دانشکده ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

حل معادلات گرما- موج با جملات تلفیقی با تبدیل لاپلاس دو بعدی

از:

آسیه مطهری طشی

استاد راهنما:

دکتر آرمان عقیلی

تیر ۱۳۹۰

تقدیم به پدر بزرگوار و مادر مهربانم

آن دو فرشته ای که از خواسته هایشان گذشتند، سختی ها را به جان خریدند وخـود را سـپر بلای مشکلات وناملایمات کردند تا من به جایگاهی که اکنون در آن ایستاده ام برسم.

تقدیر و تشکر...

سپاس ایزد منان که به من این فرصت را داد تا به این مرحله از علم رسیده و از هیچ موهبتی دریغ نکرد و در تمام مراحل زندگیم مرا قوت قلب بود.

خدای را بسی شاکرم که از روی کرم پدر و مادری فداکار نسیبم ساخت. والدینی که بودنشان تاج افتخاری است بر سرم ونامشان دلیلی است بر بودنم، چرا که این دو وجود پس از پروردگار، مایه هستی ام بوده اند، دستم را گرفته اند وانسان بودن رابرایم معنی کرده اند و من در پاسخ محبت هایشان تنها میتوانم بگویم، متشکرم .

از خواهرانم که در طول سالهای تحصیلم، محیطی آرام را برایم فراهم ساختند و مرا در رسیدن به اهدافم یاری ساختند، سپاسگذارم.

از استاد ارجمندم، دکتر آرمان عقیلی، راهنمای دلسوز و فرزانه، که از هیچ کمکی برایم دریغ نکردندوتسکین آتش سیری ناپذیر علم جویی ام بودند،کمال تشکر و قدردانی را دارم.

از اساتید بزرگوار، آقای دکتر محمد رضا یاقوتی وآقای دکترحسین امینی خواه، که به عنوان داور زحمت بازخوانی پایان نامه ام را بر عهده داشتند و نظرات ارزنده ای را در هر چه بهتر شدن آن ارائه نمودند، سپاسگذارم. برای همه ی این بزرگواران، از خداوند متعال آرزوی سلامتی و توفیق روز افزون دارم.

چکیده

حل معادلات گرما- موج با جملات تلفیقی با تبدیل لاپلاس دو بعدی

آسیه مطهری طشی

در این پایان نامه تبدیل لاپلاس دو بعدی و ویژگیهای اساسی آن تعریف و تبدیل لاپلاس دو بعدی برخی از توابع محاسبه می شوند. دو معادله ی موج و گرمای ناهمگن نیز با جایگزینی جملات ناهمگن با تابعهای تلفیق دو بعدی با استفاده از تبدیل لاپلاس دو بعدی حل می شوند.

همچنین معادله ی گرمای کسری زمان نا همگن خاصی را که در واقع تعمیمی است از مسأله ی اثرات چرخش رو به بالا در جوستروفیک و مشابه آن که به آرامی از قطره هایی در یک سیال دوار یا ذره ای در حال صعود عبور می کنند، حل کرده ایم.

کلید واژه: تبدیل لاپلاس دو بعدی، تلفیق دو بعدی، تبدیل لاپلاس یک بعدی، مشتق کسری کاپوتو، معادله گرمای کسری زمان ناهمگن

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فهرست شکل ها

عنوان صفحه

پیشگفتار

روش تبدیل لاپلاس برای حل راحتتر مسائل، در ریاضیات و علوم مهندسی به کار می رود. از سال ۱۸۱۲ مقاله های زیادی به بررسی خواص این تبدیل و کاربردهای آن اختصاص یافت، که منجر به تعمیم این تبدیل به توابع دو متغیره شد و به این ترتیب از سال ۱۹۳۰ مقاله هایی در زمینه تبدیل لاپلاس دو بعدی منتشر شد.

این پایان نامه شامل چهار فصل است. در فصل اول، به معرفی تبدیل لاپلاس یک بعدی و معکوس آن و برخی از خواص آنها و محاسبه ی تبدیل لاپلاس برخی از توابع پرداخته ایم. در فصل دوم، به تعریف تبدیل لاپلاس دو بعدی و معکوس آن پرداخته ایم. همچنین بعضی از خواص تبدیلات لاپلاس دو بعدی و معکوس آن و قضایایی در ارتباط با آنها را بیان کرده ایم و تبدیلات لاپلاس دو بعدی برخی از توابع را نیز بدست آورده ایم وهمچنین کاربرد هایی از تبدیل لاپلاس دو بعدی را بیان و مثالهایی از آنرا در ریاضی و فیزیک ذکر کرده ایم.در فصل سوم، معادلات موج و گرمای نا همگن با ضرایب غیر ثابت به صورت تلفیق دوبعدی را با استفاده از تبدیل لاپلاس دوبعدی حل کرده ایم.در فصل چهارم نیز یک معادله ی گرمای کسری زمان ناهمگن را با استفاده ازتبدیل لاپلاس یک بعدی حل کرده ایم.

فصل اول

تبدیل لاپلاس
یک بعدی

۱-۱.مقدمه

در این فصل به معرفی تبدیل لاپلاس یک بعدی و برخی از خواص آن و محاسبه ی تبدیل لاپـلاس برخـی از توابـع پرداختـه ایم. همچنین تبدیل لاپلاس معکوس یک بعدی را تعریف کرده و خواص آن و روشهایی بـرای بدسـت آوردن آنـرا نیـز بیـان نموده ایم. علاوه بر این، در این فصل، تعدادی از قضایا را که برای بدست آوردن تبـدیل لاپـلاس یـک بعـدی و معکـوس آن مورد نیاز هستند را بدون اثبات آوده ایم. لازم به ذکر اسـت کـه روشـهای تبـدیلات لاپـلاس، بـرای حـل راحتتـر مـسائل در ریاضیات و علوم مهندسی به کار می روند.

۱-۲. تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$

تعریف ۱-۲-۱. فرض می کنیم $f(t)$ بربازه ی $[0,\infty)$ تعریف شده باشد. در این صورت تبـدیل لاپـلاس $f(t)$ را کـه بـا $L\{f(t)\}$ نشان می دهیم، به صورت زیر تعریف می شود [۱]:

$$L\{f(t);t \to s\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt \qquad (۱-۱)$$

که در آن sرا عددی مختلط در نظر می گیریم و تبدیل لاپلاس $f(t)$ وقتی وجـود دارد کـه انتگـرال بـالا بـه ازای بعـضی از مقادیر sهمگرا باشد.

تعریف ۱-۲-۲. اگر ثابتهای حقیقی M,γ موجود باشند و به ازای هر $t > N$ داشته باشیم:

$$\left|e^{-\gamma t} f(t)\right| < M \qquad \text{یا} \qquad \left|f(t)\right| < M e^{\gamma t}$$

در این صورت تابع $f(t)$ را وقتی $t \to \infty$ از مرتبه ی نمایی γگوییم یا به طور مختصر از مرتبه ی نمایی گوییم [۱].

مثال (۱-۲-۱). $f(t)=t^2$ یک تابع نمایی از مرتبه ی ۳ است، چون داریم: $\left|t^2\right| = t^2 < e^{3t}$ برای هر $t>0$.

همچنین توابع کراندار نیز از مرتبه ی نمایی هستند [۱].

قضیه(۱-۲-۱). اگر $f(t)$ در هر بازه متناهی $0 \le t \le N$ قطعه قطعه پیوسته و از مرتبه ی نمـایی γ بـرای $t > N$ باشـد، پس تبدیل لاپلاس آن یعنی $F(s)$ برای $\mathrm{Re}(s) > \gamma$ وجود دارد.

اثبات. مراجعه شود به مرجع [۲].

قضیه(۱-۲-۲).(قضیه لایبنیتز[1])

فرض کنید توابع $f(x,y), f_x(x,y)$ در ناحیه $D=\{(x,y)|a\le x\le b, c\le y\le d\}$ پیوسته باشند و فرض کنید که $p(x), q(x)$ دوتابع مشتق پذیردر بازه ی $[c,d]$باشند، به طوری که به ازای هر x از $[a,b]$ داریم:

$$F(x)=\int_{p(x)}^{q(x)} f(x,t)\,dt, \tag{۱-۲}$$

پس F' موجود است و داریم:

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\left\{\int_{p(x)}^{q(x)} f(x,t)\,dt\right\}=q'(x)f(x,q(x))-p'(x)f(x,p(x))+\int_{p(x)}^{q(x)}\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}dt. \tag{۱-۳}$$

اثبات. مراجعه شود به مرجع [۳].

۱-۳.بعضی از توابع خاص [۱].

(۱)تابع گاما. **اگر** $n>0$، **پس:**

$$\Gamma(n)=\int_0^\infty u^{n-1}e^{-u}\,du \tag{۱-۴}$$

(۲)تابع بسل. یک تابع بسل از مرتبه ی n را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$J_n(t)=\frac{t^n}{2^n\Gamma(n+1)}\left\{1-\frac{t^2}{2(2n+2)}+\frac{t^4}{2.4.(2n+2)(2n+4)}+\ldots\right\}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\frac{t}{2})^{2k+n}}{k!(k+n)!} \tag{۱-۵}$$

لازم به ذکر است که $J_n(t)$ در معادله دیفرا نسیل بسل زیرصدق می کند:

$$t^2Y''(t)+tY'(t)+(t^2-n^2)Y(t)=0 \tag{۱-۶}$$

(۳)تابع خطا[2].

$$erf(t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-u^2}\,du \tag{۱-۷}$$

(٤)تابع مکمل خطا[3].

$$erfc(t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_t^\infty e^{-u^2}\,du \tag{۱-۸}$$

1-Leibnitz's Theorem
2-Error Function
3-Complementary Error Function

(٥)انتگرالهای سینوس و کسینوس.

$$Si(t)=\int_0^t \frac{\sin(u)}{u}du \qquad (٩-١)$$

$$Ci(t)=\int_t^\infty \frac{\cos(u)}{u}du \qquad (١٠-١)$$

(٦)انتگرال نمایی.

$$Ei(t)=\int_t^\infty \frac{e^{-u}}{u}du \qquad (١١-١)$$

(٧)تابع پله ای واحد (تابع واحد هوی ساید[1]).

برای $a \ge 0$ داریم:

$$H(t-a)=\begin{cases}1 & t>a\\ 0 & t<a\end{cases} \qquad (١٢-١)$$

(٨)تابع ضربه ای واحد یا تابع دلتای دیراک[2].

برای $a \ge 0$ داریم:

$$f_\varepsilon(t)=\begin{cases}\frac{1}{2\varepsilon} & |t-a|\le\varepsilon\\ 0 & |t-a|>\varepsilon\end{cases} \qquad (١٣-١)$$

از لحاظ هندسی، با توجه به شکل (١-١) واضح است که وقتی $\varepsilon \to 0$ ارتفاع ناحیه مستطیلی شکل به طور نـامعین افـزایش می یابد و عرض ناحیه به طریقی کاهش می یابد که همواره داشته باشیم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(t)\,dt=1 \qquad (١٤-١)$$

وقتی که ε به سمت صفر میل میکند $f_\varepsilon(t)$ به سمت تابعی میل می کند که آنرا با $\delta(t-a)$ نشان می دهیم. این تابع حدی را تابع دلتای دیراک یا تابع ضربه ای واحد می نامیم.

1-Heaviside's unit function
2-Unit Impulse Function or Dirac Delta Function

$$\delta(t-a)=\begin{cases}\infty & t=a\\ 0 & t\neq a\end{cases} \tag{۱-۱۵}$$

بعضی از خواص آن عبارتند از: (الف)

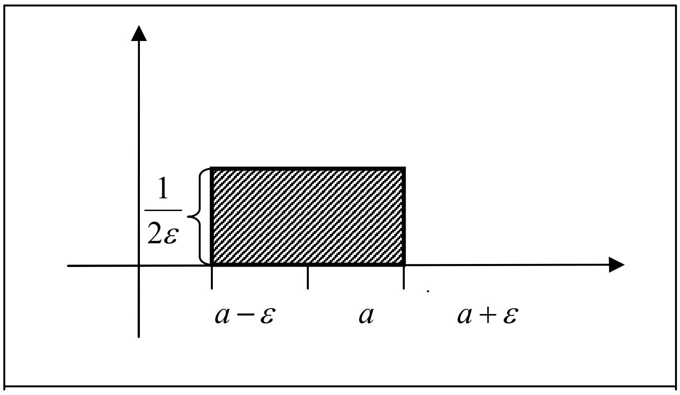
$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,dt=1, \tag{۱-۱۶}$$

ب) به ازای هر تابع پیوسته $g(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,g(t)\,dt=g(0), \tag{۱-۱۷}$$

ج) به ازای هر تابع پیوسته $g(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-a)\,g(t)\,dt=g(a). \tag{۱-۱۸}$$



شکل (۱-۱)

۱-٤.بعضی از خواص مهم تبدیلات لاپلاس

(۱) خاصیت خطی: اگر c_1, c_2 ثابتهای دلخواهی باشند، آنگاه [۱] :

$$L\{c_1 f_1(t)+c_2 f_2(t)\}=c_1 L\{f_1(t)\}+c_2 L\{f_2(t)\} \tag{۱-۱۹}$$

(۲)خاصیت انتقال اول: اگر $L\{f(t)\}=F(s)$ بنابراین[۱]:

$$L\{e^{at} f(t)\}=F(s-a) \tag{۱-۲۰}$$

(۳) خاصیت انتقال دوم: اگر $L\{f(t)\}=F(s)$ باشد و باتوجه به اینکه

$$H(t-a)\,f(t-a)=\begin{cases} f(t-a) & t>a \\ 0 & t<a \end{cases}$$

که درآن $H(t-a)$ تابع هوی ساید است، پس [۱]:

$$L\{H(t-a)\,f(t-a)\}=e^{-as}\,F(s) \qquad (۲۱-۱)$$

تذکر(۱-٤-۱).اگر $L\{f(t)\}=F(s)$ و برای $0<t<a$ داشته باشیم: $f(t)=0$، آنگاه تبدیل لاپلاس تابع $f(t+a)$ نیز موجود است و برابر است با [۷]:

$$L\{f(t+a)\}=e^{as}\,F(s) \qquad (۲۲-۱)$$

(٤) خاصیت تعویض سنجه: اگر $L\{f(t)\}=F(s)$ پس [۱]:

$$L\{f(at)\}=\frac{1}{a}F(\frac{s}{a}) \qquad (۲۳-۱)$$

(٥) مشتقات تبدیل لاپلاس [۱]:

الف. اگر $f(t)$ برای $0\le t\le N$ پیوسته باشد و از مرتبه ی نمایی برای $t>N$ و $f'(t)$ برای $0\le t\le N$ قطعه قطعه پیوسته باشد و $L\{f(t)\}=F(s)$ پس:

$$L\{f'(t)\}=sF(s)-f(0) \qquad (۲٤-۱)$$

ب. اگر در قسمت الف، $f(t)$ در $t=0$ پیوسته نباشد اما $\lim_{t\to 0} f(t)=f(0^{+})$ موجود باشد ولی با $f(0)$ برابر نباشد ($f(0)$ ممکن است موجود باشد یا نباشد)، پس:

$$L\{f'(t)\}=sF(s)-f(0^{+}) \qquad (۲٥-۱)$$

پ.اگر در قسمت الف، $f(t)$ در $t=a$ پیوسته نباشد، پس:

$$L\{f'(t)\}=s\,F(s)-f(0)-e^{-as}\,\{f(a^{+})-f(a^{-})\} \qquad (۲٦-۱)$$

که در آن $f(a^{+})-f(a^{-})$، پرش در نقطه ی ناپیوسته ی $t=a$ نامیده می شود.

ت.اگر $f'(t),f(t)$ برای $0\le t\le N$ پیوسته باشند و از مرتبه ی نمایی برای $t>N$ و $f''(t)$ برای $0\le t\le N$ قطعه قطعه پیوسته باشند و $L\{f(t)\}=F(s)$ پس:

$$L\{f''(t)\} = s^2F(s) - s\,f(0) - f'(0) \tag{۲۷-۱}$$

اگر $f'(t), f(t)$ نقاط ناپیوستگی داشته باشند، عبارات متناظررا می توان از قسمت (ب)و(پ) نتیجه گرفت.

ث.اگر $f^{(n-1)}(t),\dots,f'(t),f(t)$ برای $0 \le t \le N$ پیوسته و برای $t > N$ از مرتبه ی نمایی باشند و $f^{(n)}(t)$ برای $0 \le t \le N$ قطعه قطعه پیوسته باشند و $L\{f(t)\} = F(s)$ پس:

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \tag{۲۸-۱}$$

(٦) تبدیل لاپلاس از انتگرالها: اگر $L\{f(t)\} = F(s)$ پس [۱]:

$$L\{\int_0^t f(u)\,du\} = \frac{F(s)}{s} \tag{۲۹-۱}$$

(۷)ضرب بوسیله ی t^n: اگر $L\{f(t)\} = F(s)$ پس [۱]:

$$L\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}F(s) = (-1)^n F^{(n)}(s) \tag{۳۰-۱}$$

(۸)تقسیم بوسیله ی t: اگر $L\{f(t)\} = F(s)$ پس [۱]:

$$L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(u)\,du \tag{۳۱-۱}$$

به شرطی که $\lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{t}$ وجود داشته باشد.

تذکر (۱-٤-۲). اگر $g(t) = \frac{f(t)}{t}$، پس $f(t) = t\,g(t)$. بنابراین با لاپلاس گیری از طرفین داریم:

$$F(s) = -\frac{d}{ds}G(s) \tag{۳۲-۱}$$

که درآن $L\{f(t)\} = F(s)$ و $L\{g(t)\} = G(s)$.حال اگر از طرفین تساوی بدست آمده از a تا p انتگرال بگیریم، داریم:

$$\int_a^p F(s)\,ds = -G(s)\Big|_a^p = G(a) - G(p) \tag{۳۳-۱}$$

سپس اگر از طرفین (۱-۳۳) وقتی $a \to 0^+$ حد بگیریم، آنگاه داریم:

$$\int_0^p F(s)\,ds = G(0) - G(p) = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t}dt - \int_0^\infty e^{-pt}\frac{f(t)}{t}dt \tag{۳٤-۱}$$

(۹) توابع متناوب: اگر $f(t)$ دوره تناوبی برابر با T که $T > 0$، داشته باشد یعنی $f(t+T) = f(t)$ پس [۱]:

$$L\{f(t)\}=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}\,f(t)\,dt \tag{۳۵-۱}$$

(۱۰)رفتار $F(s)$ وقتی $s\to\infty$:اگر $L\{f(t)\}=F(s)$ پس [۱]:

$$\lim_{s\to\infty}F(s)=0 \tag{۳۶-۱}$$

قضیه (۱-٤-۱).(قضیه مقدار اولیه)

اگرتبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ موجود باشد و برابرباشد با $F(s)$و همچنین حدهای مربوطه نیز موجود باشند، پس[۱]:

$$\lim_{t\to 0}f(t)=\lim_{s\to\infty}sF(s) \tag{۳۷-۱}$$

قضیه (۱-٤-۲).(قضیه مقدار نهایی)

اگر تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ موجود باشد و برابر باشد با $F(s)$و همچنین حدهای مربوطه نیز موجود باشند، پس [۱]:

$$\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{s\to 0}sF(s) \tag{۳۸-۱}$$

۱-۵.محاسبه ی تبدیل لاپلاس برخی از توابع [٤].

مثال (۱-۵-۱).نشان دهید اگر $L\{f(t)\}=F(s)$،آنگاه:

$$L\left\{\int_0^t J_0(2\sqrt{u(t-u)})\,f(u)\,du\right\}=\frac{F(s+\frac{1}{s})}{s} \tag{۳۹-۱}$$

حل.

$$\int_0^\infty e^{-st}\{\int_0^t J_0(2\sqrt{u(t-u)})\,f(u)\,du\}\,dt=\int_0^\infty f(u)\{\int_u^\infty e^{-st}J_0(2\sqrt{u(t-u)})\,dt\}\,du$$

با تغییر متغیر $u(t-u)=v$ پس $dt=\frac{1}{u}dv$ وبنابراین داریم:

$$\int_0^\infty f(u)\{\int_0^\infty e^{-s(\frac{v}{u}+u)}J_0(2\sqrt{v})\frac{dv}{u}\}\,du=\int_0^\infty e^{-su}\frac{f(u)}{u}\{\int_0^\infty e^{-(\frac{s}{u})v}J_0(2\sqrt{v})\,dv\}\,du$$

از طرفی با توجه به جدول تبدیل لاپلاس یک بعدی داریم:

$$L\{J_0(2\sqrt{at})\}=\frac{e^{-\frac{a}{s}}}{s} \tag{٤۰-۱}$$

پس با استفاده از (۱-٤۰) بدست می آوریم:

$$\int_0^\infty e^{-su}\,u\frac{f(u)e^{-\frac{u}{s}}}{us}du=\int_0^\infty \frac{e^{-u(s+\frac{1}{s})}f(u)}{s}du=\frac{F(s+\frac{1}{s})}{s}$$

مثال (۱-۵-۲).نشان دهید اگر $L\{f(t)\}=F(s)$ پس:

$$L\left\{\int_0^\infty \frac{\cos(2\sqrt{xt})}{\sqrt{t\pi}}f(x)dx\right\}=\frac{F(\frac{1}{s})}{\sqrt{s}} \qquad (۴۱-۱)$$

حل.

$$\int_0^\infty e^{-st}\{\int_0^\infty \frac{\cos(2\sqrt{xt})}{\sqrt{t\pi}}f(x)dx\}dt=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty f(x)\{\int_0^\infty e^{-st}\frac{\cos(2\sqrt{xt})}{\sqrt{t}}dt\}dx$$

با تغییر متغیر $t=u^2$ پس $dt=2u\,du$ وبنابراین داریم:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty f(x)\{\int_0^\infty e^{-su^2}\frac{\cos(2u\sqrt{x})}{u}2u\,du\}dx=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty f(x)\{\int_0^\infty e^{-su^2}\cos(2u\sqrt{x})du\}dx$$

با تغییر متغیر $u\sqrt{s}=w$ پس $du=\frac{dw}{\sqrt{s}}$ واز طرفی با استفاده از قضیه لایبنیتز نیز می توان بدست آورد:

$$\int_0^\infty e^{-u^2}\cos(\alpha u)du=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{\alpha^2}{4}} \qquad (۴۲-۱)$$

بنابراین با استفاده ازآنها انتگرال بالابه صورت زیر می شود:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty f(x)\{\int_0^\infty e^{-w^2}\cos(\frac{2w\sqrt{x}}{\sqrt{s}})\frac{dw}{\sqrt{s}}\}dx=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{f(x)}{\sqrt{s}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{x}{s}}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{s}}\int_0^\infty f(x)e^{-x(\frac{1}{s})}dx=\frac{F(\frac{1}{s})}{\sqrt{s}}$$

مثال (۱-۵-۳).اگر $L\{f(t)\}=F(s)$ پس:

$$L\{f(t)\cosh(at)\}=\frac{1}{2}\{F(s-a)+F(s+a)\} \qquad (۴۳-۱)$$

حل.

$$\int_0^\infty e^{-st}f(t)\cosh(at)dt=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-st}f(t)(e^{at}+e^{-at})dt$$

$$=\frac{1}{2}\{\int_0^\infty e^{-t(s-a)} f(t)\,dt+\int_0^\infty e^{-t(s+a)} f(t)\,dt\}=\frac{1}{2}\{F(s-a)+F(s+a)\}$$

که با قراردادن $s=0$، ازآن نتیجه می گیریم:

$$\int_0^\infty f(t)\cosh(at)\,dt=\frac{1}{2}\{F(-a)+F(a)\} \tag{۱-٤٤}$$

مثال(۱-۵-٤). اگر $L\{f(t)\}=F(s)$ پس:

$$L\{f(t^2)\}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \exp(-\frac{s^2}{4x^2})F(x^2)\,dx \tag{۱-٤۵}$$

حل.

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \exp(-\frac{s^2}{4x^2})F(x^2)\,dx=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \exp(-\frac{s^2}{4x^2})\{\int_0^\infty e^{-x^2u} f(u)\,du\}\,dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty f(u)\{\int_0^\infty \exp(-x^2u-\frac{s^2}{4x^2})\,dx\}\,du$$

از طرفی با استفاده از قضیه لایبنیتز نیز داریم:

$$\int_0^\infty \exp(-a^2u^2-\frac{b^2}{u^2})\,du=\frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-2ab} \tag{۱-٤٦}$$

بنابراین با استفاده از (۱-٤٦) انتگرال بالا به صورت زیر می شود:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty f(u)(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{u}}e^{-s\sqrt{u}})\,du=\int_0^\infty e^{-st} f(t^2)\,dt=L\{f(t^2)\}$$

که درآن از تغییر متغیر $\sqrt{u}=t$ پس $du=2t\,dt$ استفاده شد. همچنین اگردر (۱-٤۵)، $s=0$ راقرار دهیم، بدست می آوریم:

$$\int_0^\infty f(t^2)\,dt=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty F(x^2)\,dx \tag{۱-٤۷}$$

مثال(۱-۵-۵). نشان دهید:

$$L\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\exp(-\frac{\tau^2}{4x});x\to s\right\}=\frac{1}{\sqrt{s}}e^{-\tau\sqrt{s}} \tag{۱-٤۸}$$

$$\int_0^\infty e^{-sx}\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\exp(-\frac{\tau^2}{4x})\,dx=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \exp(-\frac{\tau^2}{4x}-sx)\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

با تغییر متغیر $x=u^2$ پس $dx=2u\,du$ وسپس با استفاده از (۱-٤٦) در انتگرال بالا بدست می آوریم:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{2u}{u}\exp\left(-\frac{\frac{\tau^2}{4}}{u^2}-su^2\right)du=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{s}}e^{-2\sqrt{s}\frac{\tau}{2}}=\frac{1}{\sqrt{s}}e^{-\tau\sqrt{s}}$$

مثال(۱-٥-٦). نشان دهید:

$$L\{t^{\frac{n}{2}}J_n(2\sqrt{at})\}=\frac{a^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{a}{s}}}{s^{n+1}},n=0,1,2,\ldots \tag{۱-٤٩}$$

حل.

$$\int_0^\infty e^{-st}t^{\frac{n}{2}}J_n(2\sqrt{at})dt=\int_0^\infty e^{-st}t^{\frac{n}{2}}\left(\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k(at)^{k+\frac{n}{2}}}{k!(k+n)!}\right)dt=a^{\frac{n}{2}}\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k a^k}{k!(k+n)!}\int_0^\infty t^{n+k}e^{-st}dt$$

$$=a^{\frac{n}{2}}\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k a^k}{k!(k+n)!}\cdot\frac{(k+n)!}{s^{n+k+1}}=\frac{a^{\frac{n}{2}}}{s^{n+1}}\sum_{k=0}^\infty\frac{(-\frac{a}{s})^k}{k!}=\frac{a^{\frac{n}{2}}e^{(-\frac{a}{s})}}{s^{n+1}},n=0,1,2,\ldots$$

البته با توجه به اینکه:

$$L\{t^\alpha\}=\int_0^\infty e^{-st}t^\alpha dt=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}=\frac{\alpha!}{s^{\alpha+1}} \tag{۱-٥۰}$$

$$e^x=\sum_{k=0}^\infty\frac{x^k}{k!} \tag{۱-٥۱}$$

مثال (۱-٥-۷).نشان دهید:

$$L\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi(t+a)}}\right\}=\frac{e^{as}}{\sqrt{s}}erfc(\sqrt{as}) \tag{۱-٥۲}$$

حل. با تغییر متغیر $\sqrt{t+a}=u$ و در نتیجه $dt=2u\,du$ در انتگرال اول بدست می آوریم:

$$\int_0^\infty e^{-st}\frac{1}{\sqrt{\pi(t+a)}}dt=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\sqrt{a}}^\infty e^{-s(u^2-a)}\frac{2u}{u}du=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{sa}\int_{\sqrt{a}}^\infty e^{-su^2}du$$

حال با تغییر متغیر $\sqrt{s}\,u=x$ ودر نتیجه $du=\frac{dx}{\sqrt{s}}$ داریم:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{sa}\int_{\sqrt{as}}^{\infty} e^{-x^2}\frac{dx}{\sqrt{s}}=\frac{e^{as}}{\sqrt{s}}erfc(\sqrt{as})$$

مثال(۱-۵-۸).نشان دهید:

$$L\left\{\frac{\sin(at)\sinh(at)}{2a^2}\right\}=\frac{s}{s^4+4a^4} \qquad (۱-۵۳)$$

حل.باتوجه به اینکه $L\{\sin(at)\}=\frac{a}{s^2+a^2}$وبااستفاده از(۱-۱۹) و (۱-۲۰) بدست می آوریم:

$$L\left\{\frac{\sin(at)\sinh(at)}{2a^2}\right\}=\frac{1}{4a^2}.L\left\{\sin(at)(e^{at}-e^{-at})\right\}=\frac{1}{4a^2}\left\{L\left\{e^{at}\sin(at)\right\}-L\left\{\sin(at)e^{-at}\right\}\right\}$$

$$=\frac{1}{4a^2}\left\{\frac{a}{(s-a)^2+a^2}-\frac{a}{(s+a)^2+a^2}\right\}$$

$$=\frac{1}{4a}\left\{\frac{(s+a)^2+a^2-(s-a)^2-a^2}{(s^2-a^2)^2+a^2(s-a)^2+a^2(s+a)^2+a^4}\right\}$$

$$=\frac{1}{4a}\left\{\frac{4sa}{s^4+4a^4}\right\}=\frac{s}{s^4+4a^4}$$

که می توان از آن نتیجه گرفت:

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin(at)\sinh(at)}{2a^2}e^{-st}\,dt=\frac{s}{s^4+4a^4} \qquad (۱-۵٤)$$

که با قرار دادن $s=0$ در (۱-۵٤) بدست می آوریم:

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin(at)\sinh(at)}{2a^2}\,dt=0 \qquad (۱-۵۵)$$

مثال(۱-۵-۹).نشان دهید:

$$L\left\{\frac{\sin(bx)}{x}\right\}=\arctan(\frac{b}{s}) \qquad (۱-۵٦)$$

حل.قرار می دهیم:

$$L\left\{\frac{\sin(bx)}{x}\right\}=\int_0^{\infty}e^{-sx}\frac{\sin(bx)}{x}dx=I(b,s) \qquad \Rightarrow \qquad I(0,s)=0$$

حال با استفاده از قضیه لایبنیتز داریم: