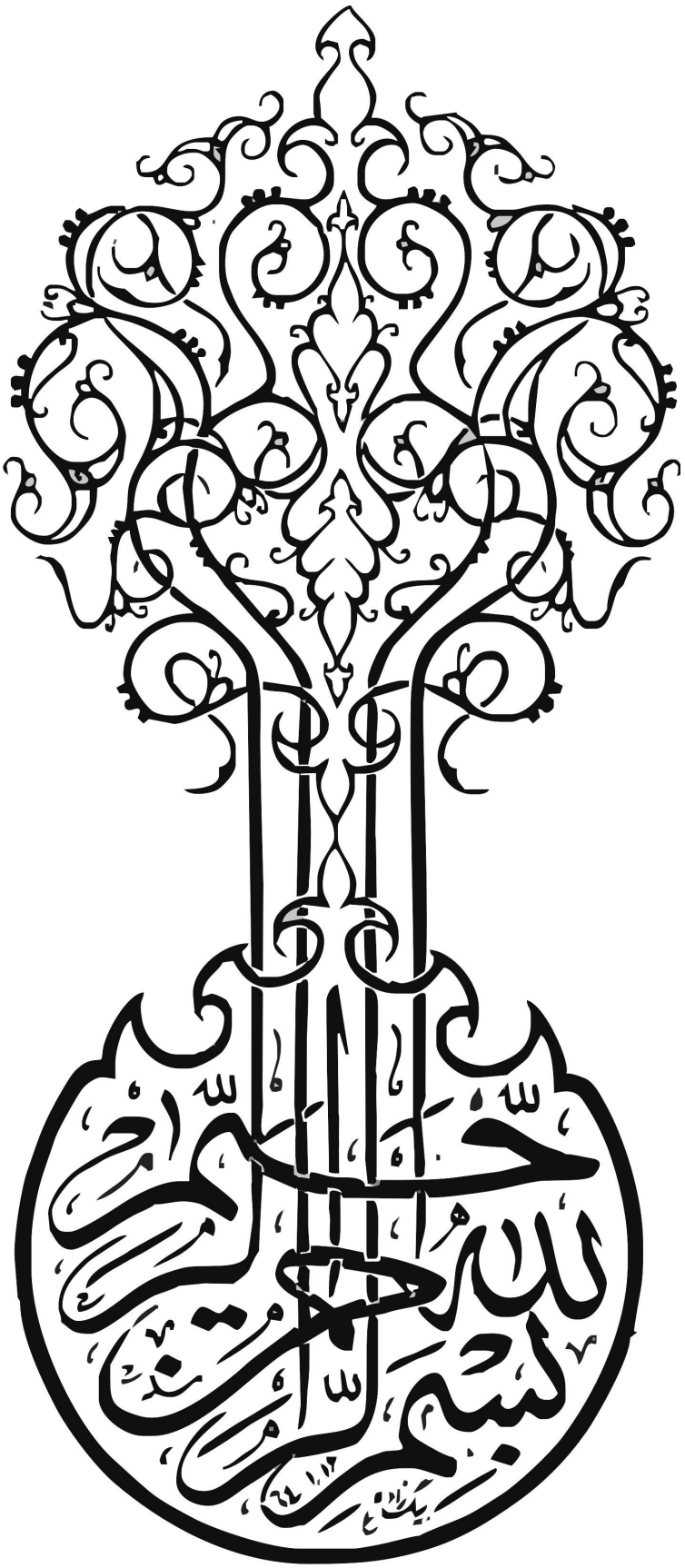

بسم الله الرحمن الرحيم

به نام خدا

دانشگاه علامه طباطبایی تهران

دانشکده اقتصاد

گروه آمار

پایان نامه جهت اخذ کارشناسی ارشد

عنوان:

سامانه های صف بندی ورود گروهی با تعطیلی تکی و تعطیلی مضاعف سرویس دهنده

استاد راهنما:

دکتر عبدالرحیم بادامچی زاده

استاد مشاور:

دکتر محمدرضا صالحی راد

تهیه و تنظیم:

سارا همایون پور

خرداد ۸۹

فهرست مطالب

فصل اول: مفاهیم اولیه

۱-۱ صف ٦

۱-۲ مثال ۷

۱-۳ مشخصه های فرآیندهای زیر بنایی ۸

۱-٤ نمادگذاری ۱۳

۱-٥ اندازه های مؤثر ۱۳

۱-٦ تاریخچه و کاربرد ۱٥

۱-۷ انواع مدل های صف ۱٦

۱-۸ ضریب بهره وری ۱۷

۱-۹ ورودی گروهی صف $M^X/G/1$ ۱۸

۱-۱۰ تعریف تبدیل لاپلاس- استیلتیس ۲۱

۱-۱۱ حالت سامانه ۲۲

۱-۱۲ ویژگی $PASTA$ ۲٥

فصل دوم: سامانه صف $M^X/G/1$ با تعطیلی تکی

۲-۱ مقدمه ۲۸

۲-۲ تشریح مدل ۲۹

۲-۳ توزیع اندازه صف در آغاز دوره اشتغال ۳۱

۲-٤ توزیع دوره اشتغال ۳٥

۲-٥ توزیع اندازه صف در دوره بیکاری ٤۰

۲-٦ توزیع اندازه صف در لحظه عزیمت ٤٤

۲-۷ خلاصه مطالب فصل دوم ٥۳

فصل سوم: سامانه صف $M^X/G/1$ با تعطیلی مضاعف

۳-۱ مقدمه ٥٥

۳-۲ تشریح مدل ٥٦

۳-۳ توزیع حالت پایای اندازه صف ٥۷

۳-٤ توزیع اندازه صف در لحظه عزیمت ٦٦

۳-۵ بررسی حالت خاص ۷۱
۳-۶ خلاصه فصل سوم ۸٤
فصل چهارم: مثال عددی

چکیده

این پایان نامه مشتمل بر چهار فصل است در فصل اول آن به بیان مفاهیم اولیه و مقدماتی می پردازیم که در فصل های بعدی مکرر از آنها استفاده خواهیم کرد.

