بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

# تشکر و قدر دانی

صمیمانه از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر کیومرث کرمی به پاس زحمات و راهنمایی‌های ارزنده ایشان تشکر می‌کنم.

همچنین از همسرم و تمام دوستان عزیزی که در انجام این کار مرا یاری کردند، سپاسگزارم .

# فهرست


## ۱ مقدمه

۱—۱ مقدمه . . . . . ۱

۱—۲ اصول کیهان شناسی . . . . . ۲

۱—۳ انبساط کیهان . . . . . ۳

۱—۴ ذرات موجود در کیهان . . . . . ۴

۱—۴—۱باریون ها . . . . . ۴

۱—۴—۲تابش . . . . . ۵

۱—۴—۳نوترینوها . . . . . ۵

۱—۴—۴ماده تاریک . . . . . ٦

۱—۴—۵نرژی تاریک . . . . . ۷

# ۲ معادلات اساسی در کیهان‌شناسی


۲—۱ معادله فریدمان . . . . . ۹

۲—۲ معادله شاره . . . . . ۱۰

۲—۳ معادله شتاب . . . . . ۱۰

۲—۴ هندسه ی عالم . . . . . ۱۱

۲—۴—۱هندسه تخت $(k = 0)$ . . . . . ۱۱

۲—۴—۲هندسه کروی $k = +1$ . . . . . ۱۱

۲—۴—۳هندسه‌ی هذلولوی $k = -1$ . . . . . ۱۲

۲—۵ پارا متر های مشاهداتی . . . . . ۱۳

۲—۵—۱نرخ انبساط $H_0$ . . . . . ۱۳

۲—۵—۲پارا متر چگالی $\Omega_0$ . . . . . ۱۳

۲—۵—۳پارامتر شتاب کاهنده $q_0$ . . . . . ۱۵

۲—۶ معادلات تحول . . . . . ۱۶

۲—۶—۱متریک فریدمان—رابرتسون—والکر . . . . . ۱۶

۲—۶—۲معادلات میدان انیشتین . . . . . ۱۷

۲—۷ افق های کیهانی . . . . . ۱۹

۲—۷—۱افق ذره . . . . . ۲۰

۲—۷—۲افق رویداد . . . . . ۲۰

۲—۷—۳افق ظاهری . . . . . ۲۱

## ۳ ترمودینامیک عالم انرژی تاریک

۳—۱ مقدمه . . . . . ۲۲

۳—۲ قانون اول ترمودینامیک در افق ظاهری و رویداد . . . . . ۲۳

۳—۲—۱فضای کوینتسنس با معادله حالت ثابت انرژی تاریک . . . . ۲۳

۳—۲—۲عالم شتابدار انرژی تاریک با معادله حالت وابسته به زمان . . ۲۵

۳—۳ قانون دوم ترمودینامیک تعمیم یافته . . . . . ۲۹

۳—۳—۱قانون دوم ترمودینامیک تعمیم‌یافته با معادله حالت دینامیکی . ۲۹

## ۴ قانون دوم ترمودینامیک تعمیم یافته در عالم شتابدار مستقل از مدل انرژی تاریک

۴—۱ قانون دوم ترمودینامیک تعمیم یافته درافق ظاهری عالم غیر تخت . . ۳۳

۴—۲ قانون دوم ترمودینامیک تعمیم یافته درافق رویداد درحضوربرهم کنش . ۳۷

۴—۲—۱برهم کنش انرژی تاریک و ماده تاریک . . . . . ۳۸

۴—۲—۲قانون دوم ترمودینامیک تعمیم یافته . . . . . ۴۰

## ۵ قانون دوم ترمودینامیک تعمیم یافته در عالم فریدمان—رابرتسون—والکر تعدیل یافته با رابطه ی آنتروپی—سطح تصحیح شده

۵—۱ مقدمه . . . . . ۴۳
۵—۲ استخراج معادلات فریدمان تعدیل یافته . . . . . ۴۴
۵—۳ انرژی تاریک وشکسان بر هم کنشی با ماده تاریک و تابش . . . . . ۴۷
۵—۳—۱قانون دوم ترمودینامیک تعمیم یافته با آنتروپی تصحیح شده . ۵۰

## ٦ قانون دوم ترمودینامیک تعمیم یافته در عالم فریدمان—رابرتسون—والکر تعدیل یافته با تصحیحات توانی آنتروپی

٦—۱ مقدمه . . . . . ۵۵
٦—۱—۱معادلات فریدمان تعدیل یافته با تصحیحات توانی آنتروپی . ۵٦
٦—۲ انرژی تاریک وشکسان بر هم کنشی با ماده تاریک و تابش . . . . . ۵۸
٦—۲—۱قانون دوم ترمودینامیک تعمیم یافته باآنتروپی تصحیح شده . . ٦۱

## ۷ ترمودینامیک برگشت ناپذیر انرژی تاریک در افق ظاهری آنتروپی—تصحیح شده

۷—۱ مقدمه . . . . . ٦۵
۷—۱—۱ترمودینامیک غیر تعادلی انرژی تاریک . . . . . ٦۷

# ۸ بحث و نتیجه گیری

۸–۱ نتایج . . . . . ۷۴

مراجع . . . . . ۷۷

# فصل اول

# مقدمه

## ۱ — ۱ مقدمه

با کشف انبساط عالم توسط ادوین هابل[۱] در دهه‌ی ۱۹۲۰ و کشف زمینه‌ی ریزموج[۲] کیهانی در دهه‌ی ۱۹۶۰، کیهان شناسی وارد مرحله‌ی مشاهده نیز شد. بررسی دقیق افت و خیز های حرارتی در زمینه‌ی ریز موج کیهانی که نخستین نشانه‌ی تشکیل ساختار در کیهان می باشد، امکان مطالعه‌ی دقیق رشد ناهمگنی ها و تشکیل ساختارهای اولیه را فراهم آورد. ارائه‌ی مدل تورم در سال ۱۹۸۱ و تکمیل آن در سال های بعد، منشأ کوانتومی این افت و خیزها را تا حدودی روشن ساخت. بررسی دقیق تر داده های کیهان شناسی نشان داد که برای رسیدن به یک تصویر سازگار از ساختارهای بزرگ کیهانی و نحوه ی تشکیل آنها لازم است

[۱] Edwin Hubble

[۲] microwave

که مقادیر قابل توجهی انرژی و ماده به صورت تاریک در لابلای کهکشان و ستارگان وجود داشته باشد به گونه ای که ماده ی شناخته شده و قابل رویت، تنها بخش کوچکی (حدود ۴ درصد) از کل ماده و انرژی کیهانی را به خود اختصاص می دهد [۱]. تحلیل داده های رصدی ابرنواختران نوع $Ia$ [۳] در سال های اخیر نشان داد که عالم دارای انبساط شتابدار است [۲]. در سال ۱۹۱۷ انیشتین [۴] در حین حل معادلات انیشتین به انبساط کیهان پی برد قبل از اینکه هابل بطور تجربی آن را در سال ۱۹۲۰ کشف کند. شواهد رصدی نشان می دهند که کیهان شامل ۷۰ درصد انرژی تاریک و ۳۰ درصد ماده تاریک و باریونی است [۳]. این انرژی که باعث انبساط شتابدار عالم می شود دارای فشار منفی است و تاکنون بطور مستقیم آشکارسازی نشده است [۴].

## ۱ — ۲ اصول کیهان شناسی

انقلاب کوپرنیکی دیدگاه قدیمی کیهان شناسی زمین مرکزی را تغییر داد. امروزه به کمک مشاهدات نجومی و نقشه برداری از کهکشانهای دوردست و حرکت های بزرگ مقیاس، مشخص شده که حتی راه شیری نیز از نظر فیزیکی کهکشان ممتازی محسوب نمی شود. توزیع کهکشانها در مقیاس های بزرگتر از حدود $10^8$ پارسک تقریباً یکنواخت است. از مشاهدات مربوط به تابش زمینه ی ریزموج آشکار شده است که جهان در اوایل تحولش بسیاریکنواخت بوده است. رویهم رفته خواص بزرگ مقیاس کیهان در مکان ها و راستاهای مختلف یکسان است، به بیان دیگر عالم در مقیاس های بزرگ همگن [۵] و همسانگرد [۶] است. این ویژگی به اصل کیهان شناسی معروف است. از نظر فیزیکی ،می توان همگنی

[۳] SuperNova Ia

[۴] Einstien

[۵] homogeneous

[۶] isotropic

و همسانگردی عالم را مشابه گاز تشکیل شده از مولکول ها دانست. زمانی که یک گاز در مقیاس های اتمی و زیر اتمی مورد مطالعه قرار گیرد، افت و خیزهای با دامنه ی بسیار بزرگ در چگالی های جرم وبار وجود خواهد داشت. به همان ترتیب، هر قدر مقیاس های کوچکتر در جهان مد نظر قرار گیرند، دامنه ی چگالی و کمیت های فیزیکی محلی بیشتر خواهد بود [۱].

## ۱–۳ انبساط کیهان

شواهد رصدی نشان می دهد که تقریباً هر چیزی در عالم در حال دورشدن از ماست اشیائی که دورترند با سرعت بیشتری از ما دور می شوند. این سرعت ها از طریق قرمزگرایی[۷] اندازه گیری می شوند که اساساً اثر دوپلربکاررفته برای امواج نوری است. اگرکهکشانی در حال دورشدن از ما باشد خطوط طیفی آن به سمت قرمز میل می کند و این اثر قرمزگرایی نام دارد. این تکنیک در ابتدا برای اندازه گیری سرعت کهکشان در سال ۱۹۱۲ مورد استفاده قرارگرفت وبعداً توسط هابل بطور سیستماتیکی مورد استفاده قرار گرفت. طبق قانون هابل سرعت دورشدن با مسافتی که کهکشان از ما دارد متناسب است:

$$\vec{V} = H_0 \vec{r} \qquad (۱.۱)$$

ک درآن $H_0 = 100h\ kms^{-1}Mpc^{-1}$ ثابت هابل نام دارد و $h = 0.72 \pm 0.08$ است . قانون هابل دقیق نیست بلکه یک رابطه تجربی است که برای کهکشانهای خیلی دور و خیلی نزدیک کاملاً صادق نیست اما رفتار کهکشانها در فواصل میانگین را بسیار خوب توصیف می کند[۵]. بیشتر داده های اخیر نشان می دهند که عالم در حال پیرشدن است و بنابراین یک عمر محدود دارد که از مشاهدات نجومی بسیاری از گونه های عظیم الجثه در قرمزگرایی های بالا و در طول موج های متفاوت سرچشمه می گیرد[٦]. یکی از کمیاتی که در مدل کیهانی از

[۷] redshift

حل $a(t)$، برای انبساط، می توان پیش بینی کرد سن عالم $t_0$ است. نرخ انبساط عالم توسط پارامتر هابل مشخص می شود بنابراین حدس اولیه برای سن عالم، مقیاس زمانی مربوط به پارامتر هابل $H_0^{-1}$ است، چون $r = vH_0^{-1}$ اساساً حاصل ضرب سرعت در زمان است. این تخمین تقریبی است زیرا از تغییرات سرعت با زمان تحت اثرات گرانشی چشم پوشی شده است. اما بهترین روش برای تعیین سن عالم استفاده از تحولات شیمیایی ستارگان در خوشه های کروی[۸] است که پیر ترین موجودات در عالم اند. نتیجتاً بهترین تخمین برای سن عالم از مرتبه ی ۱۳ میلیارد سال است [۵].

## ۱—۴ ذرات موجود در کیهان

همه چیز در عالم از ذرات بنیادی ساخته شده است و رفتار عالم به عنوان یک کل به خصوصیات این ذرات بستگی دارد. ذرات موجود در عالم عبارتند از:

### ۱—۴—۱ باریون ها

هسته ی اتم شامل پروتون ها و نوترون هاست. پروتون ها و نوترون ها از ذرات بنیادی تر به نام کوارک ها[۹] ساخته شده اند. یک پروتون از دو کوارک بالا و یکی پایین و نوترون از یک کوارک بالا و دو کوارک پایین ساخته شده است. ذراتی که از سه کوارک تشکیل شده‌اند باریون ها[۱۰] هستند. از تمام باریون های ممکن، تنها پروتون و نوترون پایدار هستند و بنابراین تنها

[۸] globular

[۹] quark

[۱۰] baryons

نوع ذرات باریونیک در عالم قابل توجه هستند. اگرچه الکترون ها از کوارک ها ساخته نشده اند اما در کیهان شناسی از آنها به عنوان باریون نام برده می شود. ویژگی مهم عالم این است که از لحاظ الکتریکی خنثی است بنابراین به ازای هر پروتون بایستی فقط یک الکترون وجود داشته باشد [۵].

### ۱ــ۴ــ۲ تابش

درک بصری ما از عالم، از تابش الکترومغناطیسی سرچشمه می گیرد و چنین تابشی در یک بازه ی بزرگ از فرکانس ها در عالم وجود دارد. نور از ذراتی به نام فوتون تشکیل شده که معمولاً با علامت $\gamma$ نشان داده می شود. فوتون ها با سرعت نور منتشر می شوند چون جرم سکون آنها صفر است و دارای انرژی کل $E = h\nu$ هستند. فوتون ها با باریون ها و الکترون ها بر هم کنش دارند به عنوان مثال در برخورد یک فوتون انرژی بالا با یک الکترون در خارج از اتم پدیده یونیزاسیون اتفاق می افتد و یا می تواند یک الکترون آزاد را پراکنده کند که به آن پراکندگی تامسون[۱۱] گویند [۵].

### ۱ــ۴ــ۳ نوترینوها

نوترینو ها ذراتی با بر هم کنش بسیار ضعیف هستند که به عنوان مثال در واپاشی رادیواکتیویته تولید می شوند. تا به حال شواهد تجربی حائز اهمیتی برای در نظر گرفتن جرم سکون غیر صفر برای نوترینو ها وجود دارد اما مشخص نیست که این جرم چه مقدار باشد تا اثرات کیهانی داشته باشد، بدین جهت آنها را بدون جرم در نظر می گیرند. نوترینو ها مانند فوتون ها نسبیتی هستند و همراه با فوتون ها ماده ی نسبیتی عالم را تشکیل می دهند. گاهی اوقات بیان تابش برای تمام مواد نسبیتی بکار می رود. نوترینو ها سه گونه اند شامل الکترونی

[۱۱] Thomson

$\nu_e$، میونی $\nu_\mu$ و تاو $\nu_\tau$ که اگر تمامی آنها بدون جرم باشند باید در عالم موجود باشند [۵].

## ۱—۴—۴ ماده تاریک

عمده ی ماده تشکیل دهنده عالم مادهای غیر باریونی است که ماده تاریک[۱۲] نام دارد [۵]. یک ماده ی سرد غیر نسبیتی که به شکل ضعیف با اتم ها و نور بر هم کنش می کند. در نجوم و کیهان شناسی ماده تاریک ماده ای است که با نیروی الکترومغناطیسی بر هم کنش ندارد اما وجود آن از اثرات گرانشی بر روی ماده ی مرئی قابل تشخیص است. دلایل مشاهداتی وجود ماده تاریک عبارتند از: سرعت چرخشی کهکشان ها، سرعت های مداری کهکشان ها در خوشه ها، عدسی گرانشی[۱۳] اشیأ زمینه توسط خوشه های کیهانی و توزیع دمای گاز داغ در کهکشان ها و خوشه های کهکشانی ۲. ماده تاریک نقش مهمی در تشکیل ساختار و تحول کهکشان دارد و اثرات قابل محاسبه ای بر روی نا همسانگردی زمینه ی ریز موج کیهانی دارد [۷]. بیشتر کاندید های مورد نظر برای ماده تاریک غیر باریونی، ذرات بنیادی هستند که جرم آنها کسر کوچکی از یک گرم است و به کمک عدسی نمی توان آنها را رویت کرد[۵].

کاندید های ماده تاریک عبارتند از[۵]:

۱) نوترینو ها: اگر بتوان برای نوترینو ها جرم کوچکی در نظر گرفت می توانند کاندید خوبی برای ماده تاریک باشند. نوترینو ها دو گونه اند: نوترینو های سبک که بدلیل جرم کوچک دارای سرعت های نسبیتی هستند و ماده تاریک داغ را بوجود می آورند و نوترینو های سنگین که دارای سرعت های غیر نسبیتی اند و دمای پایینی دارند جزو ماده تاریک سرد محسوب می شوند.

---

[۱۲] dark matter(DM)

[۱۳] gravitational lensing

۲)ذرات پر جرم با بر هم کنش ضعیف که [۱۴] این ذرات علاوه بر برهم کنش گرانشی از طریق نیروی هسته ای ضعیف با هم بر هم کنش دارند.

از بهترین کاندید های ماده تاریک در بخش ذرات پر جرم،

۱) سیاهچاله ها هستند که در مرکز کهکشان واقع اند و در آخرین مرحله از تحول ستاره ظاهر می شوند.

۲) ماچو ها[۱۵]، موجودات فشرده ی پر جرمی هستند که در هاله ی کهکشان ها یافت می شوند و به حد تشکیل ستاره نرسیده اند. ماچو ها را می توان به کمک ریز عدسی [۱۶] یا عدسی گرانشی شناسایی کرد.

۳) باقی مانده ی ستارگان رشته اصلی و همچنین کوتوله های قهوه ای که تنها ۳ درصد از کل ماده تاریک را تشکیل می دهند.

## ۱—۴—۵ انرژی تاریک

مشاهدات اخیرابر نو اختران نوع $Ia$ در ارتباط با ساختار بزرگ مقیاس و نا همسانگردی های زمینه ی ریز موج کیهانی شاهدی بر انبساط شتابدار عالم است [۸] که توسط انرژی با فشار منفی به نام انرژی تاریک[۱۷] ایجاد می شود. انرژی تاریک شکلی فرضی از انرژی است که به تمام فضا نفوذ می کند و تمایل به افزایش نرخ انبساط عالم دارد [۱]. تحلیل مشاهدات کیهان شناسی مبنی بر این است که عالم شامل ۷۰ درصد انرژی تاریک، ۳۰ درصد غبار (ماده تاریک سرد و باریون ها) و مقدار ناچیزی تابش است. اگر چه طبیعت و منشأ انرژی تاریک ناشناخته است اما برای توصیف آن کاندید های مختلفی وجود دارد. ساده ترین کاندید

[۱۴] Weakly Interacting Massive Particle

[۱۵] Massive Compact Halo Object(MACHO)

[۱۶] Microlensing

[۱۷] dark energy(DE)

انرژی تاریک، ثابت کیهان شناسی (انرژی خلأ) است که معادله حالت آن $\omega = -1$ است. اما این مدل دارای دو مشکل مشکل تنظیم ظریف [۱۸] و مشکل انطباق کیهانی [۱۹] است [۸].

از دیگر کاندید های انرژی تاریک [۷، ۹] :

مدل های میدان اسکالر، کوینتسنس[۲۰]، کااسنس [۲۱]، میدان تاخیون [۲۲]، میدان فانتوم [۲۳]، میدان دیلیتون [۲۴]، گاز چاپلین[۲۵] و مدل های جهان شامه ای [۲۶] را می توان نام برد.

در فصل دوم به معرفی معادلات کیهان‌شناسی و افق‌های کیهانی خواهیم پرداخت. در فصل سوم ترمودینامیک انرژی تاریک را بررسی می کنیم. در فصل چهارم به بررسی قانون دوم ترمودینامیک تعمیم یافته در عالم شتابدار مستقل از مدل انرژی تاریک خواهیم پرداخت. در فصل پنجم و ششم به مطالعه ی قانون دوم ترمودینامیک تعمیم یافته در عالم فریدمان—رابرتسون—والکر تعدیل یافته با رابطه ی آنتروپی—سطح تصحیح شده شامل تصحیحات لگاریتمی و توانی آنتروپی می پردازیم و در فصل هفتم رابطه ی افق ظاهری آنتروپی—تصحیح شده را به کمک تصحیحات لگاریتمی آنتروپی در ترمودینامیک غیر تعادلی انرژی تاریک استخراج خواهیم کرد.

---

[۱۸] fine-tuning

[۱۹] cosmic coincidance

[۲۰] quintessence

[۲۱] k-essence

[۲۲] tachyon field

[۲۳] phantom field

[۲۴] dilatonic field

[۲۵] chaplygin gas

[۲۶] braneworld models

# فصل دوم

# معادلات اساسی در کیهان‌شناسی

## ۲—۱ معادله فریدمان

معادله فریدمان[۱] انبساط عالم را توصیف می کند و بنا براین مهم ترین معادله در کیهان شناسی است. معادله فریدمان به کمک انرژی پتانسیل گرانشی و انرژی جنبشی ذره ی آزمون و همچنین استفاده از قانون پایستگی انرژی به صورت

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} \qquad (۲.۱)$$

است که در آن $k$ خمش[۲] نام دارد و هندسه ی عالم را تعیین می کند. این فرم استاندارد معادله ی فریدمان است [۵].

[۱] Friedmann equation

[۲] curvature

## ۲—۲ معادله شاره

معادله‌ی تحول زمانی چگالی ماده ی موجود در عالم $\rho$ که به آن معادله شاره می گویند به صورت

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + \frac{P}{c^2}) = 0 \qquad (۲.۲)$$

می باشد که در آن $P$ فشار شاره می باشد [۵].

## ۲—۳ معادله شتاب

معادله ی شتاب به کمک معادله ی فریدمان و معادله ی شاره حاصل می شود:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3\frac{P}{c^2}) \qquad (۲.۳)$$

با توجه به معادله ی شتاب، برای غبار $P = 0$ و برای فوتون ها $P = \frac{1}{3}\rho$ عبارت $\rho + 3\frac{P}{c^2}$ مثبت خواهد بود و در نتیجه $\frac{\ddot{a}}{a} < 0$ است که منجر به عالم شتابدار کندشونده[۳] می شود. اما برای ثابت کیهان شناسی $P = -\rho$ عالم شتابدار تندشونده [۴] خواهیم داشت یعنی $\frac{\ddot{a}}{a} > 0$ [۵].

[۳] deceleration universe

[۴] acceleration universe

## ۲—۴ هندسه ی عالم

حال به بررسی خمش فضا—زمان یعنی $k$ می پردازیم که تعیین کننده ی هندسه ی عالم است. سه حالت برای هندسه ی عالم وجود دارد که متناظر با $k = +1, 0, -1$ می باشد.

### ۲—۴—۱ هندسه تخت $(k = 0)$

هندسه ی اقلیدسی بر اساس مجموعه ای از اصول ساده است (بعنوان مثال کوتاهترین فاصله ی بین دو نقطه یک خط راست است)، بعلاوه ی یک اصل پیچیده که بیانگر این مطلب است که خطوط مستقیم موازی هیچگاه بهم نمی رسند. این اصول مبنای قوانین استاندارد هندسه هستند و منجر به نتایج زیر می شوند:

- مجموع زوایای داخلی یک مثلث $180^\circ$ است.
- محیط یک دایره به شعاع $r$ برابر $2\pi r$ است.

چنین هندسه ای ممکن است برای عالم ما مطلوب باشد. در این هندسه، عالم باید نامتناهی و بدون مرز باشد و عالمی با چنین هندسه ای عالم تخت نام دارد. مشاهدات رصدی نشان می دهد که عالم ما بیشتر شبیه عالم تخت است [۵].

### ۲—۴—۲ هندسه کروی $k = +1$

ساده ترین نوع هندسه ی غیر اقلیدسی، هندسه ی کروی است که از آن بعنوان مثال در پیمایش روی کره ی زمین استفاده می شود. یک کره ی کامل از تمام نقاط سطح آن به یک

شکل دیده می شود بنا براین شرط همسانگردی برقرار است. اما بر خلاف هندسه ی تخت، سطح کروی متناهی است و دارای مساحت $4\pi r^2$ است. اگر خطوطی موازی بر روی سطح زمین رسم کنیم، اصل اقلیدسی نقض می شود زیرا این خطوط در قطبین بهم می رسند. اگر یک مثلث بر روی کره ای رسم کنیم دیگر مجموع زوایای داخلی مثلث $180^\circ$ نخواهد بود بلکه:

- مجموع زوایای داخلی یک مثلث بیش از $180^\circ$ است.
- محیط یک دایره به شعاع $r$ روی کره کمتر از $2\pi r$ است.

یک عالم با هندسه ی کروی، مانند سطح زمین، اندازه ی متناهی دارد اما بدون مرز است. تمام نقاط یکسان هستند. اگر ما در یک هندسه ی کروی زندگی کنیم و در یک خط مستقیم حرکت کنیم به دلیل متناهی بودن آن نمی توان برای همیشه به حرکت خود ادامه داد و سرانجام به جای اول باز خواهیم گشت اما در جهت مخالف. چنین عالمی مربوط به مقدار مثبتی از $k$ است که در معادله ی فریدمان ظاهر شد زیرا خصو صیات منحصر بفرد هندسه ی کروی ناشی از خمش آن است، بنا براین $k$ اغلب جمله ی خمش نامیده می شود. عالمی با $k=+1$ به دلیل متناهی بودن عالم بسته نامیده می شود [۵].

## ۲–۴–۳ هندسه‌ی هذلولوی $k=-1$

نوع دیگری هندسه، هندسه ی هذلولوی است که معمولاً به شکل زین اسب نشان داده می شود. در این هندسه فضا همسانگرد است. خطوط موازی هیچگاه بهم نمی رسند اما اصل اقلیدس نقض می شود زیرا این خطوط از هم دور می شوند. در این هندسه،

- مجموع زوایای داخلی یک مثلث کمتر از $180^\circ$ است.
- محیط یک دایره به شعاع $r$ بیش از $2\pi r$ است.