دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش تحقیق در عملیات

عنوان

بهینه‌سازی سبد سرمایه با استفاده از شبکه‌های عصبی

استاد راهنما

آقای دکتر سهراب عفتی

استاد مشاور

آقای دکتر رضا قنبری

پژوهشگر

انسیه حاجی‌نژاد

۱۳۹۰

نام خانوادگی دانشجو: حاجی‌نژاد نام: انسیه

عنوان: بهینه‌سازی سبد سرمایه با استفاده از شبکه‌های عصبی

استاد راهنما: آقای دکتر سهراب عفتی
استاد مشاور: آقای دکتر رضا قنبری

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: تحقیق در عملیات

دانشگاه: دانشگاه فردوسی مشهد دانشکده علوم ریاضی
تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۰ تعداد صفحات: ۱۱۵

واژگان کلیدی: بهینه‌سازی سبد سرمایه، شبکه‌های عصبی، الگوریتم‌های فراابتکاری

چکیده

یکي از مباحث مهمی که در بازارهای سرمایه مطرح است و بسیار مورد توجه سرمایه‌گذاران می‌باشد، انتخاب سبد سرمایه بهینه است. در این راستا، بررسی و مطالعه سرمایه‌گذاران جهت تشکیل بهترین سبد سرمایه با توجه به میزان ریسک و بازده آن انجام می‌شود. مدلی که در تحقیق حاضر برای انتخاب سبد سرمایه بهینه مورد بررسی قرار داده‌ایم، مدل میانگین-واریانس با قید کاردینالیتی است؛ این مدل شامل قیدهایی می‌باشد که سرمایه‌گذاری در تعداد معینی کالا را تضمین نموده و حجم اختصاص یافته به هر کالا را محدود می‌سازد. مساله بهینه‌سازی مورد بررسی از درجه دشواری NP-hard است که برای حل آن الگوریتم هیورستیکی مبتنی بر شبکه‌های عصبی پیشنهاد نموده‌ایم.

امروزه استفاده از شبکه‌های عصبی از جمله روش‌هایی است که برای حل مسائل بهینه‌سازی بسیار مورد توجه می‌باشد. سرعت محاسباتی بالا و امکان پیاده‌سازی موازی از جمله مزیت‌های این روش محسوب می‌شود که باعث اقبال پژوهشگران به آن شده است. به رغم مزیت‌های شبکه‌های عصبی در حل مسائل بهینه سازی، برخوردار نبودن آن‌ها از سازوکاری برای گریز از بهینه‌های محلی باعث می‌شود که در بیشتر مواقع جواب حاصل اختلاف زیادی با جواب بهینه سراسری داشته باشد. این محدودیت باعث گشته تلاش‌های بسیاری برای بهبود عملکرد این روش‌ها به خصوص از طریق ترکیب آن‌ها با برخی الگوریتم‌های ابتکاری انجام شود. اما بیشتر شبکه‌های عصبی که قادر به گریز از بهینه‌های محلی می باشند، گسسته مقدار بوده و برای مسائل بهینه‌سازی ترکیبیاتی استفاده می‌شوند. این در حالی است که تعریف سازوکاری برای فرار از بهینه‌های محلی در شبکه‌های پیوسته مقدار و مخصوصا شبکه‌های آمیخته (پیوسته و گسسته مقدار) موضوعی است که چندان مورد توجه واقع نشده است؛ لذا در این پایان‌نامه به معرفی شبکه عصبی پرداخته‌ایم که علاوه بر مقادیر گسسته، شامل مقادیر پیوسته نیز می‌باشد و برای گریز از بهینه‌های محلی در هر دو فضای گسسته و پیوسته از جستجوی تابو استفاده می‌کند. علاوه بر شبکه عصبی پیشنهادی، اصلاحی از الگوریتم ژنتیک ارائه نموده‌ایم که باعث افزایش سرعت محاسبات و دقت جواب‌های حاصل می‌شود. آزمایش‌های عددی تاییدی بر کارایی الگوریتم‌های پیشنهادی در حل مساله بهینه‌سازی سبد سرمایه با قید کاردینالیتی می‌باشد.

تقدیم به

پدر و مادر بزرگوار و مهربانم

سپاس

سپاس خدای را که حق ستایشش برتر از حد ستایشگران است و نعمت هایش فوق اندیشه شمارشگران. سپاس خدای را که پای اندیشه تیزگام در راه شناسایی اولنگ است و سر فکرت ژرف رو به دریای معرفتش برسنگ.

اکنون که با عنایت و الطاف بی شائبه ذات اقدس الهی موفق به اتمام نگارش پایان نامه خود شده ام، بر خود لازم می دانم که از زحمات بی دریغ استاد گرانقدرم، جناب آقای دکتر عفتی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعا بدون راهنمایی های ارزنده و صبر و حوصله بی اندازه ایشان، این مجموعه به انجام نمی رسید. و از جناب آقای دکتر قنبری که مطالعه و مشاوره این پایان نامه را تقبل فرموده و با مساعدت های بی دریغ خود در مراحل مختلف تحقیق و تدوین این پایان نامه مرا همراهی نمودند، کمال امتنان را دارم. همچنین از جناب آقای دکتر طارقیان و جناب آقای دکتر فراهی که قبول زحمت نموده و پایان نامه را مورد مطالعه و داوری قرار دادند، قدردانی می کنم.

سپاس بی اندازه خود را تقدیم خانواده عزیزم می کنم که همیشه پشتیبان و مشوقم بوده اند و شرایطی را فراهم آوردند تا در محیطی مطلوب و پر از آرامش مراتب تحصیل را طی نمایم. و در انتها از زحمات تمامی دوستانی که در تهیه این اثر سهمی داشته اند، قدردانی می کنم.