در فصل دوم به بررسی سامانه صف تک سرویس دهنده ای می پردازیم که درآن مراجعات فرایند پواسون مرکب را تشکیل می دهند و سرویس یک مرحله ای بوده و دارای توزیع کلی می باشد. در این سامانه سرویس دهنده پس از اتمام سرویس متقاضیان حاضر در سامانه هنگامی که هیچ متقاضی ای در سامانه حضور ندارد به تعطیلی با طول تصادفی V می رود پس از بازگشت از تعطیلی سرویس دهنده شروع به سرویس دهی به متقاضیانی می کند که در طول زمان تعطیلی سرویس دهنده وارد سامانه شده اند(اگر متقاضی ای وارد سامانه شده باشد) در غیر این صورت تا ورود متقاضی به سامانه منتظر می ماند. سامانه مورد نظر در اینجا سامانه صف تک تعطیلی می باشد.

در فصل سوم به بررسی و تحلیل سامانه صف $M^X/G/1$ با تعطیلی مضاعف می پردازیم. این سامانه تک سرویس دهنده است و به دسته های مراجعه کننده با ورودی پواسون مرکب سرویس می دهد و سرویس یک مرحله ای است.به محض اینکه سامانه خالی می شود، سرویس دهنده برای مدت زمان تصادفی به تعطیلی می رود. پس از سپری شدن این زمان تعطیلی، سرویس دهنده به سامانه بازمی گردد ولی در این هنگام هیچ متقاضی ای را در سامانه ملاحظه نمی کند بنابراین مجدداً به تعطیلی می رود و به گرفتن تعطیلی ادامه می دهد تا زمانیکه حداقل یک متقاضی پس از بازگشت از تعطیلی در صف حضور داشته باشد.

در فصل چهارم نیز تلاش شده است تا متناسب با مدل های ارائه شده در پایان نامه، مثال های عددی و کاربردی آورده شود.

واژگان کلیدی: صف $M^X/G/1$،دوره اشتغال، دوره بیکاری، دوره اقامت،ورود گروهی، اندازه صف، تعطیلی تکی و مضاعف.

فصل اول

مفاهیم اولیه

مقدمه

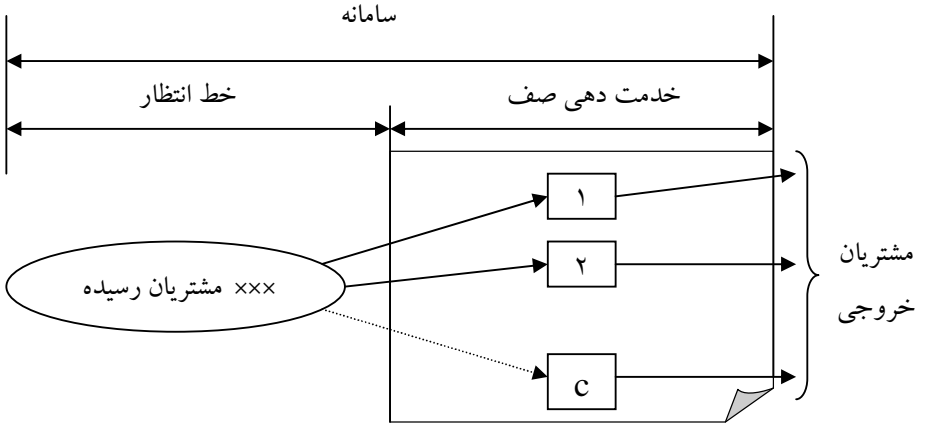
نظریه صف بندی یکی از مهمترین ابزار برای تحلیل فرآیندهای تصادفی به شمار می آید. اکثرسامانه های تولیدی و کمک تولیدی مانند سامانه های برنامه ریزی و کنترل فرایندهای تولیدی، سامانه های حمل و نقل، مدلهای ترافیک، برنامه ریزی و کنترل عملیات در فرودگاه ها و ... توسط سامانه های صف مدلسازی و تحلیل می گردند.

