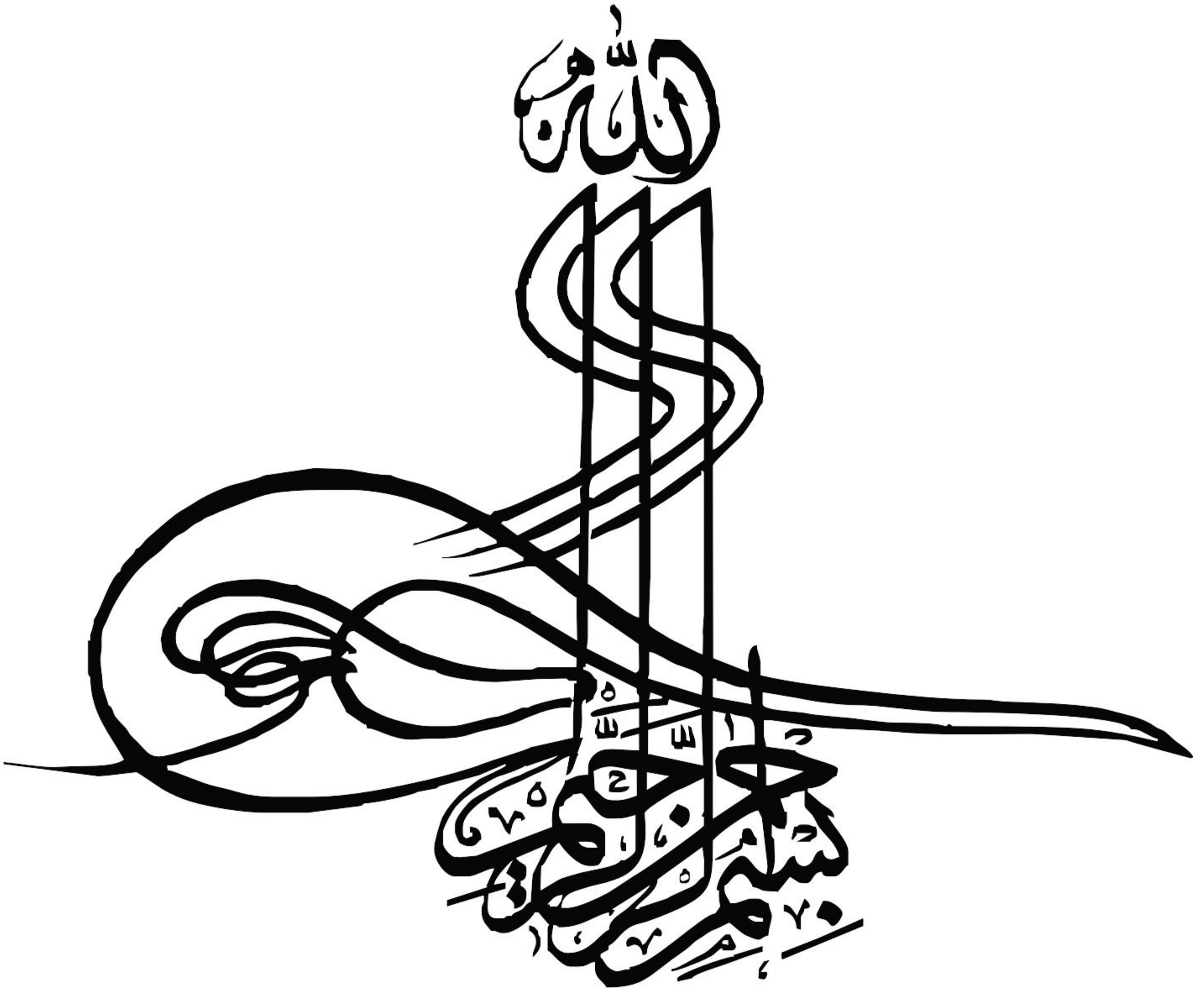
بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی
(گرایش محض - آنالیز تابعی)

عنوان :

توسیع مقادیر ویژه در نامساوی بوهر

از:

علی ملکی

استاد راهنما:

دکتر اسماعیل انصاری پیری

بهمن ۱۳۹۱

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

و به یاد و خاطره دوست عزیزم

شادروان بهروز پوربیژن

سپاس خداوند یکتا را که آدمی را مورد لطف بی کران خود قرار داد و او را به زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه ی خود می دانم از جناب آقای دکتر اسماعیل انصاری پیری به خاطر رهنمودهایشان طی دو سال اخیر تشکر و قدردانی کنم. استاد گرامی بی شک آرزوی سلامتی و توفیق روز افزون برای شما حداقل سپاس گزاری از راهنمایی های دلسوزانه ی شماست.

