بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده فیزیک

حالات همدوس در معادله دیراک

پایان‌نامه کارشناسی ارشد فیزیک

مجتبی حنایی

استاد راهنما

دکتر منصور حقیقت

شهریور ۱۳۷۹

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده فیزیک

پایان‌نامه کارشناسی ارشد رشتهٔ فیزیک آقای مجتبی حنایی

تحت عنوان

حالات همدوس در معادله دیراک

در تاریخ ۷۹/٦/۲۳ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی وتصویب نهائی قرار گرفت.

۱- استاد راهنمای پایان‌نامه	دکتر منصور حقیقت
۲- استاد مشاور پایان‌نامه	دکتر بهروز میرزا
۳- استاد مدعو	دکتر مهدی گلشن
٤-سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده	دکتر منصور حقیقت

تشکر و قدردانی

اینک که با تأییدات یزدان پاک اثر حاضر در مقام یک پایان‌نامه کارشناسی ارشد قرار گرفت و مراحل علمی آن تکمیل شده‌است ، این مؤفقیت را مرهون راهنمایی‌های ارزنده جناب آقای **دکتر منصور حقیقت** استاد راهنمای پایان‌نامه می‌دانم. به حق ایشان از سرمایه‌های ارزشمند علمی این سرزمین هستند و مقام علمی و اخلاقی ایشان شایسته خالص‌ترین تقدیرهاست. امید است که قدر ایشان را بدانیم و از اینرولازم می‌بینم نهایت سپاس و تقدیر خود را از ایشان بعمل بیاورم. به امید روزی که بتوانم قطره‌ای از دریای زحماتشان را جبران نمایم.

ازجناب آقای **دکتر بهروز میرزا** به عنوان استاد مشاور به خاطر بازخوانی و ویرایش پایان‌نامه بسیار سپاسگزارم.همچنین از جناب آقای **دکتر محمد مهدی گلشن** استاد محترم فیزیک دانشگاه شیراز که به عنوان استاد مدعو حضور داشتند و زحمت ویرایش نهایی پایان‌نامه را بر عهده گرفتند تشکر می‌نمایم.

از تمامی دوستانم بالاخص آقایان روح‌الله باباجانپور، محمدرضا بختیاری، حسن‌رضا دهقان، جمشید جعفری و رشید ریاحی که در امر تدوین این اثر مرا یاری کرده‌اند بسیار سپاسگزارم.

مجتبی حنایی

شهریور ۷۹

السلام علیک یا فاطمه الزهراء

تقدیم به :

دو خورشید فروزان زندگیم که همواره برای روشن شدن زندگیم پرتوافشانی می‌کنند و تکیه‌گاه من در سختیها و مشکلات بوده‌اند :پدر مهربانم و مادر دلسوزم ،
و تقدیم به :

همسرم گرامیم

و تقدیم به :

برادران و خواهرانم که با نگاههای معصومانه‌شان مرا به تلاش امیدوار می‌کنند.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

صفحه **عنوان**

چکیده

پس از معرفی حالات همدوس بطور اجمال به بررسی این حالات در مـورد نوسـانگر هـارمونیک غـیر نسبیتی و یک ذره نسبیتی بدون اسپین که تحت یک پتانسیل اسکالر خطی قرار گرفته است می‌پردازیـم.

سپس بطور مفصلتری حالات همدوس ذره نسبیتی با اسپین $\frac{1}{2}$ را بررسـی می‌کنیـم کـه مشـابه بـوزون نسبیتی تحت یک پتانسیل اسکالر خطی قرار گرفته باشد. از بررسـیهای در نظـر گرفتـه شـده در مـورد حالت غیر نسبیتی نتیجه‌ای که بدست می‌آید این است که اگر طیف انـرژی فواصـل یکسـانی را داشـته باشد همدوسی بروش ویژه حالت بودن عملگر فنا با همدوسی بروش حداقل عدم‌یقین هـم‌ارز اسـت. برای بررسی مورد نسبیتی این مهم ، معادله دیراک را در دو بعـد بـرای پتانسـیل پاشـل- تلـر کـه دارای طیف انرژی نسبیتی با فواصل برابری است حل می‌کنیم.پس از تولید حالات همدوس آن، همدوسـی را به دو روش بالا بررسی کرده و با مورد غیر نسبیتی مقایسه می‌کنیـم. نشـان خواهیـم داد کـه همدوسـی تناوبی است و در زمانهای خاصی که همدوسی بـروش ویـژه حـالت بـودن عملگـر فنـا روی می‌دهـد عدم‌یقین نیز به حالت اولیه برمی‌گردد.