انسیه حاجی نژاد
۱۳۹۰

فهرست مطالب

فهرست الگوریتم‌ها **ix**

فهرست شکل‌ها **x**

فهرست جدول‌ها **xi**

پیش‌گفتار **xii**

۱ مقدمه‌ای بر مساله بهینه‌سازی سبد سرمایه ۱

۱.۱ مدل میانگین-واریانس ۳

۱.۱.۱ مرز کارایی ۵

۲.۱.۱ وزن دهی ۶

۲.۱ سایر توابع هدف ۷

۱.۲.۱ میانگین انحراف مطلق ۷

۲.۲.۱ ریسک نامطلوب ۸

۱.۲.۲.۱ شبه واریانس ۹

۲.۲.۲.۱ میانگین شبه انحراف مطلق ۹

۳.۲.۲.۱ چولگی ۱۰

۴.۲.۲.۱ اول-ایمنی روی ۱۱

۵.۲.۲.۱ ارزش در معرض خطر مشروط ۱۲

۳.۲.۱ هزینه معامله ۱۶

۳.۱ بهبود مدل میانگین-واریانس با تعریف قیود جدید ۱۸

۱.۳.۱ قید اندازه دسته ۱۸

۲.۳.۱ قیود کاردینالیتی و کرانی ۱۸

۳.۳.۱ محدودیت حجم معاملات ۱۹

۴.۱ مساله بهینه‌سازی سبد سرمایه با قید کاردینالیتی ۲۰
۱.۴.۱ مرز کارایی مقید ۲۱
۲.۴.۱ وزن دهی ۲۳
۵.۱ مرور ادبیات بهینه‌سازی سبد سرمایه با قید کاردینالیتی ۲۴
۱.۵.۱ روش‌های دقیق ۲۵
۲.۵.۱ روش‌های ابتکاری ۲۷

۲ مقدمه‌ای بر شبکه‌های عصبی و ماشین تابو ۳۰
۱.۲ شبکه‌های عصبی ۳۰
۲.۲ شبکه هاپفیلد ۳۴
۱.۲.۲ شبکه هاپفیلد گسسته ۳۴
۲.۲.۲ شبکه هاپفیلد پیوسته ۳۵
۳.۲ جستجوی تابو ۳۷
۴.۲ ماشین تابو ۳۷
۱.۴.۲ ساختار ماشین تابو ۳۹
۲.۴.۲ تابع انرژی ۳۹
۳.۴.۲ سازوکار تغییر وضعیت ۴۰
۱.۳.۴.۲ حرکت ۴۰
۲.۳.۴.۲ شرط تابو ۴۱
۳.۳.۴.۲ قاعده آرمانی ۴۱
۴.۳.۴.۲ فرآیند حافظه کوتاه مدت ۴۱
۵.۳.۴.۲ فرآیند حافظه بلند مدت ۴۲
۶.۳.۴.۲ قاعده توقف ۴۲

۳ الگوریتم‌های ابتکاری برای حل مساله بهینه‌سازی سبد سرمایه با قید کاردینالیتی ۴۴
۱.۳ مساله بهینه‌سازی سبد سرمایه با قید کاردینالیتی ۴۴
۲.۳ نحوه نمایش جواب و الگوریتم ارزیابی ۴۶
۳.۳ الگوریتم ژنتیک ۴۸
۴.۳ جستجوی تابو ۵۰
۵.۳ سردکاری تدریجی ۵۳
۶.۳ روش ابتکاری مبتنی بر شبکه‌های عصبی ۵۵
۱.۶.۳ دینامیک شبکه ۵۶

۲.۶.۳ تامین قیود مساله ۵۷

۴ روش‌های پیشنهادی **۶۱**
۱.۴ ماشین تابوی آمیخته ۶۶
۱.۱.۴ ساختار ماشین تابوی آمیخته ۶۶
۲.۱.۴ تابع انرژی ۶۶
۳.۱.۴ بهنگام‌سازی نرون‌ها ۶۷
۴.۱.۴ سازوکار تغییر وضعیت ۶۹
۱.۴.۱.۴ شرط تابو ۶۹
۲.۴.۱.۴ قاعده آرمانی ۶۹
۳.۴.۱.۴ فرآیند حافظه کوتاه مدت ۷۰
۴.۴.۱.۴ فرآیند اصلاح نرون‌های روشن ۷۰
۵.۱.۴ برقراری قیود ۷۱
۲.۴ روش کاهش شکاف ۷۵
۱.۲.۴ شاخص شکاف ۷۵
۲.۲.۴ شاخص شکاف در مرز کارایی مقید ۷۶
۳.۲.۴ ساختار روش ۷۷
۱.۳.۲.۴ مرحله اول ۷۷
۲.۳.۲.۴ مرحله دوم ۷۷

۵ نتایج عددی **۷۹**
۱.۵ مجموعه داده‌های آزمایش ۷۹
۲.۵ محاسبه خطا ۸۰
۱.۲.۵ محاسبه درصد انحراف ۸۰
۲.۲.۵ معیارهای ارزیابی خطا ۸۲
۳.۵ تعیین پارامترهای MTM ۸۳
۴.۵ ارزیابی الگوریتم‌های ابتکاری در شرایط نابرابر ۸۷
۱.۴.۵ بررسی نتایج ۸۸
۵.۵ ارزیابی الگوریتم‌های ابتکاری با شرط حداکثر تعداد نقاط محاسبه شده وابسته به K ۹۱
۱.۵.۵ بررسی نتایج ۹۱
۶.۵ نتیجه‌گیری ۹۷