استاد ارجمند، راهنمایی ها و حمایت های بی دریغ شما همراه با اخلاق پسندیده در بسیاری از زمان های انجام این پژوهش همواره موجب دلگرمی بوده و صمیمانه از شما سپاس گزاری می کنم.

همچنین مراتب سپاس گزاری خود را نسبت به آقای دکتر عباس سهله و آقای دکتر حسین سهله ابراز می دارم که بر من منت نهاده و وظیفه داوری این پایان نامه را تقبل فرمودند.

بعلاوه بر خود واجب می دانم از دوست عزیزم جناب آقای رضا گنج بخش صنعتی بخاطر راهنمایی های ارزنده شان تشکر کنم.

در پایان از پدر و مادر عزیزم تشکر می کنم که همیشه دعای خیرشان با من همراه بوده است و وجودشان در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان من می باشد.

چکیده:

توسیع مقادیر ویژه در نامساوی بوهر

علی ملکی

نامساوی کلاسیک بوهر بیان می کند که برای هر $z, w \in \mathbb{C}$ و برای هر $p, q > 1$ با شرط $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ، داریم $|z + w| \leq p|z|^2 + q|w|^2$. واسیچ و ککیچ نسخه دیگری از این نامساوی را بیان نمودند که برای هر $z_j \in \mathbb{C}$ و $p_j > 0$ و $r > 1$ ،

$$|\sum_{j=1}^{m} z_j|^r \leq (\sum_{j=1}^{m} p_j^{\frac{1}{1-r}})^{r-1} \sum_{j=1}^{m} p_j |z_j|^r.$$

در این پایان نامه، تعمیم ماتریسی این نسخه از نامساوی بوهر را به کمک نامساوی های احاطه سازی ضعیف، مقادیر ویژه یک ماتریس و نرم های پایای یکانی ارائه می دهیم. .

کلید واژه:

تابع محدب، احاطه سازی ضعیف، نرم پایای یکانی، نگاشت به طور کامل مثبت، نامساوی بوهر،مقدار ویژه.

فهرست مطالب

پیشگفتار:

نامساوی کلاسیک بوهر بیان می کند که برای هر اسکالر a و b و $p > 0$ و $q > 0$ با شرط $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ،

$$|a+b| \leq p|a|^2 + q|b|^2.$$

تساوی فقط و فقط زمانی رخ می دهد که $b = (p-1)a$. تا کنون تعمیم های جالبی از این نامساوی از جبر اعداد به جبر ماتریس ها (عملگرهای با بعدمتناهی) و جبر عملگرها توسط ریاضیدانان مختلفی ارائه شده است . چند تعمیم از نامساوی کلاسیک بوهر توسط تی اچ. ام. راسیاس [1] در [14] بیان شده است. در سال **۱۹۹۳**، او و جی. پکاریک [2] در [13] نشان دادند که اگر $(X, \|.\|)$ فضای نرم دار خطی، $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ تابع محدب غیر نزولی، $p_1 > 0$ و $p_j \leq 0$ برای $j = 2, ..., n$ و $\sum_{j=1}^{n} p_j > 0$، این نامساوی بدین صورت تعمیم می یابد که هرگاه $x_j \in X$ ، $j = 1, 2, ..., n$، داریم

$$f\left(\frac{\| \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \|}{\sum_{j=1}^{n} p_j}\right) \geq \frac{\sum_{j=1}^{n} p_j f(\|x_j\|)}{\sum_{j=1}^{n} p_j}.$$

در سال ۲۰۰۳، هیرزالا [3] ، [6] ، نشان داد که اگر $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in B(H)$ ، که $B(H)$ جبر عملگرهای خطی کراندار روی فضای هیلبرت (تفکیک پذیر) مختلط H و $q \geq p > 1$ با شرط $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ باشند، آنگاه

$$|\mathrm{A}-\mathrm{B}|^2 + |(p-1)\mathrm{A}+\mathrm{B}|^2 \leq p|\mathrm{A}|^2 + q|\mathrm{B}|^2. \qquad (1)$$

که در آن $|\mathrm{C}| := (\mathrm{C}^*\mathrm{C})^{\frac{1}{2}}$.