انسان ها در زندگی روزمره خود با انواع مختلف صف، که منجر به از بین رفتن وقت، نیرو و سرمایه آنها می شود، سروکار دارند. اوقاتی که در صف های اتوبوس، نهارخوری، خرید و نظایر آنها به هدر می رود نمونه های ملموسی از این اتلاف وقت در زندگی بشر است. به علاوه صف های مهم تری را می توان نام برد که هزینه های اقتصادی و اجتماعی آنها به مراتب بیش از نمونه های ساده فوق است. از آن جمله می توان به صف های حاصل از ترافیک شهری و نیز صف هایی را که در فرودگاه ها، بنادر، موسسات مخابراتی و در پشت فرآیندهای تولید تشکیل می شود اشاره نمود. به علاوه صف یکی از مشکلات روزمره انسانها است، در فرایندهای تولیدی نیز به لحاظ وجود گلوگاه ها و نیز عدم تعادل بین ظرفیت های تولیدی و تقاضا، همواره با انتظار سرمایه به شکل مواد و تجهیزات، اطلاعات و ... در صف روبرو هستیم. نظریه صف به مطالعه شاخص های انتظار در صف از دیدگاه ریاضی می پردازد و تأثیر عوامل تشکیل دهنده صف و راههای منطقی کاهش زمان انتظار را بررسی می کند. اگرچه هیچگاه نمی توان صف را بطور کامل حذف کرد ولی می توان ضایعات زمانی و هزینه ای ناشی از آن را حتی الامکان کاهش داد. قدیمی ترین کاربرد نظریه صف، در سامانه های مخابراتی است که به منظور ارائه خدمت به ارتباطات بوجود آمد. در اوائل قرن بیستم ارلانگ ظرفیت خطوط تلفن را مورد مطالعه قرار داد. مطالعات ارلانگ در قالب نظریه های ریاضی- احتمالات و آمار به تدریج توسعه یافته و نظریه صف بوجود آمد. مطالعه عملیات در فرودگاه ها و بنادر به علت اهمیتشان بخش قابل توجه وجداگانه ای را در نظریه صف به خود اختصاص داده اند. باند فرودگاه را می توان یک خدمت دهنده به حساب آورد با توجه به اینکه در هر لحظه فقط یک هواپیما می تواند از باند استفاده نماید (روی باند

بنشیند و یا از آن بلند شود)، به این ترتیب در فرودگاه های پررفت و آمد، هواپیمایی برای دریافت مجوز فرود ممکن است مدتی (در حال پرواز در بالای فرودگاه) در صف انتظار بماند. مشابه این امر می تواند در بنادر اتفاق افتد. کشتی های ورودی به بنادر به علت محدودیت امکانات تخلیه و بارگیری ممکن است حتی ماه ها در صف منتظر بمانند.

به لحاظ رفتار احتمالی در ورودی و سرویس، سامانه های صف بسیار پیچیده تر از آن است که بتوان توصیف و تعریف دقیقی برای پارامترهای آن و در نتیجه برای معیارهای ارزیابی آن بدست آورد. بنابراین لازم است یک توصیف تقریبی که قابل قبول و قابل تحلیل باشد برای پارامترهای آن و در نتیجه برای معیارهای ارزیابی سامانه های صف بدست آورد.

۱-۱- **صف** (به زبان انگلیسی Queue یا Waiting Line ، به فرانسه File Dattente و به زبان آلمانی Warteschlange) را می توان به صورت زیر توصیف کرد. متقاضیان برای اخذ سرویس مراجعه می کنند، اگر ارائه سرویس بلافاصله مقدور نباشد منتظر می شوند و بعد از اخذ سرویس، سامانه یا تشکیلاتی را که به آن مراجعه کرده اند ترک می کنند. اگرچه تمام وضعیت های صف بندی اساساً مشابه اند، اما صف ها در عمل بسیار متنوع اند و لازم است برای آنها ارکان اولیه سامانه صف بندی، یعنی سرویس گیرنده، سرویس دهنده، سرویس و صف را مشخص کنیم. ذیلاً نمونه هایی از سامانه های صف بندی و واژگان مربوط به سامانه را آورده ایم.



نمودار۱- نمای شماتیک از سامانه صف

۱-۲- مثال

به منظور آشنایی بیشتر با سامانه صف، در زیرمثال هایی را که در زندگی روزمره با آنها مواجه می شویم ارائه می کنیم.

فروشگاه یا باجه پستی: سرویس گیرنده مشتریان یا ارباب رجوع بوده و مکانیسم صف، انتظار تا فراغت فروشنده یا فراغت متصدی و مکانیسم سرویس خرید یا انجام کار مورد نظر می باشد.

ایستگاه اتوبوس یا تاکسی: سرویس گیرنده مسافرین شهری بوده و مکانیسم صف، مسافرین منتظر برای رسیدن اتوبوس یا تاکسی و مکانیسم سرویس سوار شدن به اتوبوس یا تاکسی می باشد.

مطب پزشک یا درمانگاه: سرویس گیرنده بیماران و همراهان بوده و مکانیسم صف، شماره های نوبت و مکانیسم سرویس ملاقات با پزشک می باشد.

ادارات، مؤسسات یا کارخانه ها: سرویس گیرنده یا متقاضی کارهای روزمره بوده و مکانیسم صف پرونده ها یا کارهای در دست بررسی و مکانیسم سرویس انجام کارهای متقاضیان می باشد.

فرودگاه ها: سرویس گیرنده هواپیماهای از راه رسیده که اجازه فرود می خواهند بوده و مکانیسم صف به صورت هواپیماهایی که تا دریافت اجازه ورود و خالی شدن باند باید دور بزنند و مکانیسم سرویس نشستن هواپیما می باشد.

انبارهای کالا یا سردخانه ها: سرویس گیرنده کالاهایی هستند که به انبار فرستاده می شوند و مکانیسم صف شامل کالاهای رسیده برای ثبت در دفتر انبار و مکانیسم سرویس ثبت کالا در دفتر و قرار دادن آن در انبار می باشد.