آ مروری بر مفاهیم مقدماتی تئوری احتمال ۹۹
آ.۱ تعریف احتمال ۹۹
آ.۲ متغیر تصادفی و توابع توزیع و چگالی احتمال ۱۰۰
آ.۱.۲ تابع توزیع ۱۰۰
آ.۲.۲ تابع چگالی ۱۰۰
آ.۳ امید ریاضی و واریانس ۱۰۱
آ.۱.۳ امید ریاضی ۱۰۱
آ.۲.۳ واریانس ۱۰۱
آ.۴ متغیرهای تصادفی با توزیع توأم ۱۰۲
آ.۱.۴ توابع توزیع و چگالی توأم ۱۰۲
آ.۲.۴ کوواریانس و همبستگی ۱۰۲

مراجع ۱۰۴

فهرست الگوریتم‌ها

۱ ماشین تابو [۱۵۰] ۴۲
۲ ارزیابی [۳۹] ۴۶
۳ ژنتیک [۳۹] ۴۹
۴ جستجوی تابو [۳۹] ۵۱
۵ سردکاری تدریجی [۳۹] ۵۴
۶ شبکه عصبی [۶۱] ۵۸
۷ follow_Hopfield_dynamics [۶۱] ۵۹
۸ ماشین تابوی آمیخته ۷۱
۹ روش کاهش شکاف ۷۸

فهرست شکل‌ها

۱.۱ مرز کارایی نامقید در مثال ۱.۱.۱ . . . . . ۷
۲.۱ محاسبه ارزش در معرض خطر با استفاده از توزیع احتمالی تغییرات ارزش سبد سرمایه با سطح اطمینان $X\%$ [۱] ۱۳
۳.۱ مقدار ارزش در معرض خطر این نمودار مشابه نمودار ۲.۱ است، با این تفاوت که میزان ضرر بالقوه در این‌جا بزرگتر است [۱]. ۱۳
۴.۱ کلیه حالات شدنی با دو کالا [۳۹] ۲۲
۵.۱ مرز کارایی مقید [۳۹] ۲۳
۶.۱ مرز کارایی با کمینه سهم تخصیصی ۰٫۲۴ [۳۹] ۲۴
۷.۱ مرز کارایی مقید-قسمت‌های دست نیافتنی [۳۹] ۲۵
۸.۱ مرز کارایی مقید-قسمت‌های دست یافتنی [۳۹] ۲۶

۱.۲ مشخصات اصلی یک نرون زیستی [۷۱] ۳۱
۲.۲ یک نرون مصنوعی ساده [۷۱] ۳۲
۳.۲ مثالی ساده از شبکه عصبی [۷۱] ۳۲
۴.۲ ساختار شبکه هاپفیلد [۶] ۳۵
۵.۲ طرح کلی از جستجوی تابو ۳۸

۱.۳ مرز کارایی مقید حاصل از الگوریتم‌های ابتکاری [۳۹] ۴۵

۱.۵ انحراف از مرز کارایی پیوسته ۸۱
۲.۵ نتایج ماشین تابوی آمیخته به ازای $C = ۲۵$، $\eta = ۳, ۵, ۷, ۹$ و $l = ۵, \ldots, ۱۵$ ۸۴
۳.۵ نتایج ماشین تابوی آمیخته به ازای $C = ۱۰, ۲۰, ۲۵, ۳۰$، $\eta = ۷$ و $l = ۵, \ldots, ۱۵$ . . . ۸۵
۴.۵ نتایج ماشین تابوی آمیخته به ازای $C = ۲۵$، $\eta = ۷$ و $l = ۵, \ldots, ۱۵$ ۸۶

فهرست جدول‌ها

۱.۱ نمونه‌ای از بازار مالی با چهار کالا [۳۹]. ۶

۱.۵ نتایج ماشین تابوی آمیخته به ازای $l = ۱۱$، $C = ۲۵$، $\eta = ۷$ و $P = ۰/۳, ۰/۵, ۰/۷$ . . ۸۷

۲.۵ نتایج مرز کارایی مقید ۸۹

۳.۵ تعداد نقاط بررسی شده توسط الگوریتم‌های GA، TS، SA، NN، MTM و BG ۸۹

۴.۵ درصد مشارکت نقاط حاصل از هر الگوریتم در مرز کارایی تجمعی ۹۰

۵.۵ نتایج مرز کارایی مقید با محاسبه حداکثر K۱۲۰۰۰۰ نقطه و $K = ۱۰$ ۹۲

۶.۵ درصد مشارکت نقاط حاصل از هر الگوریتم در مجموعه کارای تجمعی به ازای محاسبه حداکثر K۱۲۰۰۰۰ نقطه در هر الگوریتم و $K = ۱۰$ ۹۲

۷.۵ نتایج مرز کارایی مقید با محاسبه حداکثر K۱۲۰۰۰۰ نقطه و $K = ۹$ ۹۳

۸.۵ درصد مشارکت نقاط حاصل از هر الگوریتم در مجموعه کارای تجمعی به ازای محاسبه حداکثر K۱۲۰۰۰۰ نقطه در هر الگوریتم و $K = ۹$ ۹۳

۹.۵ نتایج مرز کارایی مقید با محاسبه حداکثر K۱۲۰۰۰۰ نقطه و $K = ۸$ ۹۴

۱۰.۵ درصد مشارکت نقاط حاصل از هر الگوریتم در مجموعه کارای تجمعی به ازای محاسبه حداکثر K۱۲۰۰۰۰ نقطه در هر الگوریتم و $K = ۸$ ۹۴

