بسم الله الرحمن الرحیم

ستایش وسپاس

درابتدای سخن حمد وثنای محبوب رابه جای می آورم وکلام راباستایش خدای مهربان آغاز می کنم. اکنون که باعنایت خداوندتوفیق اتمام این رساله نصیبم شد شایسته است مراتب سپاس وبندگی رابجای آورم.

ازاستاد ارجمند جناب آقای دکتر محمدوحید تکوک که همواره باراهنمایی های ارزنده شان راه گشای من بودند ودرطی این مدت زحمات فراوانی رامتحمل شدند ، بسیار سپاس گزارم.

همچنین برخود لازم می دانم اززحمات مشفقانه جناب آقای دکتر علی عزیزی که درطی انجام این رساله بسیار مرا راهنمایی نمودند تشکر نمایم.

ازجناب آقای دکترصمد بهروزی وجناب آقای دکتر اردشیر رابعی که قضاوت این پایان نامه رابه عهده گرفتند کمال تشکر رادارم.

درپایان زحمات بی دریغ وهمراهی خانواده ی عزیزم را که در همه مراحل زندگی همواره در کنار من بودند ارج می نهم وازایشان سپاس گزارم.

تقدیم به :

پدر ومادر عزیزم

چکیده

در این پایان نامه کوانتش هموردای میدان جرم دار، اسپین۳/۲ در فضاـ زمان دوسیتر بررسی خواهد شد.

درابتدانگاهی اجمالی به چگونگی شکل گیری فضای منحنی وسیرتاریخی وتکاملی تئوری میدان های کوانتومی خواهیم

داشت.

سپس شرح مختصری ازفضا–زمان دوسیتررا که جواب معادله کیهانشناسی اینشتین است ،بیان می کنیم. درادامه مروری برکوانتش میدان های اسکالر، برداری، اسپینوری و میدان هایی بااسپین ۳/۲ خواهیم داشت.

اساس کار در فرایند کوانتش میدان ، محاسبه معادله میدان از رهیافت نظریه گروهها وبااستفاده ازویژه مقادیر اپراتور کازیمیر گروه است.پس از یافتن جواب های معادله، تابع دونقطه ودرنهایت اپراتور میدان ،ساختار فضای هیلبرت ورابطه پادجابجاگر برای اپراتور میدان که لازمه ی شرط کوانتش است،تعریف می شود.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل پنجم: کوانتش میدان اسپین ۳/۲جرم دار در فضا- زمان دوسیتر

پیشگفتار

هدف اصلی دراین پایان نامه ،کوانتش میدان جرم دار اسپین ۳/۲ درفضا-زمان دوسیتر است.برای این مقصود ابتدا مرور مختصری بر معرفی میدان اسپین ۳/۲ خواهیم داشت.

یکی ازمهم ترین پروژه های تحقیقاتی بویژه درسال های اخیر،نظریه وحدت بزرگ است .نظریه ای که هدف آن وحدت چهار نیروی شناخته شده در طبیعت باعناوین نیروی الکترومغناطیسی، هسته ای ضعیف،هسته ای قوی ونیروی گرانش،درنهایت امرایجاد یک مدل کامل ورسیدن به یک فرمول بندی واحد است.

دربیان سیر تاریخی وتکاملی نظریه وحدت می توان گفت: نخستین وحدت نیروها، وحدت دونیروی الکتریکی ومغناطیسی بود به این علت که دونیرو چشمه واحدی دارند.حاصل این وحدت چیزی نخواهد بود جز نیروی الکترومغناطیسی ، که به عنوان یکی از نیروهای طبیعت از آن یاد شد.

دومین وحدت ، وحدت بین نیروی الکترومغناطیسی وبرهمکنش های ضعیف تحت عنوان الکتروضعیف می باشد.

این اقدام موثر توسط "وایمبرگ-سلام "به عرصه ظهور رسید.در طول سالهای متعدد، توافق میان تجربه وتئوری وایمبرگ-سلام تاثیرگذاری قوی ان را به اثبات رسانید.داده ها به اندازه ی کافی دقیق بودند تا مدل های رقیب از صحنه خارج شده وصحت مدل وایمبرگ- سلام رامورد تائید قراردهند.

دیری نپائید که الکتروضعیف ومدل های QCD به هم پیوندزده شدومدل استاندارد رابراساس گروه پیمانه ای $SU_3 \otimes SU_2 \otimes U_1$ به وجود آوردند.

سه نیروی یادشده که به طور زیبایی در مدل پیمانه ای وحدت میابند، بانیروی چهارم درطبیعت که از مدل پیمانه ای خاص خود تبعیت می کند اختلاف اساسی دارد. اولین اختلاف آن درگروه تقارنی آن می باشد.گروه تقارن سه نیروی وحدت یافته داخلی وفشرده می باشد، اماگروه تقارنی نیروی گرانش یک گروه تقارن فضا-زمانی است.یعنی تبدیلات سیستم مختصات عام وگروه تقارن آن غیرفشرده است.همچنین میدان ارتباطی که در معرفی مشتق همورداظاهر می شود یک میدان بااسپین دو می باشد($g_{\mu\nu}$)

بنابراین وحدت بخشیدن بین این نیروها احتیاج به تقارن دیگری دارد.به عبارت بهتر نمی توان گروه های فشرده وگروههای غیرفشرده راباهم ترکیب کردوگروهی بزرگترساخت که این گروه ها زیر گروه آن محسوب شوند.(جبردو گروه فشرده وغیرفشرده را نمی توان با هم ترکیب کرد).اما می توان یک سری مولد با رابطه ی پادجابجایی (اسپینور) اضافه نمود وجبری پیدا کرد که با توجه به گروههای فشرده وغیر فشرده بسته باشد.بدین ترتیب ابرجبر ساخته می شود .ابرجبر به صورت عام و موضعی قابل بررسی است، که به صورت عام تحت عنوان ابر تقارن نام گرفته است .درواقع ابر تقارن، یک تقارن جدید میان میدان های بوزونی و فرمیونی است. برای هر میدان فرمیونی یک شریک بوزونی خواهیم داشت وبرعکس.

