۱

بسم الله الرحمن الرحيم

" بسم ا٥٥٥الرحمن الرحیم "

دانشگاه فردوسی مشهد

دانشکده علوم

پروژه کارشناسی ارشد ریاضی

موضوع :

"کمپلکس مدولهای کسرهای تعمیم یافته وکمپلکس هیوزتعمیم یافته"

به راهنمائی :

استاد ارجمند جناب آقای دکتر محمود یاسی

نگارش : سید محمد هاشمیان

سال تحصیلی

۷۲ ــ ۷۳

شماره ....
تاریخ ....
پیوست ۱۳۷۸/۴/۲۰

مرکز اطلاعات و مدارک علمی ایران
ثبت مدارک

دانشگاه فردوسی مشهد

دانشکدهٔ علوم

بسمه تعالی

جلسهٔ دفاع ازپایان نامه آقای سیدمحمد هاشمیان خلیل آباد دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی درساعت ۱۱/۵ صبح روز یکشنبه ۷۳/۴/۵ دراتاق شماره ۳۳ ساختمان خوارزمی دانشکده علوم ۲ باحضورامضأ کنندگان زیر تشکیل گردید . پس از بررسی ونظر هیات داوران ، پایان نامهٔ نامبرده با نمرهٔ ـ ۱۹, (نوزده تمام) موردتأئید قرارگرفت .

عنوان رساله : " کمپلکس مدولهای کسرهای تعمیم یافته وکمپلکس هیوز تعمیم یافته"

تعداد واحد : ۶ واحـــد

داوررساله : آقای دکتر عبدالجواد طاهری زاده
استادیار گروه ریاضی دانشگاه تربیت معلم ـ اراک

داوررساله : آقای دکترمحمدرضارجب زاده مقدم
استاد گروه ریاضی دانشگاه فردوسی " مشهد "

استادراهنما : آقای دکتر محمود یاسی
استادیار گروه ریاضی ـ دانشگاه فردوسی مشهد

مدیرگروه ریاضی : آقای دکتراسداله نیکنام
دانشیار گروه ریاضی ـ دانشگاه فردوسی " مشهد "

تقدیر وتشکر

باحمدو سپاس الهی که هر قدرتی و هر امکانی از اوست..

و با اهداء سلام وصلوات به محضر امام زمان وروح پرفتوح رهبر کبیر انقلاب حضرت امام خمینی (قدس سره).

دراینجا برخود فرض و لازم می دانم مراتب تشکر وقدردانی خود را از استاد گرانقدر جناب آقای دکتر محمود یاسی که مرا درتهیه این رساله یاری فرمودند،
همچنین جناب آقای دکتر رجب زاده مقدم که الطاف بی شائبه خودرا از اینجانب دریغ نفرمودند،
و نیز جناب آقای دکتر طاهری زاده که قبول زحمت فرموده واز دانشگاه تربیت معلم اراک تشریف آورده اند، ابراز دارم..

بعلاوه از اساتید گروه ریاضی دانشگاه مشهد که از دریای علم آنان بهره برده ام قدردانی نموده واز برادران خوبم، آقایان: محمدعلی کرایه چیان - غلامرضا رضائی - مهری - که با روش مباحثه بایکدیگر درس می خواندیم یاد می کنم..

همچنین زحمات وتلاشهای پدر ومادر عزیز و بزرگوارم راکه امکانات تحصیل مرا فراهم نمودند خاضعانه ارج می نهم، واز همسرم و خواهرم که درتنظیم رساله با من همکاری نمودند تشکر می کنم..

درپایان، این رساله را به ساحت مقدس امام هشتم (ع)، روح بلند حضرت امام خمینی (قدس سره) و ارواح طیبهٔ شهداء اسلام تقدیم می دارم..

((والسلام))

سیدمحمدهاشمیان

مردادماه ۱۳۷۳

مقدمه :

فرض کنید A یک حلقه نوتری جابجائی (با عنصرهمانی غیرصفر) باشد . کمپلکس کوزن $C(A)$ برای A (که در [۱۴] بخش ۲ معرفی گردیده است) یک کمپلکس از A- مدولها و A- همریختی ها بصورت زیر است :

$$0 \xrightarrow{d^{-2}} A \xrightarrow{d^{-1}} A^{0} \xrightarrow{d^{0}} A^{1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow A^{n} \xrightarrow{d^{n}} A^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

با این خاصیت که به ازای هر $n \in \mathbb{N}_0$

$$A^{n} = \bigoplus_{\substack{\underline{p} \in \operatorname{Spec}(A) \\ \operatorname{ht} \underline{p} = n}} (\operatorname{coker} d^{n-2})_{\underline{p}}$$

ما در حالت کلی می توانیم برای یک A- مدول M کمپلکس کوزن $C(M)$ را مانند [بخش ۲ ، ؟] بسازیم . .