۱۱.۵ نتایج مرز کارایی مقید با محاسبه حداکثر K۱۲۰۰۰۰ نقطه و $K = ۷$ ۹۵

۱۲.۵ درصد مشارکت نقاط حاصل از هر الگوریتم در مجموعه کارای تجمعی به ازای محاسبه حداکثر K۱۲۰۰۰۰ نقطه در هر الگوریتم و $K = ۷$ ۹۵

۱۳.۵ تعداد نقاط بررسی شده توسط MTM به ازای مقادیر مختلف K ۹۶

پیش‌گفتار

سبد سرمایه[۱] به مجموعه‌ای از دارایی‌های مالی مانند سهام، اوراق قرضه و وجوه نقدی اطلاق می‌شود که تشکیل و مدیریت آن موضوع یکی از پرچالش‌ترین مباحث مدیریت و تحلیل سرمایه گذاری می‌باشد. هدف از تشکیل سبد کالا، تقسیم‌کردن ریسک سرمایه‌گذاری بین چند کالا است؛ بدین ترتیب سود یک کالا می‌تواند ضرر کالای دیگر را جبران کند [۵]. در اوایل دهه ۱۹۵۰، هری مارکویتز[۲] [۱۰۵] مدل پایه سبد سرمایه را ارائه نمود که نظریه نوین سبد سرمایه بر آن استوار است. مدل مارکویتز کمینه‌سازی ریسک سبد سرمایه به ازای یک سطح معین بازده یا بیشینه‌سازی بازده به ازای یک سطح معین ریسک می‌باشد.

یکی از مشکلاتی که در رابطه با مدل بهینه‌سازی سبد سرمایه مارکویتز وجود دارد آن است که معمولا سبد حاصل از این مدل به منظور کاهش ریسک، شامل سرمایه‌گذاری‌های کوچک در تعداد زیادی از کالاها می‌باشد. باید توجه نمود که مدیریت سبدهای سرمایه‌ای که شامل تعداد زیادی کالا است، دشوار بوده و نیز هزینه معاملاتی زیادی را برای سرمایه‌گذار ایجاد می‌کند. یکی از روش‌ها برای رفع این مشکل، ایجاد محدودیت بر روی تعداد کالاهای سبد سرمایه و نیز تعیین کران برای سرمایه اختصاص یافته به هر کالا می‌باشد که در این صورت مدل حاصل، بهینه‌سازی سبد سرمایه با قید کاردینالیتی[۳] نامیده می‌شود [۳۹]. مدل مذکور یک بهینه‌سازی عدد صحیح آمیخته و از درجه دشواری NP-hard است [۱۱۴]. در این پایان‌نامه برای حل مساله بهینه‌سازی سبد سرمایه با قید کاردینالیتی، روشی مبتنی بر شبکه عصبی پیشنهاد می‌کنیم.

شبکه‌های عصبی مصنوعی[۴] ساختاری برای پردازش اطلاعات می‌باشند که با تقلید از شبکه‌های عصبی زیستی مانند مغز انسان، ساخته شده‌اند. این شبکه‌ها شامل تعداد زیادی واحد محاسباتی به نام نرون بوده که با اتصالات داخلی به یکدیگر مرتبط شده و برای حل مسائل گوناگونی از جمله تشخیص الگو[۵] [۱۲۶] و طبقه‌بندی داده‌ها[۶] [۷۰] به کار گرفته می‌شوند.

استفاده از شبکه‌های عصبی برای حل مسائل بهینه‌سازی با مقاله تانک[۷] و هاپفیلد[۸] [۷۹] در ۱۹۸۵، آغاز

[۱] Portfolio
[۲] Harry Markowitz
[۳] Cardinality constrained portfolio optimisation problem
[۴] Artificial Neural Network
[۵] Pattern recognition
[۶] Data classification
[۷] Tank
[۸] Hopfield

گشت و تاکنون نیز توجه پژوهشگران بسیاری را به خود جلب نموده است. مشکل عمده شبکه هاپفیلد [۷۹] در بهینه‌سازی، آن است که از هیچ سازوکاری برای فرار از بهینه‌های محلی برخوردار نبوده، لذا جواب حاصل ممکن است اختلاف زیادی با جواب بهینه سراسری داشته باشد. با توجه به این محدودیت، تلاش‌های فراوانی برای بهبود عملکرد شبکه هاپفیلد به خصوص از طریق ترکیب این روش با برخی الگوریتم‌های ابتکاری انجام شده است [۸، ۸۵، ۱۳۳، ۱۳۸، ۱۵۰، ۱۶۹]. اما بیشتر شبکه‌های عصبی که از سازوکاری برای گریز از بهینه‌های محلی برخوردارند، گسسته مقدار بوده و برای مسائل بهینه‌سازی ترکیبیاتی مطرح می‌شوند. موضوعی که کمتر به آن توجه شده است، استفاده از سازوکاری برای فرار از بهینه‌های محلی در شبکه‌های پیوسته مقدار و مخصوصاً شبکه‌های آمیخته (پیوسته و گسسته مقدار) می‌باشد. آنچه در این پایان‌نامه به آن می‌پردازیم، معرفی شبکه عصبی است که علاوه بر مقادیر گسسته، شامل مقادیر پیوسته نیز می‌باشد. افزون بر این برای گریز از بهینه‌های محلی در شبکه عصبی پیشنهادی، هدایت حرکت شبکه در هر دو فضای گسسته و پیوسته به وسیله جستجوی تابو انجام می‌شود.

در فصل ۱، به معرفی مدل میانگین-واریانس مارکویتز [۱۰۵] برای بهینه‌سازی سبد سرمایه و برخی کارهایی که برای بهبود مدل پیشنهاد شده است، می‌پردازیم. افزون بر این در این فصل به منظور تبیین جایگاه و اهمیت مساله بهینه‌سازی سبد سرمایه با قید کاردینالیتی، ادبیات این مساله به صورت مروری ارائه می‌گردد.