شریکی که برای ذرات انتخاب می شود، ازلحاظ جرم وبار الکتریکی یکسان امااز لحاظ اسپین با ذره ی مورد نظر اختلاف دارد.یکی از مهم ترین ویژگی های ابرتقارن اینست که: بلا فاصله به تقارن موضعی تبدیل میشودو الزاما کوانتوم گراویتی رادر طیف یکدست می کند.براین اساس شریک میدان بوزونی گرانش یعنی گراویتون میدان اسپین ۳/۲ است که فرمیون می باشدوگراویتینو نامیده میشود. بااین توضیحات علت بررسی کوانتش میدان اسپین ۳/۲ واضح وروشن خواهد بود . برای رسیدن به این منظور ، به دلیل اینکه فضا- زمان دوسیتر یک فضا- زمان منحنی است درفصل اول ابتدا مروری برنسبیت عام و مکانیک کوانتومی خواهیم داشت.

پس از آن به بررسی تئوری میدان های کوانتومی واهمیت بررسی این تئوری درفضا- زمان دوسیتر خواهیم پرداخت .درادامه فضا-زمان دوسیتر وخصوصیات وویژ گی های آن راذکر خواهیم کرد.

مباحثی که درفصل های دیگرعنوان میشود به شرح زیر است:

در فصل دوم مروری بر کوانتش میدان اسکالر در فضا- زمان دو سیترخواهیم داشت.زیرا جواب سایر میدان ها ازروی این میدان محاسبه می شود .

درفصل سوم وچهارم به ترتیب کوانتش میدان اسپینوری ومیدان های برداری جرم دار در فضا- زمان دوسیتر بررسی می شود.

در فرآیند کوانتش، معادله میدان از رهیافت نظریه گروه ها وبا استفاده از ویژه مقادیراپراتور کازیمیر محاسبه می شود .پس از تعیین جواب های معادله تابع دونقطه ای ساخته می شود که در اصول زیر صدق می کند:

۱) مثبت بودن ۲)موضعی بودن ۳)هم وردا بودن ۴)تحلیلی بودن

فصل پایانی نیز به کوانتش میدان جرم دار اسپین ۳/۲ درفضا-زمان دوسیتر اختصاص یافته است.

فصل اول

فضا– زمان دوسیتر

مقدمه :

طرح فرضیه ی نسبیت در ابتدای قرن بیستم توسط اینشتین معنای جدیدی به علم فیزیک داد . زمان ومکان به عنوان دو موجود بیگانه از هم، به حیات خود پایان دادندو دیوار چینی که ماده وانرژی را از هم جدا می کرد،فرو ریخت : فیزیک از این طریق نگرش نوینی از دنیای بی نهایت بزرگ های نجوم ودنیای بی نهایت کوچک های اتم تدارک دید.

اینشتین برای فرمول بندی نسبیت عام بنا رابراصل هم ارزی گذاشت . اصل ماخ نیز که مجموعه ای از ایده هاست انگیزه مهمی در فرمول بندی نسبیت عام بود . بنا براین اصل ، ماده موجود در جهان تعیین کننده ساختار فضا- زمان است . به تعبیر دیگر مفاهیم لخت و ناچرخان بدون وجود ماده در جهان بی معنی می شود .

در واقع نسبیت درک جدیدی از هندسه مطرح می کند که مبانی جهان بینی به ظاهر تغییر ناپذیر ما را دگرگون می سازد. یعنی در حقیقت این پیش فرض ها ، خود در مجموعه ای از اعتقادات و استدلالات فلسفی و علمی پیچیده می باشند که در شرایط بحرانی پوسته شان کنار رفته وتحجرخود را نشان داده ونیاز به تکامل عالی تر را ضروری می سازند، یعنی درک ما از خصلت جهان ، ساختمان جهان ،مبدا و پایان جهان به صورت پیش فرضی در فعالیت های علمی ما جای دارد . بر خلاف تصور تجربه گرایان ، مطالعه این مبانی بی مصرف نبوده ، بلکه ممکن است اسباب دگرگونی های بنیادی علوم را فراهم آورد .

اساس نسبیت عامی که اینشتین در سال ۱۹۱۷ ارائه داد براصول زیر استوار است:

۱)همه ی ناظرها با هم معادلند(اصل هموردایی یا تقارن).

۲)یک ناظر نمی تواند به طور موضعی شتابی را که دارد از میدان گرانشی تشخیص دهد(اصل هم ارزی).

۳)سرعت نور در خلا از سرعت انتشار هر پیامی بیشتر است(اصل علیت).

