بسم الله الرحمن الرحیم

۱۵۴۰۶۹ _ ۲۰۲۶۴۴۶

دانشگاه پیام نور

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته: آمار ریاضی

دانشکده: علوم پایه

گروه علمی: آمار

عنوان پایان‌نامه

برآورد بیز و بیز تجربی پارامتر با استفاده از تابع زیان متعادل

استاد راهنما

دکتر پرویز نصیری

استاد مشاور

دکتر علی شادرخ

نگارش

ندا کاوه

شهریور ۱۳۸۹

شماره ....

تاریخ ....

پیوست ....

دانشگاه پیام نور

دانشگاه پیام نور استان تهران

...وری اسلامی ایران

...علوم تحقیقات و فناوری

مجتمع علوم پایه و کشاورزی

تصویب نامه

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد **دررشته** امار ریاضی

تحت عنوان:

"برآورد بیزوبیز تجربی پارامتر بااستفاده ازتابع زیان متعادل"

تاریخ دفاع: ۸۹/۰۶/۳۰ ساعت: ۱۰-۹

نمره پایان نامه: ۱۹/- نوزده درجه ارزشیابی: عالی

ردیف	هیات داوران	نام و نام خانوادگی			
۱	استاد راهنما	دکتر پرویز نصیری			
۲	استاد مشاور	دکتر علی شادرخ			
۳	استاد داور	دکتر امیرتیمور پاینده			
۴	نماینده علمی گروه	دکتر فهیمه سلطانیان			

...ران، خیابان استاد

...ات الهی، خیابان

...ید فلاح پور، پلاک ۲۷

...فن: ۸۸۸۰۰۲۵۲

...رنگار: ۸۸۳۱۹۴۷۵

www.tpnu.ac.i...

science.agri@tpnu.ac...

تقدیم

به پدر و مادر عزیزم

تقدیر و تشکر

نگارش این پایان‌نامه مرهون راهنماییهای استاد ارجمند جناب آقای دکتر نصیری می‌باشد که از ایشان کمال تشکر و سپاس را دارم و موفقیت بیش از پیش ایشان را آرزومندم. همچنین از جناب آقای دکتر شادرخ استاد مشاور در این پایان‌نامه نهایت تشکر را دارم.

از دوست عزیزم خانم فاطمه حسینی که در مراحل انجام این کار از راهنماییهای ایشان بهره بردم، سپاسگزارم.

فهرست

چکیده

هدف اصلی از این تحقیق معرفی برآوردگر بیز مقید می‌باشد که تابع مخاطره پسین را با توجه به محدودیت‌های لویس و با استفاده از تابع زیان مشخصی مینیمم می‌کند. برآوردگر بیز مقید پارامتر θ با استفاده از توابع زیان مجموع مربعات خطا و زیان متعادل را بدست آورده و نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان برآوردگر بیز مقید با استفاده از تابع زیان متعادل را از روی برآوردگر بیز مقید با استفاده از تابع زیان مجموع مربعات خطا بدست آورد. با در نظر گرفتن زیرخانواده توزیع‌های نمایی با تابع واریانس درجه دوم، برآوردگر بیز تجربی مقید و بیز سلسله مراتبی مقید را محاسبه می‌کنیم. توابع زیان مجموع مربعات خطا و متعادل را بدست می‌آوریم، بسط مجانبی تابع مخاطره بیز برآوردگرهای بیز مقید، بیز تجربی و بیز تجربی مقید را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در نهایت برآورد بیز تجربی را برای داده‌های ناخالص معرفی و سرعت همگرایی مخاطره آنها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی

برآورد بیز، برآوردگر بیز مقید، برآوردگر بیز تجربی مقید، تابع زیان مجموع مربعات خطا، تابع زیان متعادل، سرعت همگرایی مخاطره.

فصل اول

مقدمه و کلیات

۱–۱ مقدمه

آزمون فرض یک مسئله تصمیم است و اغلب برای تصمیم‌گیری بکار می‌رود، و هدف از آن در استنباط آماری، ارائه روش‌های مدرن و فرمول‌بندی شده برای انجام مراحل تصمیم می‌باشد. در واقع یک چهارچوب مشخص از مسائل استنباطی است که در تمام اجزای فرایند تصمیم‌گیری رسماً تعریف شده‌اند تا به بهترین تصمیم دست پیدا کنیم. لازم است برای فرمول‌بندی مسئله تصمیم، عناصر مختلفی معرفی گردد.

بدین منظور مؤلفه‌های داده، فضای پارامتر، مدل، فضای عمل، قاعده تصمیم، تابع زیان و تابع مخاطره که از اجزای یک مسئله تصمیم هستند معرفی می‌گردند.

داده در حقیقت یافته یک بردار تصادفی X با فضای نمونه‌ای χ است.

فضای پارامتر مجموعه تمام مقادیر ممکن θ می‌باشد که با نماد Ω نمایش می‌دهیم.

مدل، مجموعه $\left\{f_{X|\Theta}(x|\theta)\in\Omega\right\}$ که از توزیع‌های احتمال ممکن برای متغیر تصادفی X که به پارامتر θ وابسته است به عنوان مدل احتمالی مورد استفاده قرار خواهد گرفت که در آن θ پارامتر حقیقی نامعلوم و Ω فضای پارامتر است.

براساس برداشت مشاهدات X، تصمیمی دربارهٔ θ ساخته می‌شود که اغلب تمام تصمیم‌های قابل قبول در مورد θ را با نماد A نمایش می‌دهیم و فضای عمل می‌نامیم. فضای عمل شامل تصمیم‌های مختلف برای انواع مسائل استنباط آماری، از قبیل مسئله برآورد نقطه‌ای، فاصله اطمینان و آزمون فرض یا بعضی دیگر از انواع مسائل می‌باشد. در مسئله برآورد نقطه‌ای، اعمال قابل قبول نقاط تخمین برای θ هستند و معمولاً A، برابر با Ω است. در مسئله آزمون فرض، A، تنها شامل دو عمل پذیرش و رد فرضیه H_0 است. اگر این دو عمل ممکن را به ترتیب a_0 یا a_1 نشان دهیم، فضای عمل در آزمون فرض مجموعهٔ دو نقطه‌ای $A=\{a_0,a_1\}$ خواهد بود. در مسئله برآورد فاصله‌ای، اعمال به صورت فواصل یا زیر مجموعه‌هائی از فضای پارامتر هستند، لذا A ممکن است مجموعهٔ تمام زیر مجموعه‌های Ω باشد.

طبیعتاً در مسئله تصمیم آماری به دنبال قاعده تصمیم هستیم در واقع شیوه به کار بردن داده‌ها به عنوان کمکی در تصمیم‌گیری شامل یک قاعده یا مجموعه‌ای از دستورات خواهد بود، قاعده تصمیم تعیین می‌کند که با مشاهده $x\in\chi$ چه عمل $a\in A$ بایستی انتخاب شود و معمولاً آن را با نماد $\delta(x)$ نشان می‌دهند به عبارت دیگر قاعده تصمیم تابعی از χ به A است.

وقتی مقدار واقعی پارامتر، θ باشد، در این صورت عمل a ممکن است درست یا تا اندازه‌ای نادرست یا کلاً نادرست باشد، بنابراین میزان نادرستی را با تابع زیان $L(\theta,a)$ نشان می‌دهند که بیانگر مقدار زیان به کار بردن a است برای زمانی که θ مقدار واقعی باشد ، تابع زیان تابعی حقیقی و نامنفی است که از $\theta\times A$ به R^+ است.

