بسم‌الله الرحمن الرحیم

دانشگاه اصفهان

دانشکده ادبیات

گروه فلسفه

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته‌ی فلسفه گرایش منطق

بررسی شبکه‌های ارتومدولار و جبر بولی جزئی به مثابهٔ پایه‌هایی برای منطق کوانتوم

استاد راهنما:

دکتر مرتضی حاج حسینی

استاد مشاور:

دکتر محمود بینای مطلق

پژوهشگر:

سها شیروانی

بهمن ۱۳۹۲

دانشگاه اصفهان

دانشکده ادبیات

گروه فلسفه

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته‌ی فلسفه گرایش منطق

خانم سها شیروانی

تحت عنوان

بررسی شبکه‌های ارتومدولار و جبر بولی جزئی به مثابهٔ پایه‌هایی برای منطق کوانتوم

در تاریخ ۱۳۹۲/۱۱/۳۰ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه عالی به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه دکتر مرتضی حاج حسینی با مرتبه‌ی علمی دانشیار امضا

۲- استاد مشاور پایان نامه دکتر محمود بینای مطلق با مرتبه‌ی علمی استادیار امضا بینای مطلق

۳- استادان داور داخل گروه دکتر محمدعلی اژه‌ای با مرتبه‌ی علمی استاد امضا

۴- استاد داور خارج از گروه دکتر حسن عزیزی با مرتبه‌ی علمی دانشیار امضا حسن عزیزی

امضای مدیر گروه

چکیده

زبـان ریـاضـــی می‌توانـد رفتار یک ســیســـتم فیزیکی را در قالب نظریه‌هایی مانند مکانیک نیوتن یا مکانیک کوانتوم توصـیف کند، عبارات ریاضـی مربوط به نظریه، گزاره‌هایی حامل اطلاعاتی راجع به ماهیات و سیستمهای مرتبط با آن نظریه هسـتند. این عبارات ساختاری جبری را نشان می‌دهند و متناظر با روابط جبری بین عبارات ریاضی، روابط منطقی بین گزاره‌ها وجود دارد، یعنی بین گزاره‌هایی که با توجه به نظریه، سیسـتمی را توصیف می کنند. حال ساختار ریاضی حـاکم بر فیزیـک نیوتن، جبری از مجموعـه‌هاســـت و در واقع جبری بولیســـت و روابط منطقی آن دقیقاً روابط منطق کلاســیک می‌باشــد. اما در مکانیک کوانتوم ســاختار جبری، بولی نیســت و منطق ســازگار با آن منطقی متفاوت و غیرکلاسـیک اسـت که آنرا با نام "منطق کوانتوم" می‌شـناسند. در سال ۱۹۳۶ بیرکهوف و فون نویمان در مقالهٔ "منطق مکانیک کوانتوم"، شـــبکه‌ای از گزاره‌ها را در نظر گرفتند. آنها با اســتفاده از فرمولبندی مکانیک کوانتوم، ســاختار جبری حاکم بر منطق کوانتومی را تحت عنوان شـبکه های ارتومدولار ارائه کردند، که متفاوت از ساختار جبری منطق کلاســیک می‌باشــد و به تازگی این دیدگاه با رویکردهایی متفاوت راجع به نقش و ویژگیهای منطق کوانتوم، مورد توجه منطق دانان بسیاری قرار گرفته است.