بتازگی هیوز نظریه‌ای برپایهٔ $grade$ مشابه کمپلکس کوزن ارائه نموده است که در اینجا ساختمان آن را شرح می دهیم : در اینجا ازمفهوم $grade$ ایده‌آل سره $\underline{b}$ از A استفاده شده است . یادآوری می کنیم که $grade\,\underline{b}$ عبارتست از طول هر A- رشته‌بیشین در $\underline{b}$ و $grade$ ایده‌آل غیرمحض A از A ، ∞ تعبیر می شود. به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}_0$ فرض کنید :

$$g(n) = \{ \underline{b} \lhd A \quad : \quad grade\, \underline{b} \geq n \}$$

در این صورت $g(n)$ تحت رابطهٔ شمول جهتدار است . لذا

$$\varinjlim_{\underline{b} \in g(n+1)} \operatorname{Hom}_A(\underline{b}, E^{n}) \quad , \qquad \varinjlim_{\underline{b} \in g(n+1)} \operatorname{Ext}^{1}_{A}\left(\frac{A}{\underline{b}}, E^{n}\right)$$

دو فانکتور از کتگوری A - مدولها و A - همریختی ها به خودش می باشند

قرار می دهیم $E^{\circ}=A$ و $D^{-2}=0$ و $D^{-1}=A$ وهمریختی

صفر از ۰ به A را با f^{-2} نشان می دهیم . .

بطور استقرائی فرض کنید $n\in \mathbb{N}_{\circ}$ و کمپلکس

$$0 \xrightarrow{f^{-2}} A \xrightarrow{f^{-1}} D^{\circ} \xrightarrow{f^{\circ}} D^{1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow D^{n-2} \xrightarrow{f^{n-2}} D^{n-1}$$

و A - مدول E^{n} و رشته‌دقیق

$$D^{n-2} \xrightarrow{f^{n-2}} D^{n-1} \xrightarrow{\pi_n} E^{n} \longrightarrow 0$$

ساخته شده باشند . .

برای هر ایده‌آل $\underline{b}\in g(n+1)$ ، رشته‌دقیق

$$0 \longrightarrow \underline{b} \longrightarrow A \longrightarrow \frac{A}{\underline{b}} \longrightarrow 0$$

باعث بوجود آمدن رشته دقیق

$$E^{n} \longrightarrow Hom(\underline{b}, E^{n}) \longrightarrow Ext_A^{1}(\frac{A}{\underline{b}}, E^{n}) \longrightarrow 0$$

می شود . اما فانکتور $\varinjlim_{\underline{b}\in g(n+1)}(-)$ دقیق است لذا رشته زیر دقیق است :

$$E^{n} \xrightarrow{\mu_n} \varinjlim_{\underline{b}\in g(n+1)} Hom(\underline{b}, E^{n}) \xrightarrow{\pi_{n+1}} \varinjlim Ext_A^{1}(\frac{A}{\underline{b}}, E^{n}) \longrightarrow 0$$

قرار می دهیم :

$$D^{n} = \varinjlim_{\underline{b}\in g(n+1)} Hom_A(\underline{b}, E^{n}) \quad , \quad E^{n+1} = \varinjlim_{\underline{b}\in g(n+1)} Ext_A^{1}(\frac{A}{\underline{b}}, E^{n})$$

و تعریف می‌کنیم

$$f^{n-1} = \mu_n \circ \pi_n : D^{n-1} \longrightarrow D^n$$

و بدین ترتیب استقراء کامل می شود و کمپلکس هیوز بصورت زیر بدست می‌آید: .

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f^{-1}} D^0 \xrightarrow{f^0} D^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow D^n \xrightarrow{f^n} D^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

در این مقاله بکمک کمپلکس مدولهای کسرهای تعمیم یافته نشان می دهیم

دریک حالت مناسب کمپلکس هیوز با کمپلکس مدولهای کسرهای تعمیم یافته

یکریخت است . .

درفصل اول به معرفی ساختمان کمپلکس کوزن می پردازیم . .

درفصل دوم ساختمان کمپلکس مدولهای کسرهای تعمیم یافته را معرفی‌می‌نمائیم. .

درفصل سوم ساختمان کمپلکسهای هیوز و هیوز تعمیم یافته را بررسی

می کنیم . .

درفصل چهارم یکریختی کمپلکسهای فوق را دربعضی حالتهای مناسب تحقیق

می نمائیم .

فهرست | صفحه

فهرست صفحه

فصل صفر : مقدمات

۰ - ۱ - کلیاتی ازجبرجابجائی :

دربخش اول فصل حاضربه جمع آوری تعاریف ونتایج مقدماتی می پردازیم که آنها رابدون اثبات می آوریم . برای اطلاعات بیشتر به [1] رجوعشود .
دراین بخش A نشاندهندهٔ یک حلقه جابجایی یکدار است .

(۰-۱-۱) تعریف :

فرضکنید $\underline{b}$ و $\underline{c}$ ایده‌آلهای A باشند . دراین صورت بسادگی ملاحظه می شود که مجموعهٔ $(\underline{b}:\underline{c})=\{x\in A:\ x\underline{c}\subseteq\underline{b}\}$ یک ایده‌آل از A است . درحالت خاص اگر $\underline{b}$ را مجموعه صفردرنظربگیریم ، آنگاه مجموعهٔ $(\circ:\underline{c})=\{x\in A\ :\ x\underline{c}=\circ\}$ را پوچساز(۱) $\underline{c}$ نامیم که آن را با $Ann(\underline{c})$ (یا $Ann_A(\underline{c})$) نشان می دهیم .

(۰-۱-۲) تعریف :

حلقه A را نوتری(۲) گوئیم هرگاه دریکی از سه شرط معادل زیر (درنتیجه درتمام آنها) صدق کند :

(i) هرمجموعه غیرتهی از ایده‌آلهای A یک عنصر بیشین نسبت به رابطهٔ $\subseteq$ داشته باشد .

(ii) هررشته صعودی از ایده‌آلهای A سرانجام پایان پذیرد .

---

(۱) Annihilator (۲) Noetherian

(iii) هر ایده‌آل از A متناهیاً تولیدشده‌باشد .

(۰-۱-۳) تعریف :

فرض‌کنید Mو N دو A - مدول باشند . دراین صورت مجموعه تمام A - همریختی ها از Mبه N راکه با (M و N) Hom_A نشان می دهیم ، نسبت به جمع و ضرب اسکالر تعریف‌شده درزیربه ساختار A - مدول مجهز می شود :

به ازای هر $Hom_A(M, N)$ $f, g \in$ ، هر $a \in A$ و هر $x \in M$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(af)(x) = af(x)$$

(۰-۱-۴) زیرمدولهای تولیدشده :

اگر $\{M_i\}_{i \in I}$ خانواده‌ای از زیرمدولهای A - مدول M باشد ، آنگاه واضح استکه $M' = \bigcap_{i \in I} M_i$ نیز زیرمدولی از M خواهد بود . چنانچه J زیر مجموعه‌ای از M باشد ، آنگاه اشتراک تمام زیر مدولهای M که شامل J هستند زیرمدول تولیدشده بوسیلهٔ J نامیده می شود ، که می توان آنرا بصورت زیربیان کرد :

$$(J) = \{m \in M \ : m = \sum_{i=1}^{n} a_i j_i \ , \ a_i \in A \ , \ j_i \in J \ , \ n \in \mathbb{N}\}$$

درحالتی که $J = \{x_1, \dots, x_r\}$ متناهی باشد ، می نویسیم

$(J) = (x_1, \dots, x_r)$.

درحالت خاص اگر $J=\{x\}$ تک عضوی باشد ، آنگاه داریم :

$$(x)=\{ax \ : \ a\in A\}.$$

(۰–۱–۵) :

فرض کنید N و P زیرمدولهای A – مدول M باشند دراین صورت مجموعه $(N:P)_A=\{a\in A \ : \ aP\subseteq N\}$ یک ایده آل از A است . درحالت خاص اگر N را زیر مدول صفر درنظر بگیریم مجموعه $(0:P)_A=\{a\in A \ : \ aP=0\}$ را ایده آل پوچساز گوئیم وبا نماد $Ann_A(P)$ نشان می دهیم .

(۰–۱–۶) جمع مستقیم [۱] مدولها :

فرض کنید M و N دو A – مدول باشند . دراین صورت مجموعهٔ

$$M\oplus N=\{(x,y) \ : \ x\in M \ , \ y\in N\}$$

با عمل جمع و ضرب اسکالر زیرتشکیل یک A– مدول می دهد: به ازای هر x_1 و x_2 و $x\in M$ و هر y_1 و y_2 و $y\in N$ وهر $a\in A$

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)$$

$$a(x,y)=(ax,ay)$$

این A – مدول راجمع مستقیم M و N می نامند .

---

(۱) Direct sum

بطورکلی اگر $\{M_i\}_{i\in I}$ یک خانواده از زیرمدولهای A- مدول M باشد جمع مستقیم آنها $\bigoplus_{i\in I} M_i$ را می توان تعریف کرد که هرعنصر آن بصورت خانواده $(x_i)_{i\in I}$ است به قسمی که $x_i \in M_i$ وتمام x_i ها بجز احتمالا" تعداد متناهی از آنها برابر صفرند. هریک از M_i ها را یک جمعوند مستقیم (۱) $\bigoplus_{i\in I} M_i$ می گوئیم.