فصل اول
مقدمه

اولین بار بحث همدوسی را شرودینگر آغاز کرد.او در نامه‌ای به ماکس پلانک اظـهار مـی کنـد کـه بسته موجی را تولید کرده‌ام که محدود به منطقه کوچکی از فضاست و در طول زمان پهن‌شدگی یـا تغییر شکل ندارد[۱] .استفاده از این حالات کوانتومی خاص که بعداً آنها را حالت همدوس نامیدند با کار گلوبر[۱] در اپتیک موجـی رونـق یـافت و او توانسـت بـا تلفیـق حـالت کوانتومـی همـدوس شرودینگر و اپتیک موجی،دریچه‌ای بسوی علم اپتیک کوانتومی بگشاید.گلوبـــر روشـهایی را بـرای بحث آمار فوتونی میدانهای تابشی دلخواه بر حسب عبارتهای مکانیک کوانتومی توسعه داد. در این روش از حالات همدوس این میدانها استفاده زیادی صورت گرفت.این حالات که توابع وابسته بـه میدان را به شکلهای فاکتوریزه شده تبدیل می‌کنند،یک پایه مناسب بـــرای تشـریح تمـام میدانـها را پیشنهاد می‌کنند.اگر چه این حالات با همدیگر متعامد[۲] نیستند ولـی یـک دسـتگاه فـوق کـامل[۳] را تشـــکیل مــــی دهنــــد.بنــــابراین هــــر حــــالت کوانتومــــی از میــــدان را میتــــوان

---

[1]Glauber

[2] Orthogonal

[3]Over Completnese

بر حسب آنها بسط داد.بسطها را همچنین میتوان برای عملگرهای دلخواه بـر حسـب محصـولات حالات همدوس توسعه داد.این بسطها بعنوان یک روش عمومی برای نمایش عملگر چگالی میـدان بکار برده می شوند و با استفاده از این عملگر می‌توان آمار فوتونی را در حد زیـادی اسـتنباط کـرد [۲] .به مرور زمان تولید حالات همدوس پتانسیلهای مختلف برای توجیه و تفسیر پدیده‌هایی نظـیر برهمکنش نور لیزر با انواع مولکولها مورد نیاز واقع شد.در ایـن راه بـاید مـارتین‌نی‌یتو[4] را پیشـقدم دانست زیرا او علاوه بر اینکه برای پتانسیلهای مختلف مهمی حالات همدوس را تولیـد کـرد [۳] ، بهمراه راندی ترکس[5] حالات همدوس را برای مرتبه های بالاتر نیز بدست آورد [٤]. مارتین نی‌یتـو حرکت یونی را که در یک حالت همدوس به تلـه انداختـه شـده بـود بررسـی کـرد و توصیفـهای تحلیلی از چگالی احتمال حالات همدوس را ارائه داد[٥].بوتکه[6] و اسـکالاپینـو[7] بـهمراه سـوگـار[8] تولید هادرون در انرژیهای بالا را بر حسب حالات همدوس بررسی کردند.آنها توانستند کـه نشـان دهند برای یک گستره وسیعی از ترکیبات میدان پیونی،عملگر چگالی را میتوان در نمـایش حـالات همدوس قطری نوشت وتمام سطح مقطعهای پیون را میتوان از آن عملگر بدسـت‌آورد و در نتیجـه میتوان نظریه آماری تولید پیون را بررسـی کـرد[٦] .بـا اینکـه کریسـتوفر[9] حـالاتی مشـابه حـالات همدوس نوسانگر را روی گروه متقارنی جـبر $O(4)$ بـرای اتـم هیـدروژن بـر حسـب عملگرهـای بوزونی بدست آورده بود[۷] ،ولی پولشین[10] حالات همدوس اتم هیدروژن را بـا اسـتفاده از توابـع پایه بدست آورد و نشان داد که این دستگاه دارای خواص هم‌ارزی با حـالات همـدوس نوسـانگر هارمونیک است [۸].یوکالوف[11] برهمکنش بین پرتو همدوس و نور جایگزیده را تجزیـه و تحلیـل کرد.او یک دستگاه از اتمهای دو ترازه را در معرض یک میدان الکترومغناطیسی بـا شـدت متوسـط قـرار داد و نشـان داد کـه اگـر دسـتگاهی از اتمـهای بـا فرکـانس تشـدید تحـت ایـن میـدان الکترومغناطیسی قرار گیرند میتوانند بعلـت برهمکنشـهای همـدوس ،پرتوافشـانی کننـد[۹].نمتـو[12] حالات همدوس عمومی را برای دستگاههای $SU(n)$ به ازای n دلخواه بدست آورد[۱۰].رادکلیـف[13]