مرکز تلفن: سرویس گیرنده گوشیهایی هستند که برداشته می شوند و مکانیسم صف افراد منتظر برای دریافت خط آزاد و مکانیسم سرویس دریافت خط آزاد می باشد.

بنادر: سرویس گیرنده کشتیهایی که برای بارگیری یا تخلیه به بندر می رسند بوده و مکانیسم صف کشتی هایی که در بندر پهلو گرفته اند و مکانیسم سرویس مرحله تخلیه یا بارگیری کشتی می باشد.

سرویس گیرنده را متقاضی می نامیم و همان طور که در این مثال ها اشاره شد متقاضی لزوماً به معنای انسان نیست و می تواند یک شیء باشد. مثلاً در فرودگاه، متقاضیان هواپیماهایی هستند که اجازه فرود می خواهند. در بخش بعد مشروح فرایندهای زیربنایی یک سامانه صف بندی را آورده ایم.

۱-۳- مشخصه های فرآیندهای زیر بنایی

شش مشخصهٔ پایه ای فرایند صف بندی عبارت اند از:

(الف) الگوی ورود متقاضیان

(ب) الگوی سرویس سرویس دهنده یا سرویس دهندگان

(ج) نظم صف

(د) ظرفیت سامانه

(ه) تعداد باجه های سرویس

(و) تعداد مراحل سرویس

۱-۳-۱-الگوی ورود متقاضیان

یکی از مشخصه های هر سامانه صف بندی چگونگی مراجعهٔ متقاضیان است که غالباً برحسب میانگین تعداد مراجعه کنندگان در واحد زمان (میانگین نرخ ورود) یا به وسیلهٔ متوسط زمان بین دو ورود متوالی (میانگین فاصلهٔ زمانی دو ورود متوالی) اندازه گیری می شود. این دو کمیت به وضوح به هم مربوط اند یعنی با داشتن یکی، دیگری را نیز می توان بدست آورد. اگر λ میانگین نرخ ورود یعنی متوسط تعداد متقاضیانی باشد که در واحد زمان مراجعه می کنند، آن گاه با یک تناسب ساده معلوم می شود که $\frac{۱}{\lambda}$ میانگین فاصلهٔ زمانی بین دو ورود متوالی است. در واقع می گوییم در یک واحد زمان به طور متوسط λ نفر وارد می شوند. در صورتی که جریان ورود متقاضیان کاملاً معین (قطعی) و شامل هیچگونه الگوی احتمالاتی نباشد دراین صورت نحوهٔ ورود کاملاً با میانگین نرخ ورود یا میانگین فاصله زمانی بین دو ورود متوالی معین می شود. در غیر این صورت

یعنی وقتی در جریان ورود متقاضیان عدم حتمیت وجود دارد آنگاه توزیع احتمال فرایند مراجعه یا توزیع احتمال فاصلهٔ زمانی مراجعات لازم می شود.

موضوع دیگر مربوط به فرایند ورودی، آگاهی از امکان ورود گروهی است. در بعضی از سامانه ها ممکن است متقاضیان به صورت گروهی به سامانه مراجعه کنند. در چنین وضعیت هایی نه تنها فاصلهٔ زمانی بین مراجعهٔ دسته ها یا احیاناً تابع توزیع فاصلهٔ زمانی بین مراجعه دسته ها لازم است، بلکه تعداد افراد متشکل در هر دسته یا تابع توزیع تعداد افراد متشکل در هر دسته را نیز باید بدانیم.

همچنین لازم است از عکس العمل متقاضی در هنگام ورود به سامانه با اطلاع باشیم. یک متقاضی ممکن است بدون توجه به طول صف به صف انتظار داخل شود و تا حصول سرویس سامانه را ترک نکند، یا ممکن است اگر صف به نظر او طویل بیاید به صف وارد نشود. اگر متقاضی در هنگام ورودش از پیوستن به صف خودداری کند در این صورت او را منصرف می گوییم. از طرف دیگر ممکن است یک متقاضی ابتدا به صف داخل شود اما بعد از مدتی احتمالاً با برآوردی که از پیشروی صف به عمل می آورد و با در نظر گرفتن تعداد افراد جلو خود تصمیم بگیرد که سامانه را بدون حصول سرویس رها کند، چنین متقاضیی را مأیوس یا سرخورده می گوییم. در حالاتی که دو یا چند صف وجود دارند ممکن است متقاضیانی از یک صف به صف دیگر نقل مکان دهند. اینها مثال هایی است از متقاضیان ناشکیبا که برای بررسی یک سامانه صف بندی باید از چگونگی آنها با اطلاع باشیم.

موضوع دیگری که باید از آن اطلاع داشته باشیم وابستگی یا عدم وابستگی نرخ ورود نسبت به حالت سامانه یا نسبت به زمان است. در بسیاری از وضعیت های واقعی روزمره نرخ ورود وابسته به حالت سامانه، یعنی تعداد متقاضیان موجود در سامانه یا وابسته به زمان است. احتمال دارد که متقاضی با مشاهده تعداد اندک نفرات یک صف از ورود به آن خودداری کند (نرخ ورود نزولی)، البته عکس موضوع هم صادق است. ممکن است تازه وارد با مشاهده صف طولانی حریص تر شده و گرایش بیشتری برای پیوستن به آن از خود نشان دهد (نرخ صعودی). همچنین ممکن است نرخ ورود وابسته به زمان باشد. به طور مثال اگر وضعیت مورد نظر ایستگاه

اتوبوس یا تاکسی باشد، در این صورت نرخ ورود وابسته به زمان است. در ساعات شروع کار ادارات و مدارس و در ساعات تعطیلی آنها نرخ مراجعه افراد به ایستگاه از اوقات دیگر بیشتر است. الگوی مراجعه ای را که با زمان تغییر نکند مانا می گوییم و الگویی را که مستقل از زمان نباشد نامانا می نامیم.

