بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه شهید باهنر کرمان

دانشکده علوم ـ بخش فیزیک

پایان‌نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی‌ارشد فیزیک

تحت عنوان:

کوانتش میدان الکترومغناطیسی به روش تابع گرین

مولف :

حسن صفری

استاد راهنما:

دکتر محمدرضا مطلوب

خردادماه ۱۳۷۹

بسمه تعالی

این پایان نامه

به عنوان یکی از شرایط احراز درجه کارشناسی ارشد

به

بخش فیزیک

دانشکده علوم ، دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچ گونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود.

امضـــاء

دانشجو : حسن صفـری

استادراهنما: دکتر محمدرضا مطلوب

داور۱: دکتر محمد مهدی گلشن

داور۲: دکتر مجید رهنما

داور۳:

داور٤:

تقدیم به :

پدر بزرگوار

و مادر مهربانم

تشکر و قدردانی

بدینوسیله از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر مطلوب بخاطر راهنمائیهای باارزش و زحمات بی‌دریغشان در به انجام رسیدن این پایان‌نامه تشکر و قدردانی می‌نمایم. همچنین وظیفهٔ خود می‌دانم که از آقایان دکتر رهنما و دکتر گلشن که داوری این پایان‌نامه را بعهده داشتند سپاسگزاری نمایم.

در ضمن از سرکار خانم مانی که با صبر و حوصله زحمت حروفچینی این پایان‌نامه را قبول نمودند نیز بسیار ممنونم.

حسن صفری

خردادماه ۱۳۷۹

چکیده

در این پایان‌نامه میدان الکترومغناطیسی را به روش تابع گرین در یک محیط دی‌الکتریک غیرهمگن پاشنده و اتلافی، کوانتیزه کرده‌ایم. محیط مورد نظر، فضایی است که با دو دی‌الکتریک نیمه نامتناهی با فصل مشترک تخت اشغال شده است. متغیرهای دینامیکی و اندازه حرکتهای تعمیم‌یافته به روش استاندارد تعریف شده‌اند. پیمانهٔ انتخاب شده برای میدانها، پیمانه‌ایست که در آن پتانسیل نرده‌ای برابر صفر است. روابط جابجایی کانونیک همزمان را نیز برای میدان‌های بدست آمده بررسی کرده‌ایم. در نهایت میدان الکترومغناطیسی را به میدانهای طولی و عرضی و همچنین میدان عرضی را به قطبشهای موازی (p) و عمودی (n) تفکیک کرده‌ایم. این تفکیکها را بوسیلهٔ تفکیک تابع گرین انجام داده‌ایم.

فهرست

فصل ۱

مقدمه

پیدایش مکانیک کوانتومی و موفقیت آن در توجیه پدیده‌های میکروسکوپی، ما را برآن می‌دارد که برای مطالعهٔ پدیده‌های نوری در محدودهٔ میکروسکوپی نیز به الکترودینامیک کوانتومی روی آوریم. بدیهی است در گسترش الکترودینامیک کوانتومی لازم است میدان الکترومغناطیسی را در محیطهای گوناگون کوانتیزه کنیم. تلاشهایی که در سالهای اخیر به این منظور صورت گرفته، اهمیت این مسئله را نشان می‌دهد.

مشکل اصلی در کوانتش میدان الکترومغناطیسی در حضور ماده در آن است که در چنین حالتی با یک سیستم بسته سروکار نداریم. به این معنی که در مطالعه میدان الکترومغناطیسی باید برهمکنش متقابل آن با ماده نیز در نظر گرفته شود.

یک روش کوانتش میدان الکترومغناطیسی، بسط میدان برحسب توابع مد است. این روش متکی به اطلاعاتی است که از مسئلهٔ نوسانگر هارمونیک ساده در مکانیک کوانتومی داریم. مسئله‌های کوانتش میدان الکترومغناطیسی در فضای تهی، در یک نیم‌فضا و در داخل یک کاواک در غیاب هرگونه اتلاف، از جمله مسائلی هستند که با استفاده از این روش به آنها پرداخته شده است.

از آنجا که نیاز به مطالعهٔ انتشار نور در محیطهای مادی غیرقابل انکار است، تلاشهای زیادی برای گنجاندن حضور ماده در فرمولبندی انجام شده است. در سال ۱۹۷۱ با فرض آنکه تابع دی‌الکتریک یک ثابت حقیقی مستقل از فرکانس است، میدان الکترومغناطیسی در فضایی که نیمی از آن با چنین دی‌الکتریکی اشغال شده کوانتیزه شده است [۱،۲]. این روش به آسانی به حالتی در حضور تیغهٔ دی‌الکتریک تعمیم داده شد [۳]. اما می‌دانیم که جز در فضای تهی، انتشار موج الکترومغناطیسی با پاشندگی و اتلاف همراه است. تعمیم مسئله به دی‌الکتریکهای پاشنده که در آن تابع دی‌الکتریک یک تابع حقیقی از فرکانس است، کاری بود که در سال ۱۹۹۲ بصورت بسط میدان الکترومغناطیسی به صورت تابع مد زمانی انجام شد [۴].

استفان بارنت[1] و هاتنر[2] برای گسترش مسئله به توابع دی‌الکتریک مختلط، توصیف ماکروسکوپی ماده را کنار گذاشته و از دیدگاه میکروسکوپی با ارائه یک مدل برای تابع دی‌الکتریک و تعریف یک تابع لاگرانژی مؤثر توانستند میدان الکترومغناطیسی را در حضور یک دی‌الکتریک نامتناهی کوانتیزه کنند [۵]. این مسئله از این نظر که تابع دی‌الکتریک آن با اصل علیت سازگار است، قابل استفاده در تمام فرکانسهاست ولی از این جهت که تابع دی‌الکتریک را بصورت خاص تعیین می‌کند، راه‌حل جامعی نیست. در واقع در بسیاری از موارد محاسبهٔ تابع دی‌الکتریک با استفاده از ساختمان ماده، به آن صورتی که در این فرمولبندی منظور شده، عملی نیست.

روشهای استاندارد برای کوانتش میدان الکترومغناطیسی، روشهایی هستند که براساس تعریف یک تابع لاگرانژی مؤثر برای سیستم میدان الکترومغناطیسی و ماده انجام می‌گیرند. معادلات اولر_لاگرانژ، معادلات ماکروسکوپی ماکسول را در دی‌الکتریک نتیجه می‌دهند. اهمیت کوانتش میدان الکترومغناطیسی از دید ماکروسکوپی این است که عبارتی که برای عملگرهای میدان الکتریکی پیدا می‌کنیم، در حضور هر ماده‌ای قابل استفاده‌اند.

روش دیگر در کوانتش میدان الکترومغناطیسی روش تابع گرین است که با توصیف ماکروسکوپی از ماده همراه است. روش تابع گرین از آنجا که براساس تعریف یک تابع لاگرانژی مؤثر استوار است، روشی استاندارد محسوب می‌شود. این روش ابتدا در سال ۱۹۹۵ برای مسئله یک بعدی در هندسه‌های گوناگون بکار رفت [۷،۶] و سپس به مورد سه بعدی برای محیط همگن گسترش یافت [۸]. از آنجا که این روش

[1] Stephen M. Barnett

[2] Bruno Huttner

هیچ محدودیتی روی تابع دی‌الکتریک اعمال نمی‌کند جز این ضرورت که این تابع باید با اصل علیت سازگار باشد، این روش کاملترین روش ارائه شده در کوانتش میدان الکترومغناطیسی است.

وجود قسمت موهومی در تابع دی‌الکتریک باعث می‌شود که فرکانس و بردار موج بصورت متغیرهای مستقل در فرمولبندی ظاهر شوند. پس از کوانتش میدان الکترومغناطیسی در دی‌الکتریک پاشنده و اتلافی می‌توان بوسیلهٔ حدگیری، کوانتش میدان در دی‌الکتریکهای بدون اتلاف را نیز بدست آورد. خواهیم دید که این حدگیری باعث ایجاد یک رابطه بین فرکانس و بردار موج می‌شود (بخش ۳ـ۳).

در این پایان‌نامه قصد داریم کوانتش میدان الکترومغناطیسی را به یک محیط غیرهمگن توسعه دهیم. در فصل دوم ابتدا مروری بر کوانتش میدان بوسیلهٔ بسط برحسب توابع مد در یک جعبه خواهیم داشت و سپس با تعریف تابع لاگرانژی استاندارد و متغیر تعمیم‌یافته، رابطهٔ جابجایی کانونیک را که تفاوت اساسی مکانیک کلاسیک و مکانیک کوانتومی است، بدست می‌آوریم. هرگاه عبارتی برای میدان الکترومغناطیس کوانتیزه یافتیم، باید نشان دهیم که این روابط جابجایی صادقند. در فصل سوم ابتدا مسئلهٔ یک بعدی همگن و غیرهمگن و سپس مسئله سه بعدی همگن را مرور می‌کنیم. در فصل چهارم پس از گسترش مسئله سه بعدی به محیط غیرهمگن، میدان الکترومغناطیسی را به قسمتهای طولی و عرضی و سپس قسمت عرضی را به قطبش‌های عمودی (n) و موازی (p) تفکیک می‌کنیم و در فصل پنجم به نتیجه‌گیری می‌پردازیم.

فصل ۲

کوانتش میدان الکترومغناطیسی

در این فصل قصد داریم چگونگی کوانتش میدان الکترومغناطیسی را به دو روش بیان کنیم.

روش اول مبتنی بر توصیف میدان الکترومغناطیسی برحسب مدهای ارتعاشی است که نظیر مجموعه‌ای از نوسانگرهای مستقلند. ابتدا میدان را در یک ناحیهٔ تهی مکعب شکل بسط فوریه داده و سپس با اطلاعاتی که از مسئلهٔ نوسانگر هماهنگ ساده در مکانیک کوانتومی داریم، میدان الکترومغناطیسی را کوانتیزه می‌کنیم. بدیهی است که در این روش باید نخست مسئله نوسانگر هماهنگ ساده را در مکانیک کوانتومی مرور کنیم.

روش دوم براساس تعریف متغیر و اندازه حرکت تعمیم‌یافتهٔ آن است که به تفصیل به آن خواهیم پرداخت. از این روش در فصلهای بعد نیز استفاده خواهیم کرد. اکنون مسئلهٔ نوسانگر هماهنگ ساده را در مکانیک کوانتومی مرور می‌کنیم.

۲ـ۱ نوسانگر هماهنگ ساده

هامیلتونی نوسانگر هماهنگ ساده به شکل زیر است:

$$H = \frac{p^{۲}}{۲m} + \frac{۱}{۲} m\omega^{۲} x^{۲} \qquad (۱\_۲)$$

که در آن x و p بترتیب عملگرهای موقعیت و اندازه حرکتند. برحسب این دو عملگر، دو عملگر دیگر که مزدوج هرمیتی یکدیگرند را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{۲\hbar}} x + i \frac{p}{\sqrt{۲m\omega\hbar}} \qquad (۲\_۲)$$

$$a^{\dagger} = \sqrt{\frac{m\omega}{۲\hbar}} x - i \frac{p}{\sqrt{۲m\omega\hbar}} \qquad (۳\_۲)$$

از این پس سعی می‌کنیم عملگرهای دیگر را برحسب a و $a^{\dagger}$ بیان کنیم. برای مثال خواهیم داشت:

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{۲m\omega}} (a + a^{\dagger}) \qquad (۴\_۲)$$

$$p = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{۲}} (a^{\dagger} - a) \qquad (۵\_۲)$$

دو عملگر a و $a^\dagger$ در رابطهٔ جابجایی زیر صدق می‌کنند:

$$[a, a^\dagger] = ۱ \qquad (۲\_۶)$$

که در نوشتن آن از رابطهٔ جابجایی بین عملگرهای x و p که بصورت زیر است استفاده کرده‌ایم:

$$[x, p] = i\hbar \qquad (۲\_۷)$$

چنانچه از روابط (۲_۴) و (۲_۵) در هامیلتونی استفاده کنیم، خواهیم دید که این عملگربرحسب a و $a^\dagger$ شکل ساده‌ای دارد.

$$H = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{۱}{۲}) = \hbar\omega(N + \frac{۱}{۲}) \qquad (۲\_۸)$$

که در آخرین گام $N = a^\dagger a$ قرار داده‌ایم که عملگری هرمیتی است. بنابراین ویژه مقادیر آن حقیقی هستند.

روابط جابجایی مهم بین عملگرهایی که تا اینجا معرفی کرده‌ایم رابطهٔ (۲_۶) همراه با روابط زیرند:

$$[H, a] = \hbar\omega[N, a] = -\hbar\omega a \qquad (۲\_۹)$$

$$[H, a^\dagger] = \hbar\omega[N, a^\dagger] = \hbar\omega a^\dagger \qquad (۲\_۱۰)$$

ویژه حالات هامیلتونی همان ویژه حالات N هستند که با روابط ویژه مقداری زیر داده می‌شوند:

$$N|n\rangle = n|n\rangle \qquad (۲\_۱۱)$$

$$H|n\rangle = (n + \frac{۱}{۲})\hbar\omega|n\rangle \qquad (۲\_۱۲)$$

از آنجا که عملگر هامیلتونی هرمیتی است، این ویژه حالات برهم عمودند و یک مجموعهٔ کامل تشکیل می‌دهند. بنابراین می‌توانیم با بهنجار کردن بردارهای $\langle n|$ بنویسیم:

$$\langle m|n\rangle = \delta_{mn} \qquad (۲\_۱۳)$$

می‌توان نشان داد که n باید یک عدد صحیح و نامنفی باشد [۹]. بنابراین ویژه مقادیر انرژی بصورت زیر