[4] Martin Nieto

[5] Rondey Truax

[6] Botke

[7] Scalapino

[8] Sugar

[9] Christopher

[10] Polshin

[11] Yucalov

[12] Nemeto

[13] Radcliffe

با استفاده از نتایج حالات همدوس نوسانگر هارمونیک توانست حالات همدوس مشابهی را برای مورد اسپینی یک نوسانگر بدست آورد[۱۱].استون[14] بهمراه پارک[15] و گارگ[16] انتشارگرهای نیمه کلاسیکی را برای حالت همدوس اسپینی بدست آوردند [۱۲].ریجن[17] و یابلونوویچ[18] حالات همدوس را برای ساختارهای کوانتومی نیمه رساناها تشریح کردند[۱۳] . سامسونوف[19] حالات همدوس را از دیدگاه نظریه گروه بررسی کرد.او توانست تناظر ایزومتریکی فضای هیلبرت حالات یک ذره آزاد و یک ذره متحرک را در یک پتانسیل چند سالیتونی اثبات کند[۱٤]. ویگرت[20] عملگرهای هرمیتی را بر حسب پایه‌هایی از حالات اسپینی همدوس بسط داد[۱۵].هیو[21] و لیو[22] بهمراه زنگ[23] ساختار اندازه‌حرکت زاویه‌ای و ساختار انرژی حالات همدوس یک نوسانگر هارمونیک دوبعدی را بررسی کردندمحاسبات آنها نشان داد که مقدار متوسط اندازه‌حرکت زاویه‌ای و انرژی این بسته‌موج دوبعدی غیر گسترش‌یافته با مقدار متوسط اندازه‌حرکت زاویه‌ای و انرژی نوسانگر کلاسیک متحرک در امتداد یک مسیر دایره‌ای یا یک مسیر بیضوی یکسان است[۱٦].

بدین‌ترتیب حالات همدوس در شاخه های مختلف علم فیزیک از جمله ذرات بنیادی،هسته‌ای ،حالت جامد و... اهمیت یافت. حال که کارها و کاربردهایی از حالت همدوس را بطور خلاصه ذکر کردیم به معرفی حالت همدوس می‌پردازیم.

طبق رابطه عدم یقین هایزنبرگ $(\Delta X)(\Delta P) \geq \frac{\hbar}{۲}$ ،هرگاه سعی کنیم که یک بسته موج بسیار جایگزیده در فضای مکان بسازیم نمی توان اندازه حرکت خوش تعریفی به آن وابسته نمود. بطور مشابه هر بسته موج با اندازه حرکت مشخص باید از نظر فضایی بسیار پهن باشد. کمینه اصل عدم یقین هایزنبرگ $\hbar/۲$ است که برای بسته موج گائوسی برقرار است. یک بسته موج گائوسی نمایشگر ذره‌ای است که مکان و اندازه حرکت آن تا آنجا که اصل عدم یقین مجاز می دارد،بطور همزمان تعیین شوند ولی همین بسته موج گائوسی که در لحظات اولیه دارای کمینه عدم یقین

---

[14] Stone

[15] Park

[16] Garg

[17] Vrijen

[18] Yablonovitch

[19] Samsonov

[20] Weigert

[21] Huo

[22] Liu

[23] Zeng

است،با گذشت زمان پهن خواهد شد.حالاتی که رابطه عدم یقین را مینیمم می‌کنند را حالات همدوس[24] یا فشرده[25] می‌گویند،بعبارت دیگر هم حالات همدوس وهم حالات فشرده هر دو کمترین پهن شدگی را در طول زمان دارند. حالات همدوس ویژه حالات عملگری هستند که با هامیلتونی جابجا نمی‌شود.این عملگر،عملگر فناست که بصورت زیر تعریف می شود:

$$A\Psi_n = C(n)\Psi_{n-1}$$

در این رابطه،A عملگر فنا[26] ، Ψ_nویژه حالت هامیلتونی و C(n) تابعی از n است.بنابراین حالات همدوس بطور کلی دارای سه خصلت زیر هستند:

الف) عدم یقین آنها در طول زمان افزایش نمی‌یابد یا بعبارتی دیگر این حالات درطول زمان پهن نمی‌شوند.

ب) ویژه حالت عملگر فنا هستند.

ج) حالاتی هستند که از اثر یک عملگر نمایی یکانی[27] روی حالت زمینه بدست می آیند..

در فصل دوم از این پایان‌نامه به بحث همدوسی در چارچوب نظریه گروه خواهیم پرداخت.

با توجه به اینکه خیلی از کارهایی که برای حالات همدوس انجام شده‌است از نتایج نوسانگر هارمونیکی بدست آمده‌اند در فصل سوم این پایان نامه حالت همدوس نوسانگر هارمونیکی را بدست می‌آوریم وسپس با استفاده از آن یک سری نتایج مهم را مشخص می کنیم.

در فصل چهارم مسئله همدوسی بوزون نسبیتی که تحت یک پتانسیل اسکالر خطی قرار گرفته‌است را تجزیه و تحلیل می‌کنیم.