در مسئله برآورد پارامتر θ براساس برآوردگر $\delta(x)$، زیان حاصل از برآورد برابر است با $L(\theta,\delta(x))$ که خود یک متغیر تصادفی برحسب x است و می‌توان متوسط آن را به عنوان ملاک

سنجش نیکوئی قاعده تصمیم δ بکار برد، متوسط این زیان تحت عنوان تابع مخاطره با $R(\theta,\delta)=E_X[L(\theta,\delta(x))]$ نشان داده می‌شود. در حقیقت میزان دقت یا عدم دقت تابع تصمیم به وسیله تابع مخاطره اندازه‌گیری می‌شود و برای هر $\theta\in\Omega$، $R(\theta,\delta)<\infty$ است. در تابع مخاطره، توابع زیان معمولی به گونه‌ای هستند که تنها دقت برآورد یابی در برآورد پارامتر θ را در نظر می‌گیرد، مانند تابع مخاطره ناشی از تابع زیان مربع خطا که به صورت $E_\theta(L(\theta,\delta(x)))=E_\theta(\theta-\delta(x))^2$ است.

۱-۲ قواعد تصمیم

از بین قواعد تصمیم متفاوت لازم است، بهترین قاعده تصمیم انتخاب شود. لذا بایستی معیارهائی برای انتخاب بهترین تصمیم معرفی گردند.

تعریف ۱-۲-۱ قاعده δ از δ' با استفاده از تابع زیان مجموع مربعات خطا بهتر است اگر و فقط اگر به صورت غیر اکید برای تمام θها و به صورت اکید برای بعضی θها نامساوی زیر برقرار باشد.

$$R(\theta,\delta)\le R(\theta,\delta')$$

مقدار متوسط $R(\theta,\delta)$ مخاطره بیز[1] نامیده، اگر θ دارای توزیع پیشین G باشد، به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$R(\delta,G)=\underset{\theta}{E}[R(\theta,\delta)]=\underset{\theta}{E}\{E[L(\theta,\delta(X))]\}$$

1. Bayes

تعریف۱-۲-۲ یک قاعده δ^* مینیماکس نامیده می‌شود، اگر

$$\sup R(\theta,\delta^*) = \inf \sup R(\theta,\delta)$$

اگر D کلاس تمام قواعد تصمیم باشد، یک قاعده تصمیم تصادفی، آزمایشی تصادفی از اعضای D می‌باشد. اگر قاعده تصادفی δ، انتخاب δ_i با احتمال λ_i باشد، بطوریکه $i=1,\ldots,m$ $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i=1$ آنگاه تابع مخاطره δ از کلاس متناهی $D=\{\delta_1 \ldots \delta_m\}$ به صورت:

$$R(\theta,\delta)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i R(\theta,\delta_i)$$

خواهد بود و مشابهاً برای یک پیشین داده شدهٔ G بر روی فضای پارامتر Ω، مخاطره بیز آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R(\delta,G)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i E[R(\theta,\delta_i)]$$

یک قاعده تصادفی شده که مخاطره بیز $R(\delta,G)$ را در میان قواعد تصادفی شده کمینه کند، قاعدهٔ بیز تصادفی شده نامیده می‌شود. قاعده‌ای که در میان تمام قواعد تصادفی شده، عبارت $\max R(\theta,\delta)$ را کمینه کند، قاعده مینیماکس تصادفی شده نامیده می‌شود.

۱-۳ توابع زیان

در مسئله تصمیم، تابع زیان این حقیقت را بیان می‌کند که هرچه عمل a به مقدار واقعی پارامتر نزدیکتر باشد، زیان کمتری متحمل می شویم و هرچه عمل a از مقدار واقعی پارامتر دورتر باشد زیان بیشتری متوجه ما خواهد شد.

با توجه به آنچه در فصل‌های آینده بیان خواهد شد در اینجا چند تابع زیان متداول را معرفی می‌کنیم که در فصل‌های آینده از آنها استفاده خواهیم کرد.

