X))$$

با ساده کردن مجدد داریم:

$$=3d\Phi(X,\varphi(Y),\varphi(Z))-3d\Phi(X,Y,Z)+g(N^{(1)}(Y,Z),\varphi(X))$$
$$-\varepsilon 2d\eta(\varphi(Z),X)\eta(Y)+\varepsilon 2d\eta(\varphi(Y),X)\eta(Z)$$
$$-2g(\varphi[Y,\varphi(Z)],\varphi(X))-2\varepsilon\eta([Y,\varphi(Z)])\eta(X)-g([Y,Z],\varphi(X))$$

$$=3d\Phi(X,\varphi(Y),\varphi(Z))-3d\Phi(X,Y,Z)+g(N^{(1)}(Y,Z),\varphi(X))$$
$$-\varepsilon 2d\eta(\varphi(Z),X)\eta(Y)+\varepsilon 2d\eta(\varphi(Y),X)\eta(Z)$$
$$-2g([Y,\varphi(Z)],X)-g([Y,Z],\varphi(X))$$
$$=3d\Phi(X,\varphi(Y),\varphi(Z))-3d\Phi(X,Y,Z)+g(N^{(1)}(Y,Z),\varphi(X))$$
$$+^{(2)}(Y,Z)\eta(x)+2\eta(\varphi(Y),X)\eta(Z)-2\varepsilon d\eta(\varphi(Z),X)\eta(Y)$$

□

تبصره ۷.۱.۲. :در خمینه های سایا $N^{(4)}=0$.

چون $d\eta(\xi,X)=-g(X,\varphi(\xi))=0$ هرگاه مشتق لی را با $\mathcal{L}$نشان دهیم داریم:

$$N^{(4)}=\mathcal{L}_\xi\eta=doi_\xi\eta+i_\xi od\eta=d\eta(\xi)+(d\eta)(\xi,.)=0$$

تبصره ۸.۱.۲. :در خمینه های سایا خم انتگرال میدان برداری ξ ژئو دزیک است. زیرا بنابر تبصره ی بالا گفته شد $\mathcal{L}_\xi\eta=0$و از طرفی $\eta(X)=\varepsilon g(\xi,X)$ بنابراین

$$0=\varepsilon(\mathcal{L}_\xi\eta)X=\varepsilon(\xi\eta(X))-\varepsilon\eta([\xi,X])=\xi g(\xi,X)-g(\xi,[\xi,X])=g(\nabla_\xi\xi,X)$$