در فصل پنجم همان مسئله فصل چهارم را این بار برای یک فرمیون حل می‌کنیم.

در فصل ششم فرمیون نسبیتی را در نظر می‌گیریم که تحت یک پتانسیل خاص بصورت :

$$f(x) = \alpha\mu \tan(\alpha x) \qquad \mu = ۲,۴,۶,\ldots \quad , \qquad -\frac{\pi}{۲\alpha} \le x \le \frac{\pi}{۲\alpha}$$

قرار گرفته‌است .در این فصل حالات همدوس این ذره را بدست می‌آوریم وهمدوسی آنرا در طول زمان تشریح می‌کنیم.

---

[24] Coherent state

[25] Squeezed state

[26] Annihilation operator

[27] Unitary displacement operator

فصل دوم
حالات همدوس از دیدگاه نظریه‌گروه

مقدمه

برای بحث خواص دینامیکی یک سیستم کوانتومی،نقطه شروع هامیلتونی سیستم است؛ زیرا هامیلتونی فضای هیلبرت[1] را مشخص می کند و بررسی دینامیک یک سیستم کوانتومی بدون داشتن فضای هیلبرت آن غیر ممکن است.در اپتیک کوانتومی ،هامیلتونی بر همکنش یک سیستم اتمی و میدان الکترومغناطیسی بصورت زیراست[۱۷]:

$$H = \sum_{k} \hbar\omega_k a_k^{+} a_k^{-} + \sum_{\alpha=1}^{N} \varepsilon\sigma_{.}^{(\alpha)} + \sum_{k,\alpha} \gamma_{k,\alpha} \left[\frac{\sigma_{+}^{(\alpha)}}{\sqrt{N}} a_k^{-} + \frac{\sigma_{-}^{(\alpha)}}{\sqrt{N}} a_k^{+} \right] \qquad (۱)$$

که در آن $\hbar\omega_k$ انرژی مد kام میدان است، $\gamma_{k\alpha}$ ضرایب جفت شدگی بین سیستم اتمی و میدان الکترومغناطیسی می باشد، N تعداد اتمها و α برچسب شماره اتمها و $\sigma_{.}$ و $\sigma_{\pm}$ عملگرهای اسپینی این سیستم اتمی هستند که دو ترازه فرض می شوند.اگر ضرایب جفت شدگی ثابت در نظر گرفته

[1]Hilbert Space

شوند و سیستم اتمی بصورت یک چشمه کلاسیکی فرض شود (یعنی عملگرهای اسپینی را بصورت اعداد مختلط در نظر بگیریم) هامیلتونی شکل زیر را دارد:

$$H = \sum_k \hbar\omega_k a_k^+ a_k^- + \sum_k \left[\lambda_k(t)a_k^+ + \lambda_k^*(t)a_k^-\right] + const \qquad (۲)$$

عبارت مجموع اول از هامیلتونی میدان الکترومغناطیسی آزاد یا هامیلتونی نوسانگر هارمونیک آزاد ناشی می شود ولی عبارت دوم بر همکنش بین میدان الکترومغناطیسی و چشمه خارجی وابسته به زمان را توصیف می کند.

در این فصل می خواهیم حالات همدوس را به زبان نظریه گروه بررسی کنیم.برای این هدف هامیلتونی (۲) را مد نظر قرار می دهیم و با استفاده از آن الگوریتمی را برای شناخت جبری ساختار هامیلتونی و شناخت فضای هیلبرت و بالاخره تولید حالات همدوس ارائه می دهیم.

۲-۱-روش تولید حالات همدوس

از معادله (۲) سه خاصیت واضح زیر را بلافاصله می توان نتیجه گرفت:

الف)ساختار جبری(روابط جابجاگری):هامیلتونی (۲) که ترکیبی از هامیلتونی تک‌تک مدهاست برای یک مد خاص یک ترکیب خطی از عملگرهای نوسانگرهارمونیک a^- و a^+ و $\hat{n} = a^+a^-$ است.مجموعه این عملگرها و عملگر واحد I از روابط جابجاپذیری آشنای زیر پیروی می کنند:

$$\begin{aligned} \left[\hat{n}, a^+\right] &= +a^+ \quad , \quad \left[\hat{n}, I\right] = ۰ \\ \left[\hat{n}, a^-\right] &= -a^- \quad , \quad \left[a^+, I\right] = ۰ \\ \left[a^-, a^+\right] &= +I \quad , \quad \left[a^-, I\right] = ۰ \end{aligned} \qquad (۲-۱-۱)$$

مجموعه عملگرهای $\left\{\hat{n}, a^+, a^-, I\right\}$ یک جبر لی را می‌تنند.گروه متناظر این جبر لی را گروه هایزنبرگ- ویلی[۲] می‌گویند که با $H_۴$ نمایش می‌دهند:

[2] Heisenberg-Weily