در فصل ۲، مقدمه‌ای کوتاه از شبکه‌های عصبی به خصوص شبکه هاپفیلد گسسته و پیوسته ارائه می‌گردد. در ادامه نیز به معرفی ماشین تابوی[۱] [۱۵۰] سان[۲] و نعمتی[۳] می‌پردازیم که از ساختاری مشابه شبکه هاپفیلد گسسته برخوردار بوده و از جستجوی تابو برای هدایت حرکت شبکه بهره می‌برد.

در فصل ۳، برای حل مساله بهینه‌سازی سبد سرمایه با قید کاردینالیتی، چهار روش ابتکاری مورد بررسی قرار می‌گیرد؛ الگوریتم ژنتیک[۴]، جستجوی تابو، سردکاری تدریجی[۵] و شبکه‌های عصبی. سه روش اول توسط چانگ[۶] و همکاران [۳۹] و روش مبتنی بر شبکه‌های عصبی توسط فرناندز[۷] و گمز[۸] [۶۱] ارائه شده است.

در بخش اول فصل ۴، روشی برای حل مساله بهینه‌سازی سبد سرمایه با قید کاردینالیتی پیشنهاد می‌شود که همزمان از شبکه‌های عصبی گسسته و پیوسته مقدار، و جستجوی تابو استفاده می‌کند. روش پیشنهادی دارای ساختاری مشابه ماشین تابو [۱۵۰] می‌باشد، با این تفاوت که برای توصیف وضعیت نرون‌ها علاوه بر متغیرهای دودویی، از متغیرهای حقیقی مقدار نیز استفاده می‌شود. از این روی روش پیشنهادی تعمیمی بر ماشین تابو بوده و آن را ماشین تابوی آمیخته[۹] می‌نامیم. در بخش دوم این فصل به کمک مفهوم شاخص شکاف، ساختاری دو مرحله‌ای برای افزایش دقت مرز کارایی حاصل از مساله بهینه‌سازی سبد سرمایه با قید کاردینالیتی و نیز کاهش

[۱] Tabu Machine
[۲] Sun
[۳] Nemati
[۴] Genetic Algorithm
[۵] Simulated Annealing
[۶] Chang
[۷] Fernandez
[۸] Gomez
[۹] Mixed Tabu Machine

زمان محاسبات، پیشنهاد می‌شود. این روش بهبودی بر الگوریتم ژنتیک چانگ و همکاران [۳۹] می‌باشد.

در فصل ۵، پس از معرفی مجموعه داده‌های آزمایش، نحوه محاسبه خطا معرفی می‌شود. پس از تعیین پارامترهای ماشین تابوی آمیخته از طریق تعدادی آزمایش عددی، در دو بخش با شرایط متفاوت به مقایسه الگوریتم‌های پیشنهادی و الگوریتم‌های موجود می‌پردازیم. آزمایش‌های عددی در این فصل، تاییدی بر کارایی الگوریتم‌های پیشنهادی در حل مساله بهینه‌سازی سبد سرمایه با قید کاردینالیتی می‌باشد.

فصل ۱
مقدمه‌ای بر مساله بهینه‌سازی سبد سرمایه

> علت عمده‌ای که باعث می‌شود بیشتر مردم در تنگناهای مالی بسر ببرند این است که آنان سال‌های سال از عمر خود را در مدارس می‌گذرانند اما در خصوص پول هیچ چیز یاد نمی‌گیرند؛ نتیجه این است که مردم فقط یاد می‌گیرند برای پول کار کنند... اما هیچ‌گاه یاد نمی‌گیرند چه کنند تا پول برایشان کار کند.
>
> رابرت کیوساکی [۳]

هدف اصلی در مقوله سرمایه گذاری، کسب پول و دارایی است. مسلما با یک درآمد ثابت نمی توان به هر آنچه که در زندگی نیاز است دست پیدا کرد؛ بنابراین شرکت در یک سرمایه‌گذاری هوشمندانه می تواند کمک شایانی در این زمینه باشد. بدیهی است که در یک تصمیم‌گیری منطقی میزان وجوهی که به فرصت‌های مختلف سرمایه‌گذاری اختصاص می‌یابد، متناسب با بازده و ریسک آن‌ها است. برخی از فرصت‌های سرمایه‌گذاری که شخص با انتخاب یک یا چند مورد از آن‌ها می‌تواند سبد سرمایه خود را ایجاد کند، عبارتند از [۷]:

- سرمایه گذاری در حرفه تخصصی خود (یا دیگران): فردی که در یک حرفه مشغول به کار است می تواند بخشی (در اکثر مواقع درصدی بزرگ) از سرمایه خود را در حرفه‌اش سرمایه‌گذاری کند. به عنوان مثال، یک فروشنده کالاهای صوتی و تصویری می‌تواند ویترین خود را از کالاهای حرفه خود پر کند.
- سرمایه‌گذاری در بورس اوراق بهادار (سهام): بازار سهام یا بازار بورس به دلیل قابلیت بازدهی قابل توجه در زمان اندک، از اهمیت بیشتری در میان سایر فرصت‌های سرمایه گذاری برخوردار است. این بازار عمدتا دارای بازدهی زیاد و متناسب با آن، دارای ریسک بالایی نیز می‌باشد.
- سرمایه‌گذاری در مسکن و مستغلات: بازار مسکن و مستغلات در تمام دنیا دارای شیب ملایم رشد، بازدهی کم و ریسک بسیار پایین است. معاملات مسکن و نگهداری مستغلات راهی مطمئن برای حفظ ارزش سرمایه محسوب می‌گردد.

- سرمایه‌گذاری در ارزهای بین المللی: تبدیل بخشی از سرمایه به ارزهای رایج دیگر کشورها این امکان را برای سرمایه‌گذار فراهم می‌کند که از رشد و افت ارزها، سود کسب کند.
- سرمایه‌گذاری در اوراق مشارکت با سود تضمینی: برخی شرکت‌ها برای اجرای طرح‌های توسعه‌ای خود اوراق مشارکتی با سود تضمینی (با تعیین سررسید مثلا ۵ ساله) منتشر می‌کنند که از بازدهی بالاتری نسب به سرمایه‌گذاری در بانک برخوردار است.
- سرمایه‌گذاری در بانک (سود بانکی): این نوع سرمایه‌گذاری (کوتاه مدت یا بلند مدت) دارای بازدهی بسیار کم و قاعدتا ریسک پایینی می‌باشد. مهمترین مزیت این نوع سرمایه‌گذاری، سهولت وصول اصل و سود آن می‌باشد. به همین دلیل تقریبا پول نقد محسوب است.

انتخاب هر یک از فرصت‌های سرمایه‌گذاری بیان شده، یک کالا[۱] در سبد سرمایه می‌باشد. غالبا ایجاد سبد سرمایه با تمرکز بر روی بورس اوراق بهادار انجام می‌پذیرد؛ سرمایه‌گذاری بر روی سهام هر شرکت، یک کالا در سبد سرمایه محسوب می‌شود.

اگرچه هدف اصلی در سرمایه‌گذاری کسب سود می‌باشد، اما دغدغه اصلی سرمایه‌گذاران کاهش ریسکی است که همواره سرمایه‌گذاری آن‌ها را مورد تهدید قرار می‌دهد. در دوره‌ای که سرمایه‌گذاران از هیچ ابزار علمی برای محاسبه ریسک سرمایه‌گذاری و کاهش آن برخوردار نبودند، بنابر تجربه از متنوع‌سازی سرمایه‌گذاری به عنوان راهکاری موثر در کاهش ریسک استفاده می‌کردند؛ در نمایشنامه تاجر ونیزی اثر شکسپیر[۲]، آنتونیو (تاجر) می‌گوید [۲]:

> تمامی تجارت من به یک کشتی یا به یک نقطه منحصر نشده و تمام دارایی خود را به‌دست تقدیر سال جاری نسپرده‌ام؛ پس، کالای من نیست که من را غمگین می‌سازد.
>
> پرده اول، صحنه اول

آن چه تا پیش از اوایل دهه ۱۹۵۰، کمبود آن عمیقا احساس می‌شد، نظریه سرمایه گذاری بود که بتواند تاثیر متنوع‌سازی را در شرایط همبستگی ریسک‌ها پوشش دهد، تفاوت میان سرمایه گذاری کارا و ناکارا را بیان کند، و تحلیلی از تعادل ریسک و بازده[۳] متناظر با کل سبد سرمایه ارائه دهد [۱۰۸]؛ بنابراین در سال ۱۹۵۲، هری مارکویتز [۱۰۵] با انتشار مقاله‌ای با عنوان «انتخاب سبد سرمایه» در «مجله سرمایه گذاری» مدل پایه سبد سرمایه را بنیان نهاد. مارکویتز را به واسطه این مقاله که پایه‌های نظریه نوین سبد سرمایه بر آن استوار است، پدر نظریه نوین سبد سرمایه گویند [۱۰۸]. افزون بر این وی در سال ۱۹۹۰، به خاطر این مقاله، موفق گشت جایزه نوبل اقتصاد را به صورت مشترک با مرتون میلر[۴] و ویلیام شارپ[۵]، دریافت کند.[۶]

[۱] Asset
[۲] Shakespeare
[۳] Return
[۴] Merton Miller
[۵] William Sharpe
[۶] برای مطالعه بیشتر تاریخچه نظریه نوین سبد سرمایه، [۱۰۸] را ببینید.

اساس نظریه نوین سبد سرمایه بر آن است که انتخاب کالا برای حضور در سبد نباید تنها با تکیه بر ارزش آن صورت گیرد؛ تغییر قیمت یک کالا می‌تواند قیمت سایر کالاها را نیز تحت تاثیر قرار دهد؛ بنابراین در ایجاد سبد سرمایه باید به چگونگی تغییر قیمت هر کالا متناسب با قیمت سایر کالاهای موجود در سبد توجه شود. مدل بهینه‌سازی سبد سرمایه مارکویتز که به مدل میانگین-واریانس نیز معروف است، کمینه‌سازی ریسک سبد سرمایه به ازای یک سطح معین بازده یا بیشینه‌سازی بازده به ازای یک سطح معین ریسک می‌باشد. مدل مارکویتز را می‌توان به صورت یک مساله بهینه‌سازی دو هدفه، کمینه کردن ریسک و بیشینه‌سازی بازده، نیز بیان کرد.

مشابه هر مدل یا نظریه‌ای که بر پایه برخی فرضیات ارائه می‌گردد، ساختار نظریه نوین سبد سرمایه متکی بر فرضیات زیر است [۴]:

- سرمایه‌گذاری برای یک دوره زمانی انجام می‌شود.
- همه سرمایه‌گذاران به دنبال بیشینه نمودن بازده مورد انتظار و کاهش ریسک سرمایه‌گذاری خود می‌باشند.
- بازده کالاها متغیرهای تصادفی با توزیع نرمال می‌باشند.
- همبستگی میان بازده کالاها ثابت است.
- همه سرمایه‌گذاران به اطلاعات مشابهی، به طور همزمان دسترسی دارند.
- هیچ گونه مالیات و هزینه معاملاتی[۱] وجود ندارد.
- همه سرمایه گذاران قیمت‌گیرنده هستند؛ به این معنا که رفتار آن‌ها تاثیری در قیمت‌ها ندارد.
- همه کالاها قابلیت تقسیم شدن به هر اندازه‌ای را دارند؛ یعنی سرمایه‌گذاری بر روی یک کالا با هر کسری از سرمایه امکان‌پذیر است.

در ادامه به معرفی کامل‌تری از مدل میانگین-واریانس مارکویتز می‌پردازیم. افزون بر این، برخی از توابع هدف جایگزین و نیز برخی قیود که برای بهبود مدل مارکویتز پیشنهاد شده است را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در پایان نیز بررسی دقیق‌تری از مدل بهینه‌سازی سبد سرمایه با قید کاردینالیتی و مروری بر ادبیات این مدل ارائه می‌شود.

۱.۱ مدل میانگین-واریانس

در مدل مارکویتز فرض بر این است که بازده کالاها دارای توزیع نرمال چندمتغیره می‌باشند. هسته اصلی مدل مارکویتز بر این اساس است که امید ریاضی بازده یک سبد سرمایه‌گذاری به عنوان بازده سرمایه‌گذاری و واریانس آن به عنوان ریسک سرمایه‌گذاری در نظر گرفته شود. فرض کنید:

[۱] Transaction cost

N کالای مالی برای سرمایه‌گذاری در دسترس است،
R_i و w_i $(i = ۱, \ldots, N)$ به ترتیب بازده و سهم کالای i از کل سرمایه و
R_p بازده کل سبد سرمایه باشد (R_i و R_p متغیرهای تصادفی می‌باشند)؛
بازده مورد انتظار سبد سرمایه با توجه به رابطه (آ.۲۲) در پیوست، به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} E(R_p) &= E(\sum_{i=۱}^{N} R_i w_i) \\ &= \sum_{i=۱}^{N} \mu_i w_i \end{aligned} \tag{۱.۱}$$

که در آن $\mu_i = E(R_i)$. فرض کنید σ_i انحراف معیار کالای i $(i = ۱, \ldots, N)$، ρ_{ij} و σ_{ij} به ترتیب ضریب همبستگی و کوواریانس بین کالاهای i و j $(i, j = ۱, \ldots, N)$ باشد، واریانس سبد سرمایه با توجه به رابطه (آ.۲۴) در پیوست، به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} var(R_p) &= \sum_{i=۱}^{N} \sum_{j=۱}^{N} w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \\ &= \sum_{i=۱}^{N} \sum_{j=۱}^{N} w_i w_j \sigma_{ij}. \end{aligned} \tag{۲.۱}$$

که در آن $\sigma_{ij} = \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$.

اکنون با فرض آن که R^* مقدار بازده مورد نظر برای سبد سرمایه می‌باشد، مدل میانگین-واریانس مارکویتز [۵۸، ۵۰، ۱۰۵، ۱۰۷، ۱۲۹] به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\text{minimize} \quad \sum_{i=۱}^{N} \sum_{j=۱}^{N} w_i w_j \sigma_{ij} \tag{۳.۱}$$

$$\text{subject to :} \quad \sum_{i=۱}^{N} w_i \mu_i = R^*, \tag{۴.۱}$$

$$\sum_{i=۱}^{N} w_i = ۱, \tag{۵.۱}$$

$$۰ \leq w_i \leq ۱. \tag{۶.۱}$$

تابع هدف (۳.۱) کمینه‌سازی واریانس سبد سرمایه (ریسک) را بیان می‌کند. محدودیت (۴.۱) شرط امید ریاضی سبد برابر R^* را بیان می‌کند. قید (۵.۱) سرمایه‌گذاری کل بودجه در دسترس را تضمین می‌کند. قید (۶.۱) پیش فروش کالا را ناممکن می‌سازد. توجه کنید که w_i ها متغیرهای حقیقی هستند.

ماتریس کوواریانس که در تابع هدف (۳.۱) مورد استفاده قرار می‌گیرد، نیمه معین مثبت می‌باشد [۲۴، ۲۵،

۱۷۴]. لذا تابع هدف محدب بوده و مساله بیان شده (۳.۱)- (۶.۱) یک برنامه‌ریزی محدب درجه دوم می‌باشد که روش‌های حل دقیق و کارا برای آن موجود است [۵۵، ۹۷].

با تعریف بردار وزن کالاها در سبد سرمایه به صورت $w = [w_۱, \ldots, w_N]^T$، بردار بازده کالاها به صورت $\mu = [\mu_۱, \ldots, \mu_N]^T$ و ماتریس کوواریانس به صورت $\sigma = (\sigma_{ij})_{N\times N}$، مدل بهینه‌سازی سبد سرمایه (۳.۱)-(۶.۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\text{minimize} \quad w^T \sigma w \tag{۷.۱}$$

$$\text{subject to :} \quad w^T \mu = R^*, \tag{۸.۱}$$

$$w^T \mathbf{۱} = ۱, \tag{۹.۱}$$

$$۰ \leq w \leq ۱. \tag{۱۰.۱}$$

که در آن $\mathbf{۱}$ بردار N تایی از یک‌ها می‌باشد.

۱.۱.۱ مرز کارایی[۱]

با توجه به مدل میانگین-واریانس ارائه شده (۳.۱)-(۶.۱)، سبد سرمایه w^* را بهینه یا کارا گوییم اگر در یک سطح بازده برابر، سبدی با ریسک کمتر از w^* وجود نداشته باشد یا در یک سطح ریسک مساوی، سبدی با بازده بیشتر از w^* موجود نباشد.

سبدهای سرمایه کارایی که با حل برنامه ریزی درجه دوم (۳.۱)-(۶.۱) به ازای مقادیر مختلف R^* حاصل می‌شوند، مرز کارایی مساله را تشکیل می‌دهند. در واقع مرز کارایی، منحنی هموار و غیر نزولی می‌باشد که بهترین تعادل ممکن میان ریسک و بازده را نشان می‌دهد. سبدهای سرمایه‌ای که روی این مرز واقع می‌شوند، سبدهای بهینه یا کارا نامیده می‌شوند. سبدهای سرمایه‌ای که زیر این مرز کارایی قرار دارند، سبدهای ناکارا هستند چرا که در ریسک برابر سبدی با بازده بیشتر (روی منحنی) وجود دارد.

چنانچه قید جدیدی به مجموعه قیود مدل (۳.۱)-(۶.۱) اضافه نشود، مرز کارایی حاصل را مرز کارایی نامقید می‌نامیم. مرز کارایی در حالتی که قید جدیدی برای مدل تعریف شود، مرز کارایی مقید گفته می‌شود. در ادامه مثالی را از مرز کارایی نامقید ارائه می‌کنیم.

مثال ۱.۱.۱. نمونه‌ای با ۴ کالا را در نظر می‌گیریم که از شاخص بازار[۲] FTSE100 در انگلیس استخراج شده است. اطلاعات این نمونه شامل بازده، انحراف معیار و ماتریس همبستگی کالاها می‌باشد که در جدول ۱.۱ نمایش داده شده است. با حل مدل (۳.۱)-(۶.۱) با استفاده از داده‌های جدول ۱.۱ و $N = ۴$ به ازای یک مقدار مشخص بازده (R^*)، جواب بهینه w^* حاصل می‌شود که نشان دهنده سبد سرمایه بهینه متناظر با بازده R^* می‌باشد. متناظر هر سبد سرمایه دوتایی مرتب (x, y) را در نظر می‌گیریم که مؤلفه‌های آن به ترتیب ریسک و بازده

[۱] Efficient frontier
[۲] Market index

سبد را نشان می‌دهد. بنابراین حل مدل (۳.۱)-(۶.۱) به ازای مقادیر مختلف R^* به مجموعه‌ای از دوتایی‌های (x, y) منجر می‌شود که مرز کارایی نشان داده شده در شکل ۱.۱ را ایجاد می‌کنند.

جدول ۱.۱: نمونه‌ای از بازار مالی با چهار کالا [۳۹].

کالا	بازده (هفتگی)	انحراف معیار استاندارد	ماتریس همبستگی			
			۱	۲	۳	۴
۱	۰/۰۰۴۷۹۸	۰/۰۴۶۳۵۱	۱	۰/۱۱۸۳۶۸	۰/۱۴۳۸۲۲	۰/۲۵۲۲۱۳
۲	۰/۰۰۰۶۵۹	۰/۰۳۰۵۸۶		۱	۰/۱۶۴۵۸۹	۰/۰۹۹۷۶۳
۳	۰/۰۰۳۱۷۴	۰/۰۳۰۴۷۴			۱	۰/۰۸۳۱۲۲
۴	۰/۰۰۱۳۷۷	۰/۰۳۵۷۷۰				۱

۲.۱.۱ وزن دهی[۱]

با معرفی پارامتر وزن λ ($۰ \leq \lambda \leq ۱$)، مساله بهینه‌سازی سبد سرمایه (۳.۱)-(۶.۱) را به صورت زیر تبدیل می‌کنیم:

$$\text{minimize} \quad \lambda \sum_{i=۱}^{N} \sum_{j=۱}^{N} w_i w_j \sigma_{ij} - (۱-\lambda) \sum_{i=۱}^{N} w_i \mu_i \tag{۱۱.۱}$$

$$\text{subject to} : \sum_{i=۱}^{N} w_i = ۱, \tag{۱۲.۱}$$

$$۰ \leq w_i \leq ۱. \tag{۱۳.۱}$$

تبدیل فوق یا وزن دهی یک روش استاندارد برای ایجاد مرز کارایی می‌باشد.

λ را پارامتر ریسک‌هراسی گوییم. در تابع هدف (۱۱.۱) برای $\lambda = ۰$، بازده سبد بدون در نظر گرفتن ریسک آن بیشینه می‌شود و سبد بهینه تنها شامل یک کالا با بیشترین بازده می‌باشد. از طرفی برای $\lambda = ۱$، ریسک سبد بدون لحاظ کردن بازده آن کمینه می‌شود و جواب بهینه شامل چندین کالا خواهد بود. مقادیر متمایز λ ($۰ \leq \lambda \leq ۱$) تعادلی میان ریسک و بازده را نشان می‌دهد که جواب‌های بهینه بین دو مقدار حدی $\lambda = ۰$ و $\lambda = ۱$، قرار می‌گیرد. بنابراین با حل مدل (۱۱.۱)-(۱۳.۱) به ازای مقادیر مختلف λ ($۰ \leq \lambda \leq ۱$)، مرز کارایی نامقید حاصل می‌شود که با مرز حاصل از مدل (۳.۱)-(۶.۱) به ازای مقادیر مختلف R^* کاملا یکسان است [۳۹].

با حل مساله بهینه‌سازی درجه دو (۱۱.۱)-(۱۳.۱) برای مقادیر مختلف λ می‌توان مرز کارایی را به‌دست آورد. به این منظور فرض کنید $\lambda = ۰/۲۵$. بنابراین تابع هدف به صورت [بازده]۰/۷۵ − [ریسک]۰/۲۵ خواهد بود. شکل ۱.۱ مرز کارایی را نشان می‌دهد که به ازای مقادیر متمایز R^* رسم شده است. می‌توان یک سری از

[۱] Weighting