بیان ریاضی اصل اول نسبیت به اینصورت است که کمیت های مشاهده پذیر فیزیکی به وسیله یک سری عناصر ریاضی که تانسور نامیده می شوند بیان می گردند و معادلات فیزیکی به وسیله یک سری معادلات تانسوری نمایش داده می شوند، که شکل آنها مستقل از ناظر یا سیستم مختصات می باشد و بوسیله یک سری قوانین ریاضی می توان ارتباط بین کمیت های مشاهده پذیر از دید دو ناظر (یا سیستم مختصات) را بیان کرد. به عبارت بهتر دو ناظر می توانند داده های خود را در مورد بررسی یک رویدادواحد، اگر چه با هم

یکسان نباشد، با هم مقایسه کنند(نسبی بودن مشاهدات به وسیله ناظر ها، ولی با این قید که آنها می توانند مشاهدات خود را با هم مقایسه کنند: به این معنی که رویداد مستقل از ناظر است). اصل دوم از نظر ریاضی بوسیله معادله نسبیت عام انیشتین بیان میگردد که یک معادله تانسوری است و ارتباطی بین هندسه فضا – زمان و ماده موجود در آن می باشد که به وسیله رابطه زیر بیان میگردد

$$R_{\mu\nu} - \frac{۱}{۲} g_{\mu\nu} R = ۸\pi G T_{\mu\nu}.$$

طرف راست معادله همان شکل تانسوری ماده موجود در طبیعت است و طرف چپ مشخص کننده هندسه فضا – زمان (متریک $g_{\mu\nu}$) می باشد.

اصل سوم از نظر ریاضی به وسیله متریک $g_{\mu\nu}$ که مشخص کننده مخروط نوری است بیان می شود. نور روی یک مخروط در فضا–زمان چهار بعدی حرکت می کند و پیامهایی که سرعت آنها کمتر از سرعت نور باشند در درون این مخروط انتشار می یابند(ناحیه زمان گونه) و پیامهایی که سرعت آنها از سرعت نور بیشتر باشد در خارج این مخروط نوری حرکت می کنند(ناحیه فضا گونه). متریک بوسیله معادله زیربیان میشود

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

نظریه نسبیت عام یکی از بزرگترین دستاوردهای اندیشه بشری در تمام طول تاریخ است. اصالت وغیرسنتی بودن طرز بررسی‌آن ازنسبیت خاص بیشتر است. تاثیر فلسفی نظریه نسبیت روی اندیشه ی انسان بسیار عمیق بوده است وچشم انداز های علمی که توسط آن باز شد بدون اغراق بی پایان اند.

مکانیک کوانتومی به مرور زمان و برای توجیه برخی پدیده ها، که در فیزیک کلاسیک قابل توضیح نبودند، فرمول بندی شد.

هرسیستم فیزیکی ازدوروش کلاسیکی یا کوانتومی مورد بررسی قرار می گیرد. وقتی صحبت از قطعیت است،یعنی سیستم کلاسیکی است. وقتی مفهوم احتمال وجود دارد یعنی سیستم کوانتومی است.

اساس مکانیک کوانتومی بر این اصول می باشد که به هر کمیت مشاهده پذیردینامیکی سیستم مورد بررسی یک اپراتور نسبت میدهیم که روی یک فضای هیلبرت اثر میکند. حالت سیستم فیزیکی بوسیله یک بردار در این فضا مشخص میشود ($|\alpha,t\rangle$) که مفهوم احتمال را میتوان از آن بیرون کشید، تحول زمانی سیستم بوسیله هامیلتونی و معادله زیر مشخص میشود.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\alpha,t\rangle = \hat{H}|\alpha,t\rangle,$$

ومقدار اندازه گیری شده یک کمیت مشاهده پذیر بوسیله یک مقدار میانگین یا چشم داشتی تعریف میشود. این مقدار میانگین است که یک رابطه نزدیک با مشاهدات ما دارد و خود کمیت حول و حوش این مقدار میانگین نوسان میکند. این نوسانات به نوسانات کوانتومی معروفند و شدت آنها بوسیله ΔA یا جذر میانگین مربعی که یک کمیت خیلی مهم در مفاهیم آماری است، بیان می شود:

$\Delta A=\sqrt{<\hat{A}^{2}>-<\hat{A}>^{2}}\,.$

$\hat{A}$ یک کمیت مشاهده پذیر است و $<\hat{A}>$ مقدار میانگین $\hat{A}$ می باشد. مفهوم آمار و احتمال که در مکانیک کوانتومی وارد می شود به خاطر اپراتور بودن مشاهده پذیرها است و یا به بیان بهتر در ذات طبیعت وجود دارد (علت وابسته کردن اپراتور به مشاهده پذیرهای فیزیکی برای توجیه نتایج آزمایش می باشد که با تقریب خیلی عالی موفق بوده است).

وقتی دانشمندان از نظریه های نسبیت و مکانیک کوانتومی صحبت می کنند این ها ایده هایی هستند که در آزمون های تجربی دقیق و موفقیت آمیز بوده اند. نظریه های مفید وسودمند خاصی که در طول زمان از آزمون ها موفق بیرون آمده اندو قدرت پیش بینی و توصیف محدوده بسیار وسیعی از پدیده ها را دارا هستند به عنوان قانون طبیعی شناخته می شوند . البته اکثر دانشمندان بر این باورند که توصیفات ما از قوانین طبیعی موقتی وگذرا هستندو اگر شواهد جدیدی مخالف با آن ها پیدا شده نظریه ها قابل تجدیدنظر هستند .این دو نظریه مهم فیزیکی که دراین فصل عنوان شد با تقریب خیلی خوبی نتایج مشاهدات ما را توضیح می دهند کاملاً از هم مستقل هستند و یک نظریه واحد باید دو نظریه بالا را در حالت حدی در بر داشته باشد. بنابراین در اولین تقریب ترکیبی از این دو نظریه را در حالت ساده یعنی ترکیب مکانیک کوانتومی و نسبیت خاص را مورد بررسی قرار می دهند. اما می دانیم که در نظریه نسبیت فضا و زمان را از یک جنس می گیرندولی در نظریه مکانیک کوانتومی نقش فضا و زمان خیلی متفاوت است چون فضا را به وسیله یک اپراتور نشان می دهند $\hat{\vec{X}}$ ولی زمان به صورت پارامتر ظاهر میشود.

بنابراین در ایجاد یک نظریۀ واحد، با ترکیب نظریۀ نسبیت خاص و مکانیک کوانتومی نظریۀ کوانتومی میدان ها ساخته می شود، که در آن مکان ذره دیگر عملگر نیست. برای مفهوم مکان ذره از مفهوم احتمال حضور ذره در مکان $\vec{x}$ استفاده می کنیم و به میدان وابسته به مکان ذره $\Psi(x,t)$ عملگرنسبت می دهیم.

$\Psi(x,t)\rightarrow$ عملگر

که $\vec{x}$ و t پارامتر هستند.

نظریه میدان های کوانتومی به عنوان موفق ترین چارچوب فیزیکی که دنیای زیر اتمی را توضیح می دهد ظاهر شده است. قدرت محاسباتی وجنبه مفهومی ان قابل ملاحظه است.دقت پیش بینی های ان در مورد برهمکنش های میان الکترون هاوفوتونها از مرتبه ی 10^{-8} می باشد به علاوه این نظریه قادر است که در مورد برهمکنش های سه نیرو از چهار نیروی اساسی موجود در طبیعت توضیحات کافی ارائه کند که موفقیت نظریه میدان های کوانتومی به عنوان نظریه نیروهای زیر اتمی در مدل استاندارد نمود یافته است.

اصل ومبنای تمام این تلاش ها درجهت انجام پروژه ی وحدت بزرگ است که آخرین مرحله آن کوانتش گرانش و وحدت ان باسایر نیرو هاست.

رهیافتهای گرانش کوانتومی :

۱- در نظر گرفتن میدان گرانشی به عنوان یک اختلال کوچک: مربع طول پلانک در نقش ثابت جفت شدگی ظاهر می شود که دارای بعد است ودرنتیجه نظریه اختلال در طول پلانک شکست می خورد.

۲- چون طول پلانک بسیار کوچک است پس شاید دربزرگ مقیاس بتوان ازنظریه اختلال استفاده کرد، اما مشکل جفت شدگی میدان گرانش با خودش (self-coupling) پیش می آید، یا به عبارتی گراویتون ها گرانش می کنند.

۳- رهیافت نیمه کلاسیکی یا روش میدان زمینه، که دراین روش یک متریک زمینه درنظر می گیریم و امواج گرانشی را به عنوان یک شاره صفر متحرک درفضا- زمان زمینه معرفی می کنیم که به میدان مادی اضافه می شود.

$$g_{\mu\nu} = g^{BG}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} ,$$

که $g^{BG}_{\mu\nu}$ یک متریک زمینه و کلاسیکی می باشد که اصل علیت توسط این متریک تعریف شده و $h_{\mu\nu}$ قسمت کوانتومی متریک است که به آن عملگرنسبت می دهیم. کوانتش گرانش به کوانتش میدان $h_{\mu\nu}$ محدود میشود اما برای کوانتش $h_{\mu\nu}$ بی نهایت هایی در نظریه میدان ظاهر می شود، که به کمک بازبه هنجارش حذف نمی شود، مگر در حلقهٔ اول. بنابراین برای بازبهنجارش، متریک زمینه را باید در فضای منحنی در نظر گرفت . همین امر سبب شکل گیری تئوری میدان های کوانتومی در فضا-زمان منحنی شده است. ساده ترین فضای منحنی که مورد بررسی قرار گرفته فضا-زمان دوسیتر می باشد. به علاوه داده های تجربی نشان می دهد عالمی که ما در آن زندگی می کنیم در تقریب اول ، عالم دوسیتر است. همچنین فضا-زمان دوسیتر یک فضا-زمان با بیشینه تقارن است به این معنی که دارای بیشترین بردارهای کلینگ می باشد که همین امر انجام محاسبات را ساده تر می کند.

۱-۱) فضا ـ زمان دوسیتر:

حل های معادلات میدان اینشتین متریک های فضا- زمان هستند . بنابراین اغلب حل ها " متریک ها "نامیده می شود . این متریک ها ساختارفضا- زمان را توصیف می کند. در سال ۱۹۱۷ یک منجم هلندی با نام ویلیام دوسیتر معادله اینشتین را با طرف دوم صفر($T_{\mu\nu} = 0$) وثابت کیهان شناسی مثبت حل کردوبه متریک دوسیتر رسید:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + g_{\mu\nu}\Lambda = 0 \quad , \tag{۱-۱}$$

$$R = R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 4\Lambda = 12H^2$$

که در آن R و $R_{\mu\nu}$ به ترتیب اسکالر انحنا و تانسور ریچی و H نیز ثابت هابل می باشد. فضا ـ زمان دوسیتر را می توان به صورت یک هذلولی وار چهار بعدی که در یک فضای مینکوفسکی پنج بعدی محاط شده است، در نظر گرفت :

$$x_H = \left\{ x \in R^5, \eta_{\alpha B} x^\alpha x^\beta = x^\circ x^\circ - x^1 x^1 - x^2 x^2 - x^3 x^3 - x^4 x^4 = H^{-2} \right\} \quad (۱-۲)$$

$$\alpha, \beta = 0,1,2,3,4 \quad (۱-۳)$$

$$\eta_{\alpha\beta} = diag\,(1,-1,-1,-1,-1)\ , \quad (۱-۴)$$

که متریک دوسیتربه شرح زیر است :

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = g_{\mu\nu}^{ds} dX^\mu dX_\nu \quad , \quad (۱-۵)$$

$$\mu, \nu = 0,1,2,3,$$

X^μ چهار مولفه ی مختصات فضا- زمان در یک سیستم مختصات ذاتی روی هذلولی وار دوسیتر است .

روی این هذلولی وار می توان چهار دسته سیستم مختصات تعریف کرد، که هر کدام شکل خاص خود را دارند.

سیستم مختصات عام (بسته):

این سیستم مختصات کل هذلولی وار را می پوشاندودرt ثابت قسمت فضایی شبیه به کره سه بعدی S^3 با انحنای مثبت است.

این سیستم مختصات را با مختصه های (t, χ, θ, ϕ) به فرم زیر می توان نوشت :

$$x_0 = H^{-1} \sinh Ht \quad , \quad (۱-۶)$$

$$x_1 = H^{-1} \cosh \ Ht \ \cos\chi \quad ,$$

$$x_2 = H^{-1} \cosh \ Ht \ \sin\chi \cos\theta \quad , \ -\infty < t < +\infty,$$

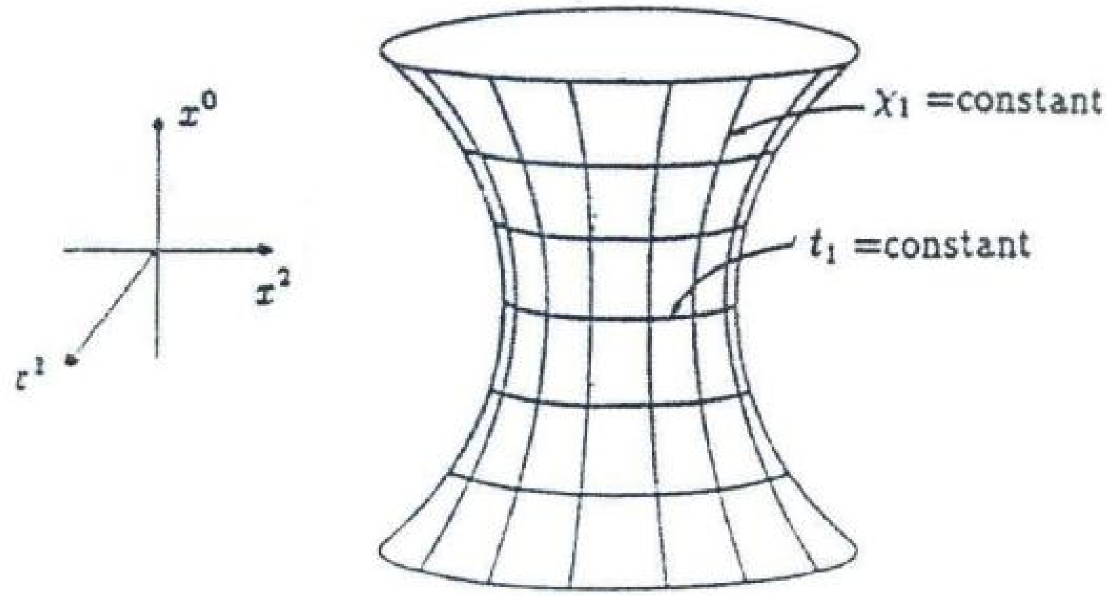
$$x_3 = H^{-1} \cosh Ht \sin\chi \sin\theta \cos\phi \quad , \quad 0 \le \chi, \theta \le \pi,$$

$$x_4 = H^{-1} \cosh Ht \sin\chi \sin\theta \sin\phi \quad , \quad 0 \le \phi \le 2\pi,$$

ومتریک به صورت زیر نمایش داده می شود:

$$ds^2 = dt^2 - H^{-2} \cosh Ht [d\chi^2 + \sin^2\chi (d\theta^2 + \sin^2\theta d\overset{2}{\phi}) \ . \quad (۱-۷)$$

باتوجه به اینکه دراین سیستم مختصات تقارن گروه دوسیتر وجود دارد برای ساختن نمایش های کاهش ناپذیر گروه مورد استفاده قرار می گیرد.



شکل۱-۱ سیستم مختصات عام در فضا-زمان دوبعدی

۱ـ۱ـ۲) سیستم مختصات باز:

در این سیستم مختصات قسمت فضایی دارای انحنای منفی است (مانند زین اسب) ، تنها قسمت هایی از هذلولی وار را می پوشاندکه $X_1 > H^{-1}$ است. مختصه های (t, χ, θ, ϕ) دراین سیستم مختصات به صورت زیر تعریف میشوند.

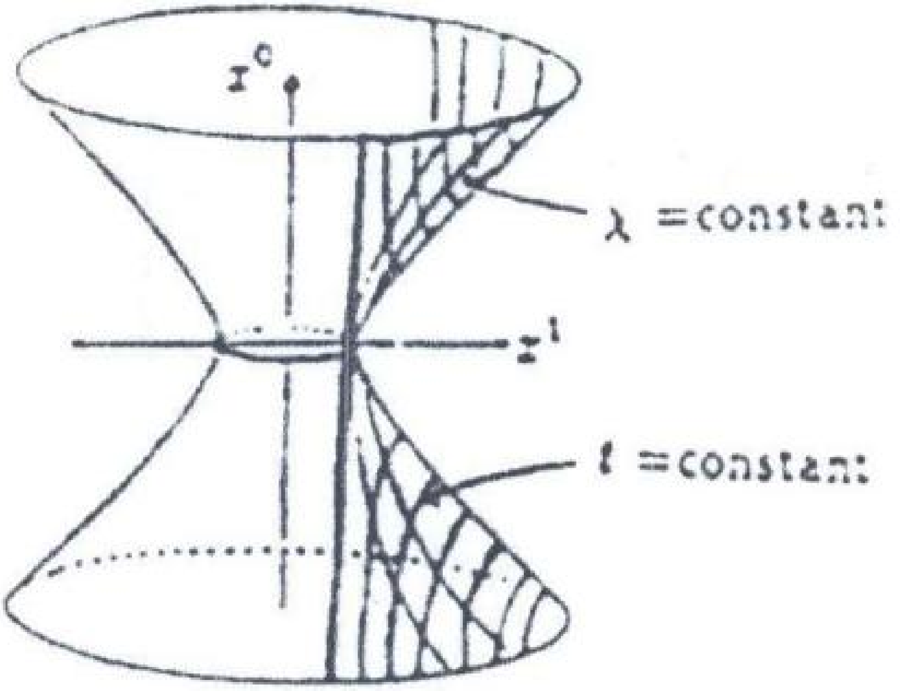
$$
\begin{aligned}
x_0 &= H^{-1} \sinh Ht \cosh \chi \quad , \\
x_1 &= H^{-1} \cosh Ht \quad , \\
x_2 &= H^{-1} \sinh Ht \sinh \chi \cos \theta \quad , \\
x_3 &= H^{-1} \sinh Ht \sinh \chi \sin \theta \cos \phi \quad , \\
x_4 &= H^{-1} \sinh Ht \sinh \chi \sin \theta \sin \phi \quad ,
\end{aligned}
\qquad (۱-۸)
$$

که در آن

$$
\begin{cases}
-\infty < t < +\infty \\
0 < \chi < \infty \\
0 \le \theta \le \pi \\
0 \le \phi \le 2\pi
\end{cases}
$$

در این سیستم مختصات متریک به شکل زیر معرفی می شود:

$$ds^2 = dt^2 - H^{-2} \sinh^2 Ht [d\chi^2 + \sinh^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] \quad . \qquad (۱-۹)$$



شکل ۱-۲ سیستم مختصات بازدرفضا-زمان دوبعدی

۱-۱ـ۳) سیستم مختصات تخت:

سیستم مختصاتی است که قسمت فضایی تخت می باشد یعنی انحنای بخش فضایی دراین سیستم مختصات صفر است. این سیستم قسمتی از هذلولی وار را می پوشاند که $x_0 + x_4 \rangle 0$ باشد. باتوجه به اینکه دراین سیستم مختصات به علت تخت بودن فضا می توان تبدیلات فوریه رابرای قسمت فضایی به کار برد. اکثر فیزیک دانان ازاین سیستم استفاده می کنند.اما تقارن گروه دوسیتر دراین سیستم از بین می رود

(۱-۱۰)

$$x_0 = H^{-1}\sinh Ht + \frac{1}{2}He^{Ht}\left\|\vec{X}\right\|^2,$$

$$x_i = e^{Ht}X_i \qquad i = 1,2,3,$$

$$x_4 = H^{-1}\cosh Ht - \frac{1}{2}He^{Ht}\left\|\vec{X}\right\|^2,$$

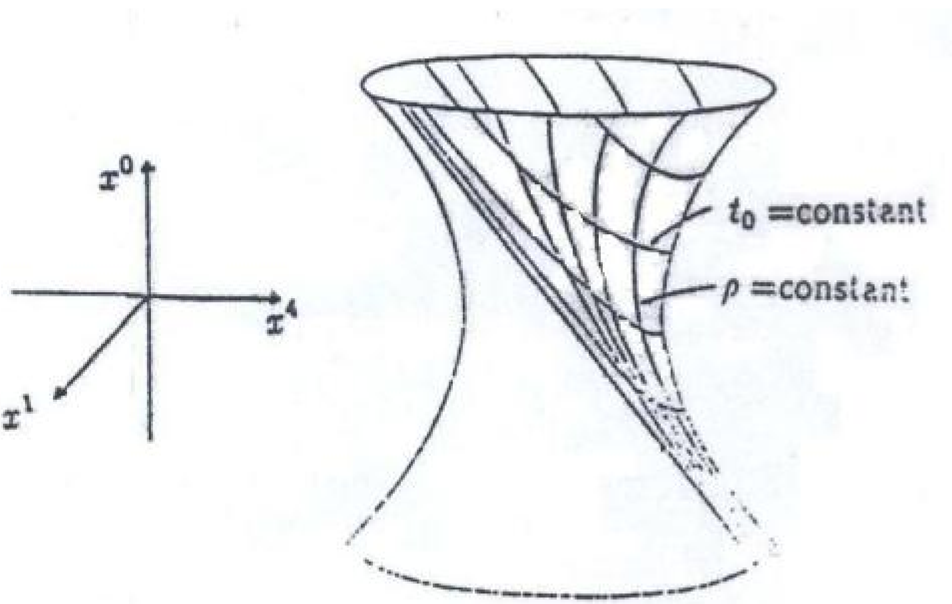
که در آن

$$-\infty < t, X^i < +\infty,$$

در این سیستم متریک بدین صورت است

$$ds^2=dt^2-e^{2Ht}\, dX^i\, dX_i \, . \qquad (۱-۱۱)$$

در این سیستم مختصات بردار کلینگ زمان گونه نداریم، بنابراین نمیتوان مفهوم انرژی را بیان کرد.



شکل۱-۳سیستم مختصات تخت در فضا-زمان دوبعدی

۱ـ۱ـ٤) سیستم مختصات ایستا:

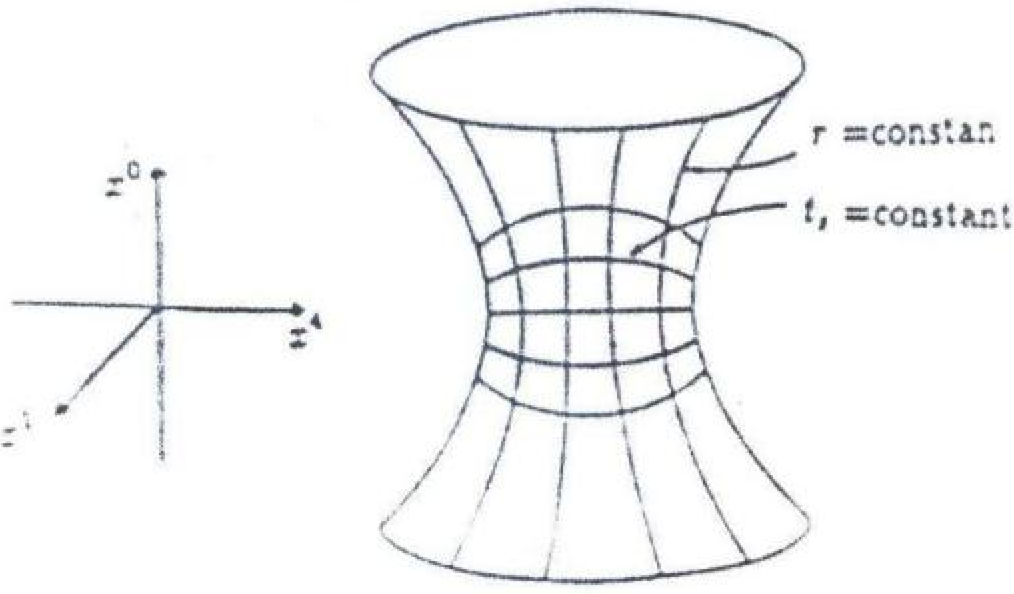
در این سیستم مختصات $\frac{\partial}{\partial t}$ یک بردار کلینگ زمان گونه است ومتریک مستقل از زمان می باشد.علاوه براین به وضوح افق حادث در این سیسستم مختصات مشاهده می شود. متریک در این سیستم به صورت زیر تعریف میشود:

$$ds^2=(1-r^2H^2)dt^2-(1-r^2H^2)^{-1}dr^2-r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2) \qquad (۱۲-۱)$$

وتبدیلات سیستم مختصات به شکل زیر بیان می شود:

$$\begin{aligned} x_0&=\sqrt{H^{-2}-r^2}\sinh Ht \quad , \\ x_1&=\sqrt{H^{-2}-r^2}\cosh Ht \quad , \\ x_2&=r\sin\theta\cos\phi \quad , \\ x_3&=r\sin\theta\sin\phi \quad , \\ x_4&=r\cos\theta, 0\le r\le H^{-1} \quad , \end{aligned} \qquad (۱۳-۱)$$

که (r,θ,ϕ) مختصات قطبی کروی هستند. اگر این متریک را با متریک شوارتز شیلد مقایسه کنیم،متریک دو سیترناحیه ای به شعاع H^{-1} را نشان می دهد، که توسط یک سیاه چاله محاصره شده، یعنی یک ناظری که در جهان دو سیتر قرار دارد، تنها رویدادهایی را مشاهده می کند که در فاصله هایی کمتر از H^{-1} باشند. دقیقاً مشابه حالتی است که با سیاه چاله مواجه می شویم.



شکل ۱-۴ سیستم مختصات ایستا درفضا-زمان دوبعدی

اگرچه انتخاب سیستم مختصات تاثیری در نتایج فیزیکی ندارد اما هرکدام از سیستم های مختصات دراین حالت یک خاصیت از فضارا برای مانشان می دهند. به عنوان مثال سه سیستم مختصات عام، تخت و باز همگی از جهانی تورمی خبر می دهند، درحالیکه سیستم ایستا اینگونه نیست.

۱-۲) گروه دوسیتر و جبر آن :

همانطور که می دانیم یکی از راه های بررسی معادلات حرکت استفاده از نظریه گروه هاست و نمایش گروه در ارتباط با تابع موج می باشد. تقارن در فیزیک توسط نظریه گروه بیان می شود ویک گروه با مولد هایش مشخص می شود . مثلا گروه لورنتس تقارن سیستم را تحت چرخش در فضا- زمان مشخص می کند واگر انتقال را به‌آن اضافه کنیم ، گروه پوانکاره بدست می آید . برای هر گروه می توان اپراتور کازیمیر تعریف کرد که این اپراتور در ارتباط با معادله میدان ونمایش های کاهش ناپذیر گروه می باشد . به عنوان مثال در گروه پوانکاره دو اپراتور کازیمیر داریم که عبارتند از : w^2, p^2 که این دو اپراتور با تمام مولد های گروه پوانکاره جا بجا می شوند . نمایش های گروه با استفاده از ویژه مقادیر این دو اپراتور بر چسب می خورند . ویژه مقادیر این دو اپراتور همان جرم و اسپین هستند [1] . در این بخش می خواهیم گروه دو سیتر و جبر آن را بیان کنیم .

گروه دوسیتر $G= SO_0(1,4)$ یک گروه ده پارامتری است، که مخروط نوری $((X^{o2})-(\overline{X})^2-(X^4)^2)$ را ناوردا می گذارد. در حد انحنای صفر $(H\rightarrow 0)$ به گروه پوانکار ه تبدیل می شود..

گروه دوسیتر شامل ۲ اپراتور کازیمیر $Q^{(2)},Q^{(1)}$ است که به صورت زیر تعریف میشوند :

$$Q^1=-\frac{1}{2}L_{\alpha\beta}L^{\alpha\beta},$$
$$Q^2=-W_\alpha W^\alpha, W_\alpha=\frac{1}{8}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\sigma\eta}L_{\alpha\beta}L^{\alpha\beta}, \qquad (۱۴-۱)$$

که $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\sigma\eta}$ یک تانسور پاد متقارن و مولدهای هرمیتی $L_{\alpha\beta}$ درنمایش یکانی G از رابطهٔ زیر تبعیت می کنند: [2]

$$\left[L_{\alpha\beta},L\gamma\sigma\right]=-i\left(\eta_{\alpha\gamma}L_{\beta\sigma}+\eta_{\beta\sigma}L_{\alpha\gamma}-\eta_{\alpha\sigma}L_{\beta\gamma}-\eta_{\beta\gamma}L_{\alpha\sigma}\right) . \qquad (۱۶-۱)$$

$L_{\alpha\beta}$شامل دو قسمت مداری $M_{\alpha\beta}$ وقسمت اسپینی $S_{\alpha\beta}$ است.

$$L_{\alpha\beta}=M_{\alpha\beta}+S_{\alpha\beta} , \qquad (۱۷-۱)$$
$$M_{\alpha\beta}=-i\left(x_\alpha\partial_\beta-x_\beta\partial_\alpha\right)=-i\left(x_\alpha\partial^T_\beta-x_\beta\partial^T_\alpha\right)$$
$$S_{\alpha\beta}=\frac{-i}{4}\left[\gamma_\alpha,\gamma_\beta\right].$$

درفضا-زمان دوسیتر عمل مشتق گیری با عنوان مشتق مماسی (∂^T) تعریف می شود:

$$\partial^T{}_\alpha=\theta_{\alpha\beta}\partial^\beta=\partial_\alpha+H^2x_\alpha x.\partial \qquad (۱۸-۱)$$

که دراین رابطه $\theta_{\alpha\beta}=\eta_{\alpha\beta}+H^2x_\alpha x_\beta$ که به ان تصویر گر انتقالی گفته می شود. یعنی اینکه هر تانسور در فضای R^5 راروی هذلولی وار دوسیتر تصویر می کند وتانسور متناظر راروی فضای دوسیتر بدست می دهد.

ماتریس های ۴×۴ گاما به شکل زیر تعریف می شوند:

$$\gamma^0=\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} , \quad \gamma^1=\begin{bmatrix} 0 & i\sigma^1 \\ i\sigma^1 & 0 \end{bmatrix},$$
$$\gamma^2=\begin{bmatrix} 0 & -i\sigma^2 \\ -i\sigma^2 & 0 \end{bmatrix} , \quad \gamma^3=\begin{bmatrix} 0 & i\sigma^3 \\ i\sigma^3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad (۱۹-۱)$$
$$\gamma^4=\begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix},$$

وازرابطه زیرپیروی می کند:

$$\gamma^\alpha\gamma^\beta+\gamma^\beta\gamma^\alpha=2\eta^{\alpha\beta},$$

که σ^i ها ماتریس های پائولی و Iماتریس واحد ۲×۲ است.

چون اپراتورهای کازیمیر بامولدهای گروه جابجا می شوند بنابراین برای نمایش های کاهش ناپذیر یکانی گروه ثابت هستند.نمایشهای کاهش ناپذیر یکانی $S_0 0(1,4)$ ابتدا به وسیله توماس درسال ۱۹۴۱ برای جبرلی