۱-۳-۲-الگوی سرویس سرویس دهنده یا سرویس دهندگان

اکثر مطالبی که در مورد الگوی ورود متقاضیان گفته شد برای بحث در اینجا نیز مناسب اند. به طور مثال چگونگی سرویس متقاضیان به وسیله متوسط تعداد سرویس شده ها در واحد زمان (میانگین نرخ سرویس) یا به وسیلهٔ میانگین زمان سرویس اندازه گیری می شود. این دو کمیت نیز به هم مربوط اند. اگر μ میانگین نرخ سرویس باشد، یعنی اگر μ متوسط تعداد افرادی باشد که سرویس دهنده در واحد زمان سرویس می دهد، آنگاه با یک تناسب ساده معلوم می شود که $\frac{۱}{\mu}$ میانگین زمان سرویس است. پس هر یک از این کمیتها برای توصیف توان سرویس دهنده کافی است. در صورتی که جریان سرویس معین (قطعی) و شامل هیچگونه الگوی احتمالاتی نباشد، یعنی وقتی زمان سرویس ثابت و معین است در این صورت نحوهٔ سرویس کاملاً با میانگین نرخ سرویس، μ یا میانگین زمان سرویس، $\frac{۱}{\mu}$ معین می شود. در غیر این صورت یعنی وقتی در جریان سرویس عدم حتمیت وجود دارد آن گاه توزیع احتمال فرایند سرویس یا توزیع احتمال زمان سرویس نیز لازم است.

سرویس می تواند مانند مراجعه به صورت انفرادی و یا گروهی نیز انجام شود. در بعضی سامانه ها ممکن است دسته ای از متقاضیان همزمان سرویس شوند، مانند مسافرین یک اتوبوس یا قطار. در چنین وضعیت هایی نه تنها زمان سرویس یا احیاناً تابع توزیع زمان سرویس لازم است، بلکه لازم است تعداد افراد در هر دسته را نیز بدانیم. همچنین لازم است از عکس العمل سرویس دهنده وقتی حاضر به ارائه سرویس است اما تعدادی کمتر از حد مقرر برای دریافت سرویس حضور دارند با اطلاع باشیم. بدانیم آیا در این گونه موارد سرویس دهنده کلیه افراد موجود را سرویس می دهد یا تا تکمیل تعداد متقاضیان تا حد نصاب مورد نظر منتظر می شود.

نرخ سرویس نیز مانند نرخ ورود می تواند وابسته به حالت یعنی وابسته به تعداد متقاضیان موجود در سامانه یا مستقل از آن باشد. همچنین سرویس می تواند نسبت به زمان مانا یا نامانا باشد. به طور مثال سرویس دهنده می تواند با گذشت زمان و حصول تجربه کارایی بیشتری پیدا کند، یا ممکن است با مشاهده صف در حال افزایش سریعتر کار کند، یا برعکس ممکن است سرویس دهنده کم تجربه با مشاهده طول صف دستپاچه شده و کارایی اش کاهش یابد. اینها حالت های سرویس وابسته به وضع (وضعیت سامانه) یا وابسته به حالت اند. البته الگوی ورود و سرویس هر سامانه صف بندی می توانند به ترتیب مانا و مستقل از حالت یا نامانا و مستقل از حالت، مانا و وابسته به حالت و یا نامانا و وابسته به حالت باشند. همچنین الگوی ورود و سرویس می تواند نسبت به زمان مانا یا نامانا باشد.

۱-۳-۳-نظم صف

نظم صف به روشی اطلاق می شود که براساس آن وقتی صف شکل گرفته است متقاضیان را برای ارائه سرویس انتخاب می کنند. متداولترین نظم که در زندگی روزمره مشاهده می شود سرویس به ترتیب ورود است، یعنی متقاضی ای که اول از همه آمده است اول ازهمه نیز سرویس می شود. این نظم را با نماد اختصاری (FIFO) نشان‌می دهند. اما مسلماً این تنها نظم ممکن نیست. بعضی دیگر از نظم های متداول، سرویس به ترتیب عکس زمان ورود است که آن را با نماد اختصاری (LIFO) نشان می دهند و در اکثر سامانه های انبارداری وقتی کالاهای فاسد شدنی وجود ندارد از آن استفاده می شود. زیرا دسترسی به کالاهایی که آخر از همه وارد انبار شده اند بیشتر است. انواع روشهای اولویت (PR) و انتخاب تصادفی برای سرویس (SIRO) صورتهای دیگر نظم صف اند. در روش اولویت، هر متقاضی تازه وارد امتیازی دارد و آن متقاضی که بیشترین امتیاز را نسبت به دیگران داراست بدون توجه به زمان ورودش به سامانه سرویس می شود. در اینجا دو وضعیت پیش می آید. در وضعیت اول که ما آن را اولویت ویژه یا حق تقدم مخصوص می نامیم متقاضی با بیشترین امتیاز، مجاز است بلافاصله بعد از ورودش سرویس بگیرد، حتی اگر در زمان ورود این متقاضی یک متقاضی با امتیاز کمتر مشغول گرفتن سرویس باشد، در این حالت سرویس متقاضی با امتیاز کمتر متوقف شده و پس از

اتمام سرویس متقاضی با امتیاز بیشتر، سرویس آن متقاضی انجام می شود. در اینجا دو خط مشی مختلف می تواند اعمال شود؛ سرویس انجام نشده آن متقاضی ممکن است از سر یا از نقطه ای که متوقف شده بود شروع شود. وضعیت دوم که ما آن را اولویت عادی می نامیم وقتی است که متقاضی با امتیاز بیشتر در ابتدای صف قرار بگیرد اما مادام که سرویس متقاضی داخل سرویس کامل نشده است نتواند به آن وارد شود حتی اگر این متقاضی امتیازی کمتر داشته باشد.

۱-۳-۴-گنجایش سامانه

در بعضی از سامانه های صف بندی ممکن است از نظر گنجایش مکان انتظار محدودیت فیزیکی وجود داشته باشد. یعنی ممکن است سامانه حداکثر توان پذیرش مثلاً k متقاضی را داشته باشد. در این صورت می گوییم ظرفیت سامانه محدود و برابر k است. در این حالت وقتی تعداد متقاضیان موجود در سامانه به حد نصاب k می رسد، متقاضیان بعدی تا تکمیل سرویس و فراهم آمدن فضای خالی مجاز نیستند به سامانه وارد شوند. به عبارت دیگر وقتی تازه وارد k متقاضی را در سامانه جلو خود می بیند حق ورود به سامانه را نداشته و طرد می شود و تا تقلیل تعداد متقاضیان در سامانه حداقل به $k-۱$، حق ورود به سامانه را ندارد.

۱-۳-۵ -تعداد باجه های سرویس

تعداد باجه های سرویس به تعداد سرویس دهندگان همانند اطلاق می شود که می توانند متقاضیان را همزمان سرویس کنند. یک بانک با باجه های متعدد برای دریافت و پرداخت مثالی از یک سامانه چند باجه ای است. فرض بر این است که مکانیسمهای سرویس باجه های مختلف، همگون و مستقل ازهم می باشند.

۱-۳-۶- مراحل سرویس

یک سامانه صف بندی ممکن است تنها یک مرحلهٔ سرویس داشته باشد مانند یک آرایشگاه یا یک فروشگاه، یا ممکن است چندین مرحله داشته باشد. شیوه آزمایش پزشکی مثالی از یک سامانه صف بندی چند مرحله ای است که در آن هر بیمار باید مراحل مختلف مانند آزمایش گوش و حلق و بینی، آزمایش خون، نوار قلب، آزمایش چشم و نظایر اینها را بگذراند. در بعضی ازسامانه های صف بندی چند مرحله ای ممکن است برگشت

به مراحل قبلی لازم شود. مثلاً در فرآیندهای تولیدی، وقتی که بررسی های کنترل کیفیت در مراحل مختلف انجام می شوند، برگشت معمول است و کالاهایی که کیفیت مطلوب را ندارند برای بازسازی به مراحل پیشین ارجاع می شوند.

شش مشخصه سامانه های صف بندی که بحث آنها گذشت معمولاً برای شرح کامل فرآیند تحت مطالعه کافی هستند. با اندکی تأمل می توان به وجود انواع وسیعتری از سامانه های صف بندی پی برد.

۱-۴-نماد گذاری

برای توصیف اختصاری یک سامانه صف بندی از نمادهایی که قسمت عمده آن منسوب به کندال (۱۹۵۳) است استفاده می کنند. این نمادها در حال حاضر در متون صف بندی استاندارد موجودند. یک سامانه صف بندی به وسیلهٔ تعدادی حرف و خط مورب به صورت $A/B/C/D/E$ توصیف می شود که در آن حرف اول یعنی A فاصله زمانی ورود و حرف دوم یعنی B مشخص کننده زمان سرویس است، حرف سوم یعنی C معرف تعداد باجه های سرویس دهی یا تعداد سرویس دهندگان، حرف چهارم D، نشان دهندهٔ ظرفیت سامانه و سرانجام حرف آخر یعنی E مبین نظم صف است.

۱-۵- اندازه های مؤثر

با تشخیص یک وضعیت صف بندی به وسیلهٔ مشخصه های آن، ارائه مدل ریاضی امکان پذیر است. از این مدلها می توان برای بهینه سازی سامانه از نظر سودآوری یا کاهش زمان انتظار متقاضیان با توجه به توابع هزینه مفروض استفاده کرد. معمولاً فرایندهای ورودی و یا سرویس تصادفی اند، لذا اندازه های مؤثر و مورد نظر برای بررسی سامانه یعنی مقادیری مانند طول مدت زمان انتظار، تعداد متقاضیان در سامانه، طول دوره اشتغال و فراغت سرویس دهنده یا سرویس دهندگان نیز متغیرهای تصادفی اند و تعیین توزیع احتمال این متغیرهای تصادفی یا حداقل مقادیر امید ریاضی آنها مورد نظر است. بعضی اندازه های مؤثر عبارت اند از :

۱- احتمال وجود n متقاضی در سامانه در زمان t، وقتی در آغاز تعداد متقاضیان در سامانه معلوم است.