(۰-۱-۷) حاصلضرب تنسوری مدولها :

A- مدولهای M ، N و P را درنظربگیرید نگاشت

$$f : M\times N \longrightarrow P$$

دوخطی (۲) نامیده می شود هرگاه دونگاشت $(\forall x\in M)\ \begin{array}{l} N \longrightarrow P \\ y \longmapsto f(x,y)\end{array}$ و $(\forall y\in N)\ \begin{array}{l} M \longrightarrow P \\ x \longmapsto f(x,y)\end{array}$ A- همریختی باشند.

<u>قضیه</u> : A- مدولهای M ، N و T را درنظربگیرید دراین صورت جفت (g و T) شامل A- مدول T و A- دوخطی $g : M\times N \longrightarrow T$ موجود است بطوری که بهازای هر A- مدول P وهر A- دوخطی مفروض $f : M\times N \longrightarrow P$ ، A- همریختی یکتای $f' : T \longrightarrow P$ وجود دارد بقسمی که $f = f'\circ g$. بعلاوه اگر (g و T) و (g' و T') دوجفت با این خاصیت باشندآنگاه یک A- همریختی $j : T \longrightarrow T'$ موجود است

---

(۱) Direct summand (۲) Bilinear

به‌قسمی که $jog=g'$. فرض‌کنید $C=A^{(M\times N)}$ برابر A-مدول آزاد با پایه $M\times N$ باشد دراین صورت هر عنصر C بطوریکتایی ترکیبی خطی از عناصر $M\times N$ باضرایب در A به‌صورت $\sum_{i=1}^{n} a_i(x_i,y_i)$ می‌باشد .

فرض‌کنید D زیر مدول C تولید شده توسط همه عناصری از C بصورت زیرباشند :

$$(x+x',y)-(x,y)-(x',y)$$
$$(x,y+y')-(x,y)-(x,y')$$
$$(ax,y)-a(x,y)$$
$$(x,ay)-a(x,y)$$

حال قرارمی دهیم $T=\frac{C}{D}$. وتصویر هرعنصر پایه (x و y) از C در T را با $x\otimes y$ نشان می دهیم دراین صورت T توسط تمام عناصر بصورت $x\otimes y$ تولید می شود . مدول T راکه به روش‌فوق ساخته شده است حاصلضرب تانسوری [1] M و N نامیده و آنرا بانماد $M\underset{A}{\otimes}N$ نشان می دهیم .

(۰-۱-۸) حلقه ومدول کسرها :

$S\subseteq A$ رایک زیرمجموعه ضربی [2] بسته‌گوئیم هرگاه اولاً" $1\in S$ ،ثانیاً" به‌ازای هر $s_1,s_2\in S$ داشته‌باشیم $s_1s_2\in S$.

---

(۱) Tensor product

(۲) Multiplicatively closed subset

حال در $S \times A$ رابطهٔ $\sim$ را بصورت زیرتعریف می کنیم :

$$(a,s)\sim(a',s') \iff \exists t\in S \;:\; t(s'a-sa')=0 \;.$$

$\sim$ یک رابطهٔ هم‌ارزی است . بهازای هر $(a,s)\in A\times S$ ردهٔ همارزی (a و s) را با $\frac{a}{s}$ نشان می دهیم . دراینصورت مجموعه $\left\{ \frac{a}{s} \;:\; a\in A \;,\; s\in S \right\}$ را با نماد $S^{-1}A$ نشان می دهیم ، که با جمع وضرب زیر ساختار یک حلقه را می پذیرد :

برای هر $a,a'\in A$ و هر $s,s'\in S$

$$\frac{a}{s}\times\frac{a'}{s'}=\frac{aa'}{ss'} \qquad \text{و} \qquad \frac{a}{s}+\frac{a'}{s'}=\frac{as'+a's}{ss'}$$

حلقه $S^{-1}A$ را حلقه کسرهای A نسبت به زیرمجموعه ضربی بسته S می‌نامند.

<u>قضیه :</u> نگاشت طبیعی $\varphi : A \longrightarrow S^{-1}A$ با ضابطهٔ $\varphi(a)=\frac{a}{1}$ دارای خواص زیر است :

(آ) $s\in S$ اگر و فقط اگر $\frac{s}{1}$ در $S^{-1}A$ یکه باشد .

(ب) برای هر $a\in A$ ، $\varphi(a)=0$ اگر وفقط اگر $s\in S$ موجود باشدبطوری که $sa=0$.

(پ) هرعنصر $\frac{a}{s}\in S^{-1}A$ را می توان بصورت $\frac{a}{s}=\frac{a}{1}\times\frac{1}{s}=\frac{\varphi(a)}{\varphi(s)}$ نوشت .

فرض‌کنید M یک A- مدول و S یک زیرمجموعه‌ضربی بسته A باشدرابطهٔ $\sim$ را در $S \times M$ بصورت زیرتعریف می کنیم :