• *تابع زیان مجموع مربعات خطا:* در صورتی که فضای عمل و فضای پارامتر m بعدی باشد، تابع زیان مجموع مربعات خطا به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$L(\theta,a)=\sum_{i=1}^{m}(\theta_i-a_i)^2 \qquad (۱-۱)$$

• *تابع زیان متعادل*[2]*:* زلنر[3] (۱۹۹۴) تابع زیان جدیدی به نام تابع زیان متعادل معرفی کرد این تابع زیان به گونه‌ای طراحی شده است که تابع مخاطره ناشی از آن به طور همزمان دو معیار نیکوئی برازش و دقت برآوردیابی در برآورد پارامتر θ را در نظر می‌گیرد. در حالی که بیشتر تحلیل‌های آماری تابع مخاطره ناشی از تابع زیان مورد استفاده تنها یکی از دو معیار مذکور را در نظر می‌گیرد.

فرض کنید $X=(X_1,\dots,X_n)\sim F_\theta$ نمونه تصادفی به اندازه n از مدل احتمالی F_θ باشد زلنر تابع زیان متعادل را به صورت:

$$L^{z}(\theta,t)=w\sum_{i=1}^{n}(x_i-t)^2+(1-w)(t-\theta)^2$$

معرفی کرد که در آن $w\in[0,1)$ مقدار معلوم و $t=t(X)$ برآوردگر پارامتر θ است.

جعفری جوزانی[4] و همکاران (۲۰۰۶) در حالت کلی تابع زیان متعادل زیر را که تعمیمی کلی از تابع زیان متعادل معرفی شده توسط زلنر است، ارائه کرد.

$$L_{w,\delta_0}(\theta,t)=w(\delta_0-t)^2+(1-w)(t-\theta)^2$$

که در آن δ_0 برآورد هدف است.

---

2. Balanced
3. Zellner
4. Jafari Jozani

در فصل سوم به منظور برآوردیابی بیز مقید[5] $\theta=(\theta_1 \ldots \theta_m)$، تابع زیان متعادل زیر را در نظر می‌گیریم.

$$L_l(\theta,t)=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left\{w(\delta_{oi}-t_i)^2+(1-w)(t_i-\theta_i)^2\right\} \qquad (۱- ۲)$$

۱-۴ تصمیم‌های بیزی

در روش‌های بیزی، θ به عنوان مقدار مشاهده شده متغیری تصادفی است که روی آن توزیع احتمالی تحت عنوان توزیع پیشین بر اساس اطلاعات قبلی، اعتقادات، باورها و تجربیات آزمایشگر فرض می‌شود فرض کنید $G(\theta)$ تابع چگالی احتمال پیشین θ در فضای پارامتر Ω باشد. در این حالت تابع مخاطره $R(\theta,\delta)$ یک متغیر تصادفی است که امید ریاضی آن تحت توزیع پیشین $G(\theta)$ را مخاطره بیز نامیده و با $R(\delta,G)$ نشان می‌دهیم. همچنین قاعده بیزی نسبت به توزیع پیشین $G(\theta)$ یک قاعده تصمیم $\delta_G(x)$ است که مخاطره بیز را در بین تمام قواعد تصمیم ممکن، مینیمم می‌کند، یعنی قاعده بیز، قاعده تصمیمی است که:

$$R(\delta_G(x),G)=\inf_\delta R(\delta,G)$$

۱-۴-۱ قواعد بیزی

فرض کنید تابع $q(\theta)$ با زیان درجه دوم $L(\theta,a)=(q(\theta)-a)^2$ را داشته باشیم و با توزیع پیشین $G(\theta)$ باشد. مسئله یافتن تابعی از x مانند $\delta(x)$ است، بطوریکه مخاطره بیز $R(\delta,G)=E[q(\theta)-\delta(x)]^2$ را

5. Constrained

کمینه می‌کند. قاعده‌ای مانند δ^* موجود است، بطوریکه $R(\delta,G)$ را کمینه می‌کند و در این صورت $\delta^*(X)=E[q(\theta)|X]$ به دست می‌آید و برآورد بیزی نامیده می‌شود.