با اطلاع از توزیع احتمال اندازهٔ سامانه می توانیم مثلاً معین کنیم ۹۵ درصد اوقات یا ۹۹ درصد اوقات

حداکثر طول صف چقدر است. این مقدار می تواند برای پیش بینی گنجایش مکان انتظار، یعنی فراهم آوردن مکان انتظار برای متقاضیان مفید باشد تا بدین وسیله از انصراف آنها و نهایتاً از ازدست دادن آنها جلوگیری شود. از طرف دیگر با داشتن گنجایش معینی برای مکان انتظار می توان مقدار سرویس لازم را تعیین کرد تا آنکه از فضای مکان انتظار حداکثر استفاده به عمل آید.

۲- توزیع زمان انتظار متقاضیان، از این توزیع می توان متوسط زمان انتظار متقاضیان را به دست آورد و می توان نسبتی از متقاضیان را که مجبورند بیشتر از زمان معینی مثلاً t منتظر شوند به دست آورد. اگر احتمال انتظار بیشتر از مدت زمان t برای متقاضیان بزرگ باشد، آن گاه ممکن است متقاضیان از پیوستن به صف امتناع کنند که نتیجهٔ آن زیان دهی سامانه است. یعنی زیان کسی که نمی تواند از سرویس دهی متقاضیان سود ببرد. از طرف دیگر ممکن است هزینهٔ ارائه سرویس بیشتر یا سریعتر، بیش از زیان از دست دادن متقاضیان باشد. از این اندازه های مؤثر (بسته به اینکه کدام یک مناسب مسأله باشد) می توان برای تصمیم گیری (معمولاً براساس هزینه های موجود) در جهت افزودن نرخ سرویس سرویس دهنده یا سرویس دهندگان هر باجه یا اضافه کردن باجه های دیگر با همان نرخی که باجه های موجود کارمی کنند، یا حتی تقلیل میزان سرویس دهی استفاده کرد.

۱-۶-تاریخچه و کاربرد

وقتی در یک سامانه تقاضای سرویس بیشتر از ظرفیت آن باشد صف ایجاد می گردد. مثلاً در یک داروخانه که تحویلدار به طور متوسط در هر ساعت ۳۰ نفر را می تواند سرویس دهد و اما در حدود ۵۰ نفر متقاضی دارد، در نتیجه صف مشتریان تشکیل می گردد.

موارد استفاده نظریه صف ها در اوایل قرن بیستم شروع شد و دانشمندان اهمیت آن را احساس نمودند، مخصوصاً در طراحی سیستم هایی در علوم که برای انجام عملیات در آن به سرعت زیاد و قدرت توانایی بیشتری نیاز داشتند. تئورسین ها موارد استفاده صف هایی که دارای ورودهایی به طور تصادفی و سرویس محدود باشند پیدا نمودند اما در حل آنها با مسایل مشکل ریاضی روبرو بودند و هرچه این تئوری وسیع تر می گردید حل ریاضی آنها نیز پیچیده تر می شد. به این دلیل روش شبیه سازی به علت ساده بودن حل ریاضی آنها امروز در بسیاری از موارد مورد استفاده قرار می گیرد.

استفاده در تجارت، صنعت و اداره

صف در صنعت و تجارت به صورتهای مختلفی به وجود می آید. برای مثال یک شرکت تهیه مواد غذایی دارای تعدادی کامیون است که از مواد غذایی فاسد شدنی پر شده است. انتظار بیشتر از حد نصاب کامیون ها برای تخلیه مواد آن نه تنها باعث می گردد که مواد غذایی فاسد شود، بلکه سبب تأخیر کامیون ها در گرفتن بار مجدد نیز می گردند.

در کارخانه ها، در قسمت ماشین ها، روی خط تولید قطعات نیز صف ایجاد می گردد. مثلاً اپراتور در انتهای خط تولید باید منتظر بماند تا قسمتهای قبلی، تولید را پایین بفرستند، در حقیقت تمام اپراتورها به همدیگر متکی هستند. اگر ماشین اولی نقصی پیدا کند در تمام خطوط صف هایی تشکیل خواهد شد. مساله صف ها در کارخانه ها منحصر به یک قسمت نیست آن را در قسمت مدیریت نیز می توان پیدا نمود.

تعداد بیشتر از حد نامه ها اگر در اداره در جریان باشد می تواند سیستم را فلج نماید. اداره مخابرات دائماً برای اینکه زمان انتظار مکالمات را حداقل کند مجبور است ظرفیت سیستم را افزایش دهد.

صف در حالت های دیگر

در زندگی ما تعداد زیادی صف وجود دارند که برخی از آنها را می توان برنامه ریزی نمود و بعضی غیر قابل پیش بینی است. ملاحظه می کنیم که مقدار زمانی که برای انتظار تلف می شود، بعضی اوقات ممکن است یک هفته یا یک ماه یا سالها باشد. در حقیقت این تئوری برای تولد و زندگی و مرگ وجود دارد و نشان می دهد که زندگی یک صف بزرگی است.