در مکانیک کوانتوم متفاوت از مکانیک نیوتن حالت یک سیسـتم، با یک نقطه در فضای فاز با ابعاد متناهی نشان داده نمی‌شـود، بلکه توسط یک بردار(با ابعاد نامتناهی) در فضای هیلبرت بیان می‌شود. فضاهای فاز مکانیک نیوتن فضاهای حقیقی هســتند، در حالیکه در مکانیک کوانتوم فضـــاهای فاز، فضـــاهای مختلطند. جملاتی با فرم $x \in L$ (بطوریکه x حالت برداری یک سیسـتم اسـت و L یک زیرفضا از فضای هیلبرت است) گزاره‌های کوانتومی هستند، این جملات برای خلاصــه کردن اطلاعـات مـا از نتـایج آزمایشـــهای آن ســیســـتم بکار می‌روند و منطق کوانتوم روابطی که بین گزاره‌های کوانتومی یک سـیستم فیزیکی معین صادق هستند، را مورد بررسی قرار می‌دهد. این روابط منطقی با روابط جبری بین زیرفضـــاهای فضـــای هیلبرت متناظر هســـتند. جبر این مجموعه از زیرفضـــاها، غیر بولی اســـت و مجموعهٔ زیرفضاهای فضای هیلبرت را می‌توان بعنوان شبکه‌های ارتومدولار و یا یک جبر بولی جزئی مورد بررسی قرار داد. هر کدام از این سـاختارها بعنوان ساختاری مناسب برای جبر گزاره های کوانتومی معرفی شده‌اند و متناظر با هر یک از این سـاختارها، منطقی ارائه شـده‌است. منطق‌های حاصل از این دو رویکرد، ویژگیهای صوری متفاوتی خواهند داشت، این تحقیق بـه معرفی ســـاختـار نحوی و معنـایی منطق کوانتومی و تفـاوتهـای آن بـا منطق کلاســـیک می پردازد، مباحث معناشـناسـی این منطق با عنوان تعابیر یک زبان صـوری در یک سـاختار جبری آمده‌اسـت؛ یک تعبیر، جملات زبان را بنحو همریخت روی عناصـر ساختار جبری می‌نگارد و با توجه به ساختار معنایی، درستی و تمامیت ضعیف این حسابها اثبات شده‌است.

واژگان کلیدی: منطق کوانتوم، فضای هیلبرت، جبر بولی و شبکه‌ها، جبر بولی جزئی، شبکه‌های ارتومدولار.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

عنوان **صفحه**

فصل سوم: منطق گزاره‌ای کلاسیک

فصل چهارم: فرمول بندی مکانیک کوانتوم

عنوان **صفحه**

فصل پنجم: شبکه‌های ارتومدولار و جبر بولی جزئی

فصل ششم: ساختار جبری و منطق کوانتوم: شبکه های ارتومدولار

فصل هفتم: ساختار جبری و منطق کوانتوم: جبر بولی جزئی

عنوان **صفحه**

پیشگفتار:

در اوایل قرن بیستم محققین با انجام آزمایش‌هایی بر روی الکترون‌ها و دیگر ذرات اتمی و محاسبات فرآیندهای زیر میکروسکوپی نتایجی بدست آوردند که با تعابیر فیزیک کلاسیک سازگاری نداشت. چنین نتایجی باعث به وجود آمدن نظریه‌ی نوینی در علم فیزیک شد که امروزه آن را با نام «نظریه‌ی کوانتومی» می شناسیم. بررسی ساختار و قوانین مکانیک کوانتومی، عدم کارایی منطق کلاسیک در این حوزه را آشکار ساخت. در سال ۱۹۳۶منطق کوانتومی با مقالهٔ بیرکهوف و فون نویمان با عنوان "منطق مکانیک کوانتوم" به همگان معرفی شد. آنها با استفاده از فرمولبندی مکانیک کوانتوم و بررسی فضای هیلبرت، ساختار جبری حاکم بر منطق کوانتومی را تحت عنوان شبکه های ارتومدولار ارائه کردند، که متفاوت از ساختار جبری منطق کلاسیک می باشد. جبر بولی سازگار با منطق کلاسیک دارای خاصیت توزیع پذیری است، حال آنکه این قانون در فضای کوانتومی قابل اجرا نیست و منطق کلاسیک توسط این قانون در مکانیک کوانتومی دچار چالش می‌شود. در این تحقیق با ترجمه و گزینش کتاب "سیستمهای منطق کوانتوم" ریچارد هیوز، علاوه بر شبکه های ارتومدولار، جبربولی جزئی نیز بعنوان ساختار جبری سازگار با مکانیک کوانتوم معرفی و بررسی می‌شود و بر پایهٔ هر یک از این ساختارهای جبری، منطقی معرفی خواهد شد و بطور کلی مبانی مورد نیاز و ساختار نحوی و معنایی منطق کوانتومی بر پایهٔ جبر بولی جزئی و شبکه‌های ارتومدولار و تفاوتهای آنها با منطق کلاسیک بیان می‌شود، در منبع مذکور، دستگاههای مختلفی برای منطق کوانتومی معرفی شده که ساختار نحوی و معنایی دو دستگاه از آن در اینجا آمده است.

اهداف اصلی این تحقیق به ترتیب زیر می‌باشد.

-آشنایی با جبر بولی و شبکه‌های بولی به عنوان ساختار جبری مکانیک نیوتن

- بررسی سازگاری قواعد جبر بولی با منطق کلاسیک و سازگاری آنها با مکانیک کلاسیک یا نیوتنی

- شناخت ساختار ریاضی حاکم بر مکانیک کوانتوم و بررسی فضاهای برداری

- معرفی منطق کوانتوم بر پایهٔ جبر بولی جزئی و شبکه های ارتومدولار

- بررسی ساختار نحوی و معنایی منطق کوانتومی در مقایسه با منطق کلاسیک

همچنین این رساله سعی در پاسخ به *سؤالات* زیر را دارد:

- ساختار جبری حاکم بر مکانیک نیوتن چیست و چرا این ساختار با مکانیک کوانتوم سازگار نیست؟

- ساختار ریاضی حاکم بر مکانیک کوانتوم چیست و چه تفاوتی با مکانیک کلاسیک دارد؟

- ساختار جبری منطق کوانتوم چیست و با منطق کلاسیک چه تفاوتی دارد؟

-ساختار نحوی و معنایی منطق کوانتومی چگونه است؟

در نتیجه متناظر با روابط جبری حاکم بر مکانیک نیوتن و مکانیک کوانتوم روابط منطقی بین گزاره‌های فیزیکی را خواهیم داشت که روابط منطقی حاکم برگزاره‌های فیزیک نیوتن، سازگار با نظریهٔ مجموعه‌ها و جبر بولی است و دقیقاً روابط منطق کلاسیک می‌باشد و روابط منطقی بین گزاره‌های کوانتومی سازگار با جبر بولی جزئی و شبکه‌های ارتومدولار است و آنرا با نام "منطق کوانتوم" می‌شناسیم.

فصل اول

منطق و نظریهٔ فیزیکی

۱-۱-مقدمه

فیزیک با زبان ریاضی جهان را توصیف می‌کند. مطابق نظریه‌ای مانند مکانیک نیوتن و یا مکانیک کوانتوم، رفتار یک سیستم فیزیکی را می‌توان با مدلی ریاضی بیان کرد. از نظر مفهومی، می‌توان بین فرمولبندی ریاضی که آن نظریهٔ فیزیکی بکار می‌گیرد و تعابیر فیزیکی آن تمیز نهاد: با تفسیر بعضی از عبارات ریاضی موجود در نظریه، گزاره‌هایی بدست می‌آوریم که حامل اطلاعاتی راجع به ماهیات و سیستمهای مرتبط با آن نظریه هستند. این عبارات ساختاری جبری را نشان می‌دهند که بر پایهٔ روابطی مدون قرار دارند. متناظر با روابط جبری بین عبارات ریاضی، روابط منطقی بین گزاره‌ها وجود دارد، یعنی بین گزاره‌هایی که با توجه به نظریه، سیستمی را توصیف می‌کنند. حال ساختار ریاضی حاکم بر فیزیک نیوتن، جبری از مجموعه‌هاست و روابط منطقی آن دقیقاً روابط منطق کلاسیک می‌باشد. اما در مورد مکانیک کوانتوم مسئله متفاوت است. ساختار جبری این نظریه بولی نیست و منطق سازگار با آن منطقی متفاوت و غیرکلاسیک است که آنرا با نام منطق کوانتوم می‌شناسند.

در این بخش ابتدا به چگونگی حالتهای یک سیستم فیزیکی بسیار ابتدائی با بیان ریاضی خواهیم پرداخت و ساختار جبری آن که دقیقاً متناظر با ساختار منطق کلاسیک است بررسی خواهیم کرد؛ و پس از آن با تعمیم این شیوه به بیان حالتهای مکانیک نیوتن و مکانیک کوانتوم خواهیم پرداخت.

۱-۲ سیستمی ابتدائی و حالتهای آن

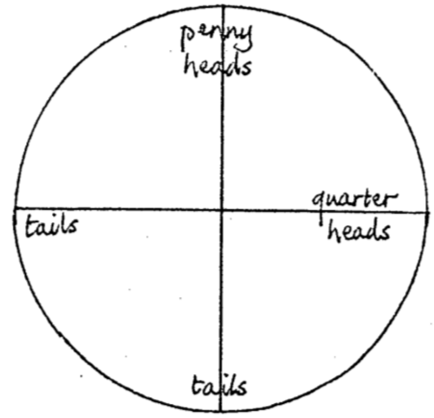
سیستم فیزیکی ابتدائی: جعبه‌ای با پوشش شفاف، که حاوی یک سکهٔ پنی و یک سکهٔ کوارتر است را در نظر بگیرید. حالت آن را با دیدن صورت فوقانی هر سکه معین می‌کنیم. از آنجائی که هر کدام از سکه‌ها ممکن است در حالت شیر یا خط باشند، سیستم دارای یکی از این چهار حالت است: هر دو سکه شیر باشند، هر دو خط باشند، پنی شیر و کوارتر خط باشد یا بالعکس.

این سیستم و حالات آنرا به شرح زیر می‌توان نشان داد. مطابق با شکل ۱ هر یک چهارم دایره متناظر با یکی از حالات سیستم می‌باشد. فضای بالایی خط افقی متناظر با دو حالتیست که پنی در آنها شیر است، نیمهٔ طرف راست متناظر با حالتیست که کوارتر شیر است، قسمت بالای چپ با حالتی که در آن پنی شیر و کوارتر خط است متناظر است و....این چهار قسمت با حالتهای ۱۰۰۰، ۰۱۰۰، ۰۰۰۱، ۰۰۱۰ نشان داده‌می‌شوند(با حرکت خلاف جهت عقربه‌های ساعت از یک چهارم بالایی سمت راست)؛ حال می‌توان به هر قسمت از دایره که شامل یک عدد مشخص از قاچهای دایره است، A را مربوط ساخت، (با در نظر گرفتن یک عدد دو ارزشی چهار رقمی و قرار دادن ۱ در مکانی که آن یک چهارم، در A قرار گرفته باشد). برای مثال، عدد ۱۱۰۱ مربوط به قسمت هاشور زده در شکل دو است. هر قسمت دایره با بقیهٔ قسمتها غیر از مرکز، اشتراکی ندارد. برای رسیدن به این نکته فرض کنید هر قسمت تنها شامل یکی از دو شعاعیست که آنرا محدود کرده است. به دلخواه در هر مورد شعاع آخر را در جهت عقربه‌های ساعت انتخاب می‌کنیم.(شکل۳) نمایش ریاضی سیستم اینگونه است که دایره به چهار قسمت تقسیم شده‌است. فضاهای متفاوتی که از ترکیب قسمتهای دایره بدست آمده، به یکدیگر مربوط می‌باشند، این روابط را می‌توان با نمودار نشان داد (شکل ۴). این نمودار شبکه‌ای از نقاط را نشان می‌دهد، شانزده نقطه از شبکه معرف فضاهای دایره‌اند. پایین‌ترین نقطهٔ روی شبکه فضای صفر را نمایش می‌دهد (فضای روی مرکز دایره)، و از این نقطه خطوطی به چهار نقطهٔ بالایی که معرف

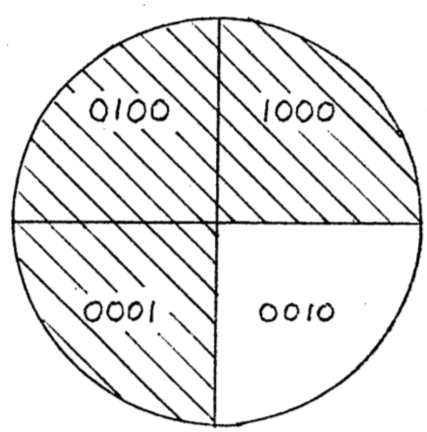
چهار قسـمت روی دایره‌اند وصـل شـده‌اند. بالای این نقاط به ترتیب نقاطی هستند که فضای بیشتری از دایره را معرفی می‌کنند، و در بالاترین قســمت نقطه‌ایســت که تمام دایره را نمایش می‌دهد. بالاترین و پایین‌ترین نقطه روی دایره به ترتیب ۱ و ۰ نامیده می‌شـوند. اگر a و b نقاطی روی شـبکه باشـند، اگر a=b یا اگر نقطه a در بالای نقطهٔ b در شبکه قرارگرفته باشـد،اینگونه نوشـته می‌شود: a≤b. در این شبکه اگر فضایی که a را نمایش می‌دهد درون فضایی باشد که b را نمایش می‌دهد، a≤b اســت. در واقع در اینجا رابطهٔ شــمول مجموعه‌ها به نمایش در می‌آید. با در نظر گرفتن هر دو فضــا از دایره (مثلا۱۱۰۰و۰۱۱۰)، فضــای کوچکتری وجود دارد که شــامل هر دوی آنهاســت (۱۱۱۰) و فضــای بزرگتری که آنها به اشتراک دارند (۰۱۰۰)، یعنی اجتماع و اشتراک بین دو فضا. حال اگر متناظر با این دو فضا نقاط a و b روی شـبکه موجود باشـند، نقاطی دیگری نیز روی شـبکه برای نشان دادن روابط اجتماع و اشتراک دو فضا وجود خواهند داشــت، و آنها به a∩b و b∪a مربوط می‌شــوند. همچنین برای هر نقطهٔ a، می‌توانیم مکمل آن یعنی ´a را بیابیم، بدین ترتیب فضـاهای متناظر با این دو نقطه نقاط اشـتراکی ندارند، و با همدیگر تمامی دایره را تشـکیل خواهند داد و خواهیم داشت:

$$a \cup a' = 1 \qquad a \cap a' = 0 \qquad \text{۱-۲-۱}$$

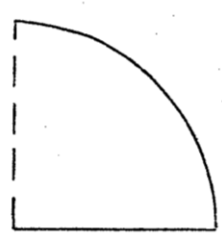
برای مثال نقطهٔ ۰۱۰۰ مکمل نقطهٔ ۱۰۱۱ است و بالعکس.



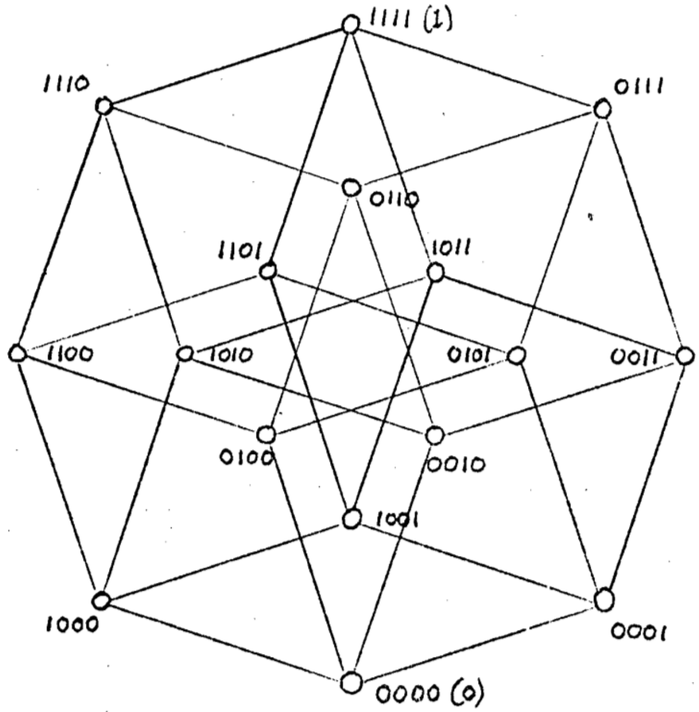
شکل ۱ –فضای فاز برای سیستم دو سکه



شکل ۲ –منطقهٔ هاشور زده = ۱