در سال ۲۰۰۷، ژانگ [4] [17] ، نامساوی (۱) را با حذف شرط $q \geq p$ و نشان دادن اتحاد

$$|\mathrm{A}-\mathrm{B}|^2 + |\sqrt{\frac{p}{q}}\mathrm{A} + \sqrt{\frac{q}{p}}\mathrm{B}|^2 = p|\mathrm{A}|^2 + q|\mathrm{B}|^2.$$

برای هر $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in B(H)$ گسترش داد. بعلاوه او ثابت نمود برای هر عدد صحیح مثبت k و $\mathrm{A}_i \in B(H)$ ، $i = 1, ..., k$، و برای $t_i > 0$ که $i = 1, ..., k$ به نحوی که $\sum_{i=1}^{k} t_i = 1$ ، داریم

$$|t_1\mathrm{A}_1 + ... + t_k\mathrm{A}_k|^2 \leq t_1|\mathrm{A}_1|^2 + ... + t_k|\mathrm{A}_k|^2. \qquad (2)$$

در سال ۲۰۱۰، فوجی [5] و ژوو [6] ، [18] ، از طریق تعمیم قانون متوازی الاضلاع برای قدر مطلق عملگرها، یعنی

[1] Th.M. Rassias
[2] J.Pečarić
[3] Hirzallah
[4] Hirzallah
[5] Fujii
[6] Zuo

، برای هر $A, B \in B(H)$ و اسکالر حقیقی $t \neq 0$ ،

$$|A - B|^2 + \frac{1}{t}|tA + B|^2 = (1 + t)|A|^2 + (1 + \frac{1}{t})|B|^2.$$

گسترش دیگری از نامساوی بوهر را ارائه دادند.

واسیچ [1] و ککیچ [2] ، [16] ، تعمیم جالبی از نامساوی کلاسیک بوهر در اعداد مختلط بیان نمودند که برای $z_j \in \mathbb{C}$ ، $p_j > 0$ و $r > 1$ داریم

$$|\sum_{j=1}^{m} z_j|^r \leq (\sum_{j=1}^{m} p_j^{\frac{1}{1-r}})^{r-1} \sum_{j=1}^{m} p_j |z_j|^r. \tag{۳}$$

در [11] ، مصلحیان ، پریک [3] و پکاریک به یک تعمیم عملگری از نامساوی بوهر (۳) رسیدند. در سال ۲۰۱۱ ، ماسارو [4] ، مصلحیان و آجلا [5] ، [10] ، تعمیم مقادیر ویژه در نامساوی بوهر (۳) را مطرح نمودند که هدف اصلی این پایان نامه است. بدین منظور پایان نامه پیش رو در پنج فصل ، به شرح زیر تدوین شده است.

فصل اول : پیش نیاز ها

در این فصل پاره ای از مفاهیم اولیه و قضایای مورد نیاز ، بدون ارائه اثبات ذکر شده اند.

فصل دوم : نظریه نمایش

در این فصل ابتدا به بررسی تابعک های مثبت می پردازیم . در ادامه نظریه نمایش در C^*-جبرها را مورد مطالعه قرار داده و قضیه مهم گلفند-نیمارک را ثابت می کنیم. در دو بخش پایانی فصل به مطالعه ماتریس ها روی C^*-جبرها و همچنین سیستم کلی تصاویر روی ماتریس ها پرداخته و از نظریه نمایش کمک می گیریم.

فصل سوم : نگاشت های به طور کامل مثبت

هدف اصلی در این فصل رده بندی نگاشت های به طور کامل مثبت در C^*-جبر هاست . ابتدا در این فصل ضرب تانسوری دو فضای هیلبرت را مورد مطالعه قرار داده و سپس انتگرال بوخنر ، نوعی انتگرال لبگ که برد آن در جبر باناخ است، را معرفی می نماییم و در پایان به مطالعه نگاشت های مثبت و به طور کامل مثبت می پردازیم.

فصل چهارم : احاطه سازی

ابتدا به معرفی مفهوم احاطه سازی که نوعی ترتیب است می پردازیم . سپس اصول مقداری برای مقادیر ویژه را به کمک احاطه سازی بیان می نماییم . در ادامه نرم های پایای یکانی برای عملگرهای روی $\mathbb{C}^n$ را معرفی نموده

---
[1] Vasić
[2] Kečkić
[3] Perić
[4] Matharu
[5] Aujla

و قضیه تسلطی فن [۱] را ثابت می کنیم. در انتها خود را به مطالعه توابع یکنوای عملگری و محدب عملگری معطوف می گردانیم.

فصل پنجم : تعمیم نامساوی بوهر به فرم ماتریسی

در این فصل ابتدا نامساوی کلاسیک بوهر را بیان نموده و فرم تعمیم یافته آن ، یعنی ، (۳) را در نظر می گیریم. آنگاه به کمک مقادیر ویژه و نرم های پایای یکانی تعمیم ماتریسی نامساوی بوهر را ارائه می دهیم. در این پایان نامه قضیه ۴-۱-۲. یعنی فصل دوم، بخش اول، قضیه چهارم.

[۱] Fan Dominance Theorem

فصل ۱

پیشنیاز

در این بخش پاره ای از مفاهیم اولیه و قضایای مورد نیاز از C^*-جبر ها را بیان می نماییم. فرض بر این است که خواننده با مفهوم جبر باناخ آشنایی دارد. (فصل اول از مرجع [12] به بررسی این مفهوم پرداخته است.)

تعریف ۱-۰-۱. فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ باشد. نگاشت $* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ با ضابطه $a \to a^*$ که در ویژگی های زیر صدق می کند را در نظر می گیریم .برای هر $a, b \in \mathcal{A}$ و هر λ اسکالر

$$(a+b)^* = a^* + b^*$$

$$(ab)^* = b^* a^*$$

$$(\lambda a)^* = \overline{\lambda} a^*$$

$$(a^*)^* = a.$$

جبر باناخ $\mathcal{A}$ همراه با این نگاشت، در صورتیکه این نگاشت پیوسته باشد- در توپولوژی نرم- یک $*$-جبر باناخ نام دارد. بعلاوه اگر داشته باشیم

$$\|aa^*\| = \|a\|^2.$$

$*$-جبر باناخ $\mathcal{A}$ را یک C^*-جبر می نامیم.

بدیهی است که هر $*$-زیر جبر بسته از C^*-جبر $\mathcal{A}$ ، خود یک C^*-جبر است.

تعریف ۱-۰-۲. ضرب داخلی روی فضای برداری X نگاشتی از $X \times X$ به توی میدان $\mathbb{F}$ است و برای $x, y \in X$ می نویسیم $< x, y >$. که دارای ویژگی های زیر است برای $x, y, z \in X$ و $\alpha \in \mathbb{F}$ داریم

$$< x + y, z > = < x, z > + < y, z > .$$

$$< \alpha x, y > = \alpha < x, y > .$$

$$< x, y > = \overline{< y, x >}$$

$$< x, x > \geq 0.$$

$$< x, x > = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

یک ضرب داخلی روی X نرمی روی آن به صورت $\|x\| = \sqrt{< x, x >}$ تعریف می کند و همچنین متری روی X به صورت

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{< x - y, x - y >}.$$

خواهیم داشت.

فضای برداری Xهمراه با ضرب داخلی تعریف شده روی آن را فضای ضرب داخلی یا فضای شبه هیلبرت نامند. فضای ضرب داخلی کامل (کامل در متر تعریف شده بوسیله ضرب داخلی) را فضای هیلبرت می نامیم.

مثال ۱-۰-۳. فضای B(H) ، همه عملگرهای خطی و کراندار روی فضای هیلبرت H ، یک C^*-جبر است.

تعریف ۱-۰-۴. فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک C^*-جبر باشد. عنصر دلخواه a از $\mathcal{A}$ را هرمیتی یا خود الحاق نامیم هرگاه $a^* = a$ ، همچنین اگر $p \in \mathcal{A}$ یک عنصر خود الحاق باشد که $p^۲ = p$ در این صورت p را یک تصویر در $\mathcal{A}$ می نامیم. عنصر $a \in \mathcal{A}$ نرمال است اگر $a^*a = aa^*$. بعلاوه a یکانی است هرگاه $a^*a = aa^* = ۱$.

تعریف ۱-۰-۵. فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک C^*-جبر یکدار بوده و $\text{Inv}\,(\mathcal{A})$ بیانگر عناصر معکوس پذیر در جبر $\mathcal{A}$ باشد. اگر $a \in \mathcal{A}$ در این صورت طیف عنصر $\mathcal{A}$ رابا نماد $\sigma(a)$ نشان داده و بصورت زیر تعریف می کنیم،

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda e - a \notin \text{Inv}\,(\mathcal{A})\}.$$

همچنین شعاع طیفی عنصر a را با نماد $r(a)$ نمایش داده و بصورت زیر تعریف می کنیم

$$r(a) = \sup\{|\lambda|; \lambda \in \sigma(a)\}.$$

تعریف ۱-۰-۶. فرض کنیم $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ دو C^*-جبر دلخواه باشند. نگاشت $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ را $*$-همریختی نامیم ، هرگاه Φ یک همریختی باشد بطوری که برای هر $a \in \mathcal{A}$، داشته باشیم، $\Phi(a^*) = \Phi(a)^*$. بعلاوه اگر این نگاشت دوسویی باشد یک $*$-یکریختی است.

تعریف ۱-۰-۷. یک خودریختی از C^*-جبر $\mathcal{A}$ یک $*$-یکریختی $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ است. اگر $\mathcal{A}$ یکدار و u عنصر یکانی $\mathcal{A}$ باشد، آنگاه $\Phi(a) = uau^*$ یک خودریختی داخلی است. گوییم عناصر a و b از $\mathcal{A}$ هم ارز یکانی هستند اگر عنصر یکانی u در $\mathcal{A}$ موجود باشد بطوریکه $b = uau^*$. توجه می کنیم که $\sigma(a) = \sigma(b)$ اگر a و b هم ارز یکانی باشند.

قضیه ۱-۰-۸. *اگر a عنصرخود الحاق در C^*-جبر $\mathcal{A}$ باشد، آنگاه* $r(a) = \|a\|$.

برهان. قضیه ۱.۱.۲، مرجع [۱۲] . □

نتیجه ۱-۰-۹. *حداکثر یک نرم روی یک $*$-جبر موجود است که آن را به یک C^*-جبر تبدیل می کند.*

برهان. نتیجه ۲.۱.۲، مرجع [۱۲] . □

قضیه ۱-۰-۱۰. *اگر نگاشت $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ یک $*$-همریختی از $*$-جبر باناخ $\mathcal{A}$ به داخل C^*-جبر $\mathcal{B}$ باشد، آنگاه برای هر $a \in \mathcal{A}$ ، $\|\Phi(a)\| \leq \|a\|$.*

برهان. قضیه ۷.۱.۲، مرجع [۱۲] . □

تعریف ۱-۰-۱۱. فرض کنیم X یک فضای موضعا فشرده هاسدورف باشد. مجموعه توابع پیوسته از X به $\mathbb{C}$ را که در بی نهایت صفر می شوند-یعنی برای هر $\epsilon > 0$ مجموعه $\{x \in X; |f(x)| \geq \epsilon\}$ فشرده باشد- را با $C_\circ(X)$ نمایش می دهیم.

قضیه ۱-۰-۱۲. (*قضیه گلفند* [۱]) *اگر $\mathcal{A}$ یک C^*-جبر جابجایی ناصفر باشد، آنگاه نمایش گلفند $\Phi : \mathcal{A} \to C_\circ(\Omega(\mathcal{A})), a \longmapsto \hat{a}$ یک $*$- یکریختی حافظ نرم است، که در آن $\Omega(\mathcal{A})$ مجموعه همه همریختی های ناصفر از $\mathcal{A}$ به $\mathbb{C}$ است.*

برهان. قضیه ۱۰.۱.۲، مرجع [۱۲] . □

لم ۱-۰-۱۳. *اگر $u \in \mathcal{A}$ عنصر یکانی باشد، آنگاه $\sigma(u) \subseteq \mathbb{T}$. که $\mathbb{T}$ دایره واحد در $\mathbb{C}$ است.*

برهان. صفحه ۳۶، مرجع [۱۲] . □

قضیه ۱-۰-۱۴. *اگر a یک عنصر نرمال در C^*-جبر یکدار $\mathcal{A}$ بوده و*

$$z : \sigma(a) \to \mathbb{C}$$

نگاشت شمول باشد، آنگاه یک $*$-همریختی یکدار منحصر بفرد $\Phi : C(\sigma(a)) \to \mathcal{A}$ موجود است که $\Phi(z) = a$. بعلاوه Φ حافظ نرم و $Im\,\Phi$ یک C^*-زیر جبر از $\mathcal{A}$ تولید شده توسط a و ۱ خواهد بود.

برهان. قضیه ۱۳.۱.۲، مرجع [۱۲] . □

قضیه ۱-۰-۱۵. (*قضیه نگاشت طیفی* [۲]) *اگر a عنصر نرمال از C^*-جبر یکدار $\mathcal{A}$ و $f \in C(\sigma(a))$ باشد، آنگاه*

$$\sigma(f(a)) = f(\sigma(a)).$$

بعلاوه اگر $g \in C(\sigma(f(a)))$ ، آنگاه

$$(gof)(a) = g(f(a)).$$

[۱] Gelfand Theorem
[۲] Spectral Mapping Theorem

برهان. قضیه ۱۴.۱.۲، مرجع [۱۲] . □

تعریف ۱-۰-۱۶. عنصر خود الحاق a از C^*-جبر $\mathcal{A}$ را مثبت نامیم، هرگاه $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}^+$ و آن را با نماد $a \geqslant 0$ نشان می دهیم.

قضیه ۱-۰-۱۷. *اگر a یک عنصر هرمیتی از C^*-جبر $\mathcal{A}$ باشد، آنگاه* $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$.

برهان. قضیه ۱۸.۱.۲، مرجع [۱۲] . □

لم ۱-۰-۱۸. *اگر a عنصری خود الحاق از C^*-جبر یکدار $\mathcal{A}$ و $t \in \mathbb{R}$ باشند، آنگاه a عنصری مثبت است هرگاه $\|a - t\| \leq t$ $\|a\| \leq$. بعکس اگر $\|a\| \leq t$ و a عنصری مثبت باشند، آنگاه $\|a - t\| \leq t$.*

برهان. لم ۲.۲.۲، مرجع [۱۲] . □

لم ۱-۰-۱۹. *مجموعه عناصر مثبت $\mathcal{A}$ ، $\mathcal{A}^+$ ، یک مخروط است. یعنی $\mathcal{A}^+ + \mathcal{A}^+ \subseteq \mathcal{A}^+$ و $\mathbb{R}^+\mathcal{A}^+ \subseteq \mathcal{A}^+$.*

برهان. صفحه ۴۶، مرجع [۱۲] . □

قضیه ۱-۰-۲۰. *اگر a یک عنصر دلخواه از C^*-جبر $\mathcal{A}$ باشد، آنگاه a^*a عنصری مثبت از $\mathcal{A}$ است.*

برهان. قضیه ۴.۲.۲، مرجع [۱۲] . □

قضیه ۱-۰-۲۱. *اگر $\mathcal{A}$ یک C^*-جبر و $a \in \mathcal{A}^+$ باشند، آنگاه عنصر منحصر بفردی مانند $b \in \mathcal{A}^+$ موجود است بطوریکه $b^2 = a$. این عنصر مثبت منحصر بفرد را با $a^{\frac{1}{2}}$ نشان میدهیم.*

برهان. قضیه ۱.۲.۲، مرجع [۱۲] . □

تبصره ۱-۰-۲۲. *اگر a عنصری خود الحاق از C^*-جبر $\mathcal{A}$ باشد، آنگاه a^2 مثبت است. قرار می دهیم $|a| = (a^2)^{\frac{1}{2}}$ ، $a^+ = \frac{1}{2}(|a| + a)$ ، $a^- = \frac{1}{2}(|a| - a)$. آشکارا $|a|$ ، a^+ ، a^- عناصر مثبتی هستند که $a = a^+ - a^-$ و $a^+a^- = 0$. بعلاوه می توانیم تعریف $|a|$ را برای عنصر دلخواه $a \in \mathcal{A}$ بدین صورت گسترش دهیم*

$$|a| = (a^*a)^{\frac{1}{2}}.$$

برهان. صفحه ۴۵و۴۶، مرجع [۱۲] . □

قضیه ۱-۰-۲۳. *اگر $\mathcal{A}$ یک C^*-جبر باشد، آنگاه*

۱. $\mathcal{A}^+ = \{a^*a; a \in \mathcal{A}\}$.

۲. *اگر* $a, b \in \mathcal{A}_{sa}$ ، $\mathcal{A}_{sa}$ *مجموعه تمام عناصر خود الحاق* $\mathcal{A}$ ، *و* $c \in \mathcal{A}$. *در این صورت اگر* $a \leq b$ *آنگاه* $c^*ac \leq c^*bc$.

۳. *اگر* $\circ \leq a \leq b$ ، *آنگاه* $\|a\| \leq \|b\|$.

۴. *اگر* $\mathcal{A}$ *یکدار بوده و* a *و* b *عناصر معکوس پذیر باشند، در این صورت اگر* $a \leq b$ ، *آنگاه* $\circ \leq b^{-1} \leq a^{-1}$.

برهان. قضیه ۵.۲.۲، مرجع [۱۲] . □

قضیه ۱-۰-۲۴. *اگر* a *و* b *عناصر مثبت از* C^**-جبر* $\mathcal{A}$ *باشند، آنگاه نامساوی* $a \leq b$ *نامساوی* $a^{\frac{1}{2}} \leq b^{\frac{1}{2}}$ *را ایجاب می کند.*

برهان. قضیه ۶.۲.۲، مرجع [۱۲] . □

تعریف ۱-۰-۲۵. ماتریس A را نیمه معین مثبت یا مثبت نامیم هرگاه ماتریس A هرمیتی $(\mathrm{A}^* = \mathrm{A})$ و همه مقادیر ویژه اش نامنفی باشدو می نویسیم $\mathrm{A} \geq \circ$، همچنین A معین مثبت یا اکیدا مثبت است هرگاه بعلاوه همه مقادیر ویژه اش مثبت باشد و می نویسیم $\mathrm{A} > \circ$.

تعریف ۱-۰-۲۶. فرض کنیم $\mathrm{T} : H \to H$ یک عملگر خطی باشد. طیف عملگر T را در نظر می گیریم. حال دو حالت داریم، یکی اینکه $\lambda\mathrm{I} - \mathrm{T}$ پوشا نیست و دیگری $\lambda\mathrm{I} - \mathrm{T}$ یک به یک نمی باشد. مقادیر ویژه عملگر T را آن دسته از $\lambda \in \sigma(\mathrm{T})$ در نظر می گیریم که $\lambda\mathrm{I} - \mathrm{T}$ یک به یک نیست.

قضیه ۱-۰-۲۷. *فرض کنیم* $T : H \to H$ *عملگر خطی هرمیتی کراندار روی فضای هیلبرت* H *باشد. آنگاه*

۱. *همه مقادیر ویژه* T *(در صورت وجود) حقیقی اند.*

۲. *بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه متمایز* T *متعامدند.*

برهان. قضیه ۱۷.۶، مرجع [۷] . □

تعریف ۱-۰-۲۸. فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک حلقه و τ یک توپولوژی روی آن باشد. هرگاه نگاشت های $(x, y) \mapsto x + y$ از $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ به $\mathcal{A}$ ، $x \mapsto -x$ از $\mathcal{A}$ به $\mathcal{A}$ و $(x, y) \mapsto xy$ از $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ به $\mathcal{A}$ پیوسته باشند، آنگاه τ یک توپولوژی حلقه ای است. حلقه ای که مجهز به توپولوژی حلقه ای باشد را حلقه توپولوژیک می نامند.

تعریف ۱-۰-۲۹. فرض کنیم Kیک میدان و τ توپولوژی روی K باشد.در این صورت τ را توپولوژی میدانی نامند هرگاه τ توپولوژی حلقه ای بوده و عمل معکوس ضربی نیز پیوسته باشد. میدانی که مجهز به توپولوژی میدانی است را میدان توپولوژیک گویند.

تعریف ۱-۰-۳۰. فرض کنیم A عملگری خطی روی فضای هیلبرت H باشد. گوییم A دارای تجزیه قطبی است اگر عملگر یکانی U و عملگر مثبت P موجود باشند به نحوی که $\mathrm{A} = \mathrm{UP}$. در واقع $\mathrm{P} = |\mathrm{A}|$ بوده و عملگر U منحصر به فرد است هرگاه A معکوس پذیر باشد.

تعریف ۱-۰-۳۱. اگر A عملگری خطی روی فضای هیلبرت H باشد، گوییم A دارای تجزیه طیفی است هرگاه عملگرهای یکانی U و V و عملگر قطری D با درایه های مثبت روی قطر اصلی موجود باشند به نحوی که $\mathrm{A} = \mathrm{UDV}$. درایه های قطری روی D مقادیر منفرد A هستند.

تعریف ۱-۰-۳۲. فرض کنیم X و Y فضاهای باناخ و S گوی واحد بسته در Xباشد. عملگر خطی $\mathrm{T} : X \to Y$ را فشرده نامیم هرگاه $\mathrm{T}(S)$ در Y فشرده نسبی باشد، یعنی $\overline{\mathrm{T}(S)}$ فشرده باشد. مجموعه عملگرهای فشرده را با $K(X, Y)$ نشان می دهیم.

قضیه ۱-۰-۳۳. *فرض کنیم T عملگر فشرده روی فضای هیلبرت H باشد. آنگاه $|T|$ و T^* نیز فشرده اند.*

برهان. قضیه ۲.۴.۲، [۱۲] . □

تعریف ۱-۰-۳۴. عملگر T روی فضای هیلبرت H قطری پذیر است هرگاه H یک پایه متعامد یکه شامل بردارهای ویژه T را بپذیرد.

عملگرهای قطری پذیر لزوما نرمال هستند اما عکس مطلب در حالت کلی درست نیست.

قضیه ۱-۰-۳۵. *اگر T عملگر فشرده نرمال روی فضای هیلبرت H باشد، آنگاه T قطری پذیر است.*

برهان. قضیه ۴.۴.۲، مرجع [۱۲] . □

تعریف ۱-۰-۳۶. فرض کنیم H فضای هیلبرت باشد. مجموعه عملگرهای با بعد متناهی روی آن را با $F(H)$ نمایش می دهیم.

قضیه ۱-۰-۳۷. *فرض کنیم H فضای هیلبرت باشد. آنگاه $F(H)$ در $K(H)$ چگال است.*

برهان. قضیه ۵.۴.۲، مرجع [۱۲] . □

تعریف ۱-۰-۳۸. فرض کنیم x و y عناصری از فضای هیلبرت H باشند. آنگاه عملگر $x \otimes y$ را این گونه تعریف می کنیم

$$(x \otimes y)(z) =< z, y > x.$$

این عملگر بعدش ۱ است. عملگر $x \otimes x$ تصویر با بعد ۱ نام دارد اگر و تنها اگر $1 =< x, x >$.

قضیه ۱-۰-۳۹. *اگر H فضای هیلبرت باشد، آنگاه $F(H)$ تولید شده خطی توسط تصاویری با بعد ۱ می باشد.*

برهان. قضیه ۶.۴.۲، مرجع [۱۲] . $\square$

قضیه ۱-۰-۴۰. *فرض کنیم M زیر فضای بسته از H باشد. داریم* $H = M \oplus M^{\perp}$.

برهان. قضیه ۴.۳.۳، مرجع [۷] . $\square$

اکنون فرض کنیم h عنصری دلخواه از H باشد. بنا بر قضیه ۱-۰-۴۰، داریم $h = x + x^{\perp}$.نگاشت $p : H \to M \subseteq H$ با ضابطه $p(h) = x$ را تصویر متعامد بروی M نامند.

فصل ۲

نظریه نمایش

هدف اصلی در این فصل بیان قضیه نمایش برای یک C^*-جبر - موسوم به قضیه گلفند-نیمارک - می باشد . همانگونه که خواهیم دید، به موجب این قضیه ،هر C^*-جبر دلخواه را می توان با یک زیر جبر از $B(H)$ یکسان در نظر گرفت.

در زیر به بررسی و شرح پاره ای از مقدمات لازم به جهت طرح قضیه گلفند-نیمارک ،می پردازیم.

۲-۱ تابعک های مثبت

در این بخش بعضی از ویژگی های تابعک های خطی مثبت را مطالعه خواهیم کرد که در ساختار نظریه نمایش ضروری است.

تعریف ۲-۱-۱. فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک C^*-جبر باشد. تابعک خطی $\Phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ را یک تابعک مثبت نامیم، هرگاه برای هر $a \in \mathcal{A}^+$ ، $\Phi(a) \geq 0$. اگر $\|\Phi\| = 1$ ، Φ را یک حالت نامیده و مجموعه حالت ها در $\mathcal{A}$ را با $S(\mathcal{A})$ نشان می دهیم.

برای هر $a \in \mathcal{A}$ می توان دید که $\Phi(a^*) = \overline{\Phi(a)}$ ،زیرافرض کنیم a عنصری خودالحاق باشد. آنگاه

$$\begin{aligned}\Phi(a^*) &= \Phi(a) = \Phi(a^+ - a^-)\\ &= \overline{\Phi(a^+)} - \overline{\Phi(a^-)}\\ &= \overline{\Phi(a^+) - \Phi(a^-)}\\ &= \overline{\Phi(a^+ - a^-)} = \overline{\Phi(a)}.\end{aligned}$$

حال هر عنصر دلخواه جمع دو عنصر خود الحاق است.

بعلاوه برای $a, b \in \mathcal{A}$ تعریف می کنیم

$$< a, b >_\Phi := \Phi(b^* a).$$

این شبه فرم دوخطی در نامساوی کشی-شوارتز به شرح زیر صادق است

$$|\Phi(b^* a)|^2 \leq \Phi(a^* a)\Phi(b^* b).$$

مثال ۲-۱-۲. اگر $\mathcal{A} = \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ باشد، تابعک خطی

$$\mathrm{tr} : \mathcal{A} \to \mathbb{C}, (\lambda_{ij}) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ii}.$$

مثبت است چون اگر A ماتریسی مثبت باشد آنگاه همه مقادیر ویژه اش نامنفی است. این تابعک را تابعک اثر $\mathcal{A}$ نامیم.