در هنر نیز مثال هایی از صف وجود دارند. مثلاً هنر نیاز به یک مهارت و تشکیلات دارد. وقتی چنین اصولی کشف و به صورت فرمول درآمدند در این صورت می توان هنر را به وسیله تجزیه و تحلیل ریاضی تولید نمود. در این صورت فرمولهای ریاضی باید در ساختمان آن به کار رود. ملاحظه می کنیم که نت های موسیقی در ترکیب های مختلف ممکن است به طور ضمنی ترس، تنفر و ناامیدی، هیجان، شادی و سایر احساسات را ایجاد نماید که در این صورت صف هایی برای گرفتن سرویس از هنرمندان تشکیل خواهد شد. واضح است که تئوری صف ها در موارد زیادی مورد استفاده قرار گرفته و می گیرد مانند اداره پست، تلفن، صنایع شیمیایی، بیمارستان ها، ورزش و حمل و نقل.

۱-۷- انواع مدل های صف

مدل های صف قطعی

ساده ترین رده مسائل صف از نظر مفهومی رده ای است که در آن توزیع های احتمال برای توصیف الگوهای مراجعه و سرویس ضروری نیستند. مدل صفی که در این رده قرار می گیرد مدل "قطعی" نامیده می شود، زیرا هیچ توزیع احتمالی مربوط به مساله وجود ندارد.

مدل های صف احتمالی

بسیاری از وقایع در عالم واقع حالت تصادفی دارند، یعنی از فرآیندهای تصادفی پیروی می نمایند و نمی توان به صراحت اندازه متغیرهای آنها را بدست آورد. با توجه به اینکه در مدل های احتمالی صف، ورود و خروج به سامانه و سرویس دهی به آنها شکل تصادفی دارند لذا لازم است تا تابع توزیع احتمال مناسب برای آنها

تعریف شود. در متداول ترین مدل های صف تصادفی (احتمالی)، فرض بر این است که فواصل زمانی بین دو ورود متوالی و زمان های سرویس، از توزیع نمایی و یا به عبارت دیگر، زمان های ورود و سرویس دهی از توزیع پواسون پیروی می نمایند.

۱-۸- ضریب بهره وری

ضریب بهره وری در حقیقت نسبت نرخ ورود مشتری به نرخ خدمت دهی است. این نسبت عملاً برابر نرخ ورود کار به داخل سامانه نسبت به ماکزیمم نرخی است که سامانه می تواند این کار را انجام دهد.

$$\text{ضریب بهره وری} = (\rho) = \frac{\text{نرخ ورود در واحد زمان}}{\text{نرخ سرویس (خروج) در واحد زمان}} = \frac{\lambda}{\mu}$$

روشن است که هرچه ρ بزرگتر باشد، تقاضا برای دریافت خدمت بیشتر بوده و سامانه کار بیشتری انجام داده، صف طولانی بوده و درصد بیکاری خدمت دهندگان کمتر خواهد بود. هرچه ρ کوچکتر باشد، طول صف کوتاهتر و درصد بیکاری در مکانیزم خدمت دهی افزایش می یابد، به عبارت دیگر ازامکانات خدمت دهی کمتر استفاده می شود. اگر نرخ ورود مشتری به سامانه بزرگتر از نرخ خدمت دهی به مشتریان باشد یعنی $\lambda > c\mu$ در این صورت $\rho > ۱$ بوده و ظرفیت سامانه جوابگوی کل تقاضا برای دریافت خدمت نبوده، و صف رفته رفته طولانی تر و به سمت بی نهایت میل می کند. به همین دلیل شرط $\rho < ۱$ شرط پایداری برای اکثر سامانه های صف است.

۱-۹- ورودی گروهی صف $(M^X/G/1)$

سیستم صف بندی $(M^X/G/1)$ را می توان به طریق زیر توصیف کرد.

(الف) متقاضیان به صورت فرآیند پواسون با پارامتر λ و در گروههایی به حجم تصادفی C مراجعه می کنند که C دارای توزیع $\Pr ob\{C=n\}=c_n (n>1)$ است و تابع مولد آن (که فرض می کنیم وجود دارد) $C(z)=E[z^c]=\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n (|z|\le 1)$ است. بنابراین احتمال مراجعه کل n متقاضی در فاصله زمانی به طول t عبارتست از

$$p_n(t)=\sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}c_n^{(k)} \qquad (n\ge 0)$$

که در آن، $\{c_n^{(k)}\}$، kامین پیچش $\{c_n\}$ با خودش است (یعنی مراجعات، فرایند پواسون مرکب را تشکیل می دهند) و

$$c_n^{(0)}=\begin{cases}1 & (n=0)\\ 0 & (n>0)\end{cases}$$

(ب) متقاضیان به وسیله یک سرویس دهنده به ترتیب ورودشان و یک یک سرویس می شوند.

(ج) زمانهای متوالی سرویس متقاضیان، متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با تابع توزیع تجمعی $B(t)$ و تبدیل لاپلاس – استیلتیس $B^*(s)$ هستند.

در اینجا تغییر مختصری در $M/G/1$ می دهیم که بعداً به ما کمک می کند، بدین ترتیب که زنجیر نشانده شده ای که ما به کار خواهیم گرفت به وسیله نقاطی تولید شده است که در آنها یا یک عزیمت انجام می شود و یا یک دوره بیکاری پایان می پذیرد (لذا اینها را نقاط تولید مجدد می نامیم). این فرایند را

$$\left\{X_n, n=1,2,... \middle| X_n = \text{تعداد متقاضیان در سامانه بلافاصله بعد از } n\text{امین نقطه تجدید کننده}\right\}$$

می نامیم که ماتریس تغییر وضعیت آن به صورت زیر می باشد.