به وسیله فرمولهای بیزی می‌توان در حالت پیوسته برای θ حقیقی و چگالی پیشین G، $\delta^*(x)$ را به صورت

$$\delta^*(x)=\frac{\int_{-\infty}^{\infty} q(\theta)\,p(x,\theta)G(\theta)d\theta}{\int_{-\infty}^{\infty} p(x,\theta)G(\theta)d\theta}$$

نوشت که در حالت گسسته بجای انتگرال از Σ استفاده می‌شود.

مخاطره پسین براساس توزیع پسین θ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R(a,G|X)=E[L(\theta,a)|X=x]$$

و برای توزیع پیشین G بر فضای Ω، مخاطره بیزی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}R(\delta,G)&=E[L(\theta,\delta(x))]\\&=\int_{\Omega} R(\theta,\delta)dG(\theta)\\&=\int_{\Omega}\int L(\theta,\delta(x))f(x|\theta)dG(\theta)\end{aligned} \qquad (۳-۱)$$

به دنبالهٔ برآوردهای $\{\delta_n\}$ مجانباً بهینه گفته می‌شود اگر در رابطهٔ زیر صدق کند.

$$0\le R(\delta_n,G)-R(G)\le C\ a_n$$

که در آن C یک مقدار ثابت مثبت و $\{a_n\}$ نیز دنباله‌ای از اعداد حقیقی مثبت است، بطوریکه $\lim_{n\to\infty} a_n=0$، اگر $X=x$ بوده و عمل a مورد استفاده قرار گیرد آنگاه $R(a,G|X)$ بیانگر امید زیان خواهد بود. لذا بایستی عمل $a=\delta^*(x)$ را چنان پیدا نمود که مقدار $R(a,G|X)$ را حتی‌الامکان کمینه کند.

قضیه ۱-۴-۱ اگر یک تابع $\delta^*(x)$ وجود داشته باشد بطوریکه:

$$R(\delta^*(x), G \mid X) = \inf\{R(a, G \mid X) : a \in A\}$$

آنگاه δ^* قاعده بیزی است.

حال اگر قاعده‌ای مانند δ_G وجود داشته باشد بطوریکه $R(\delta_G, G) = \inf_\delta R(\delta, G)$ آنگاه δ_G قاعدهٔ بیزی نامیده می‌شود.

۱-۴-۲ راه حل بیزی

دی[6] (۱۹۹۹) مسئله برآوردیابی با استفاده از تابع زیان خطای متعادل را مورد بررسی قرار داد. وی نشان داد که چگونه می‌توان خاصیت بیزی بودن برآوردگر با استفاده از تابع زیان مربع خطای متعادل را به کمک بیزی بودن تابعی از آن با استفاده از تابع زیان مربع خطا نتیجه گرفت.

قضیه زیر که توسط جعفری جوزانی و همکاران (۲۰۰۶) ارائه شده است، نشان می‌دهد که چگونه می‌توان برآوردگر بیزی پارامتر θ با استفاده از تابع زیان متعادل (۱-۲) را برحسب برآوردگر بیزی پارامتر θ با استفاده از تابع زیان مجموع مربعات خطا (۱-۱) به دست آورد.

قضیه ۱-۴-۲ برآوردگر بیزی $e^B(x)$ برای پارامتر θ با استفاده از تابع زیان متعادل (۱-۲) نسبت به توزیع پیشین $G(\theta)$، معادل است با راه حل بیزی $e^{B^*}(x)$ برای θ نسبت به «توزیع پسین» $G^*(\theta|x)$ با استفاده از تابع زیان مجموع مربعات خطا (۱-۱) که در آن $x \in \chi$،

$$G^*(\theta|x) = wI_{\delta_o(x)}(\theta) + (1-w)\,G(\theta|x)$$

---

6. Day

۱-۵ روشهای بیز و بیز تجربی[۷]

در روش بیزی، $X_1 ... X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع $f_X(x,\theta)$ در نظر گرفته می‌شود که در آن θ به عنوان مقدار یک متغیر تصادفی Ω با توزیع پیشین $G(\theta)$ است. با استفاده از توزیع پسین θ که شامل اطلاعات توزیع پیشین و مشاهدات $X = (X_1 ... X_n)$ است، می‌توان تصمیم مناسبی برای θ اتخاذ نمود. اگر $\delta(x)$، به عنوان تصمیم در مورد θ در نظر گرفته شود، در نظریه تصمیم $\delta(x)$ به گونه‌ای تعیین می‌گردد که تابعی مانند $L(\theta,\delta)$ به عنوان زیان حاصل از تصمیم $\delta(x)$ در مورد θ کمینه گردد. در روش بیزی با فرض معلوم بودن توزیع پیشین $G(\theta)$ برآورد بیزی θ حاصل می‌گردد. در عمل با موارد زیادی مواجه می‌گردیم که توزیع پیشین θ نامعلوم است. در این صورت اگر بتوانیم توزیع پیشین θ را براساس مشاهدات برآورد نمائیم، بکارگیری آن در روش بیزی ما را به سوی یک برآورد تقریبی برای θ هدایت می‌کند. این ایده در روش بیز تجربی که اولین بار توسط رابینز[۸] (۱۹۵۶) ارائه گردید، بکار گرفته شده و با استفاده از داده‌های موجود اقدام به برآورد توزیع پیشین گردیده و نهایتاً براساس آن برآورد بیز تجربی برای θ آورده می‌شود.

۱-۵-۱ روش بیز تجربی

مسئله تصمیم بیز تجربی مرکب از دنباله‌ای از تکرارهای مسئله تصمیم مشابه است. مسئله تصمیم آماری انتخاب یک تابع تصمیم مانند δ است که به عنوان تابعی از χ به A تعریف می‌شود. فرض کنید $L(\delta(\cdot),\theta)$ تابع اندازه پذیری روی $\chi\times\Omega$ باشد، میانگین زیان δ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$R(\delta,\theta)=\int L(\delta(x),\theta)f_{X|\Theta}(x|\theta)dx \qquad (۴-۱)$$

7. Empirical
8. Robbins

امید زیان نیز شکل زیر به دست می‌آید

$$R(\delta,G)=\int R(\delta,\theta)\, dG(\theta) \qquad (۱- ۵)$$

مسئله تصمیم آماری، انتخاب تابع تصمیمی مانند δ_G است، بطوریکه $R(\delta,G)$ را در میان تمام توابع تصمیم δ کمینه نماید. در حالت کلی این انتخاب ممکن است امکانپذیر نباشد، اما این مشکل را با فرض اینکه یک تابع تصمیم δ_G وجود دارد، پشت سر خواهیم گذاشت بطوریکه برای هر x در χ داشته باشیم

$$\int L(\delta_G(x),\theta).f_{X|\Theta}(x|\theta)dG(\theta)=\min_{a\in A}\int L(a,\theta)f_{X|\Theta}(x|\theta)dG(\theta)$$

واضح است که برای هر تابع تصمیم δ

$$R(\delta,G)\geq R(\delta_G,G)$$

δ_G تابع تصمیم بیزی نسبت به G نامیده می‌شود و $R(G)=R(\delta_G,G)$ کمترین مخاطرهٔ بیز قابل دسترس به وسیلهٔ هر تابع تصمیم نسبت به G است.

روابط (۱- ۴) و (۱- ۵) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$R(\delta,G)=\int_X \varphi_G(\delta(x),x)$$

بطوریکه

$$\varphi_G(a,x)=\int_\Omega L(a,\theta)f_{X|\theta}(x|\theta)dG(\theta)$$

$$\varphi_G(\delta_G(x),x)=\min \varphi_G(a|x) \qquad (۱-۶)$$

آنگاه برای هر تابع تصمیم از δ داریم

$$R(\delta_G, G) \leq R(\delta, G)$$
$$R(G) = R(\delta_G, G) = \int_x \varphi_G(\delta_G(x), x)\, dx \qquad (۷-۱)$$

تعریف ۱-۵-۱ دنباله برآوردگرهای $T = \{\delta_n\}$ نسبت به G بهینه مجانبی است، اگر

$$\lim_{n \to \infty} R_n(T, G) = R(G)$$

تعریف ۱-۵-۲ دنباله برآوردگرهای $T = \{\delta_n\}$ نسبت به G بهینه مجانبی از مرتبهٔ a_n است، اگر

$$R_n(T, G) - R(G) = O(a_n)$$

بطوریکه $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

تعریف ۱-۵-۳ دنبالهٔ قواعد بیز تجربی $T = \{\delta_n\}_{n \geq 1}$ نسبت به G، مجانباً بهینه در احتمال است اگر

$$.R(\delta_n, G) \xrightarrow{P} R(G)(n \to \infty)$$

وقتی G نامعلوم است، می‌توان به وسیلهٔ مشاهدات جمع‌آوری شده در مرحله nام «برای بهبود بخشیدن قاعده تصمیم δ_G» مخاطره بیز را به مخاطره بیز بهینه R (G) نزدیک نمود.

قضیه عمومی زیر مربوط به بهینگی مجانبی یک برآوردگر بیز تجربی است که در آن به منظور سهولت، تابع زیان درجه دوم در نظر گرفته شده است. فرض کنید $\Omega = A$ یک زیر فاصلهٔ پیوسته از $(-\infty, \infty)$ باشد. در این وضعیت، قاعدهٔ بیزی به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\delta_G(X) = \frac{\int \theta f_{X|\theta}(x|\theta)\, dG(\theta)}{\int f_{X|\theta}(x|\theta)\, dG(\theta)}$$

اگر

$$R_n(T,G)-R(G)=E\left[\{\delta_n(X_1....X_n,X_{n+1})-\theta_{n+1}\}^2\right]-R(G)\to \circ$$

آنگاه دنباله $T=\{\delta_n\}$ تعریف ۱-۵-۲ را برآورده می‌کند.

قضیه زیر یک شرط کافی برای رابطهٔ بالا ارائه می‌نماید.

قضیه ۱-۵-۱ اگر

$$\varphi(n)=E_{n+1}[\{\delta_n(X_1....X_n,X_{n+1})-\delta_G(X_{n+1})\}]^2\to \circ$$

آنگاه دنباله $T=\{\delta_n\}$ نسبت به پیشین G بهینه مجانبی است. اگر $\varphi(n)=O(a_n)$ باشد، آنگاه دنبالهٔ T نسبت به G بهینه مجانبی از مرتبه a_n خواهد بود.

در حقیقت این قضیه بیانگر آن است که اگر $\delta_n(X_1....X_n,X_{n+1})$ برآوردگری خوب از $\delta_G(X_{n+1})$ باشد، آنگاه دنباله $T=\{\delta_n\}$ بهینه مجانبی خواهد بود. جالب توجه اینکه در قضیه ۱-۵-۱ نیازی به برآورد G نیست، فقط نیازمند برآورد بعضی توابع از G نظیر $\int f_G(\theta)dG(\theta)$ هستیم، که این مشاهدات در ساختن قاعده بیز تجربی مفید می‌باشد.

قضیه ۱-۵-۲ فرض کنید برای تمام مقادیر $\theta\in\Omega$ داشته باشیم

$$L^*(\theta)=\sup_{a\in A}L(\theta,a)<\infty \qquad \eta=\left\{G:\int_\Omega L^*(\theta)dG<\infty\right\}$$

در این صورت اگر به ازای هر x

$$R(\delta_n,G\mid x)\xrightarrow{p}R(\delta_G,G\mid x)\,(n\to\infty)$$

آنگاه قواعد $T=\{\delta_n\}_{n\geq 1}$ برای هر $G\in\eta$، مجانباً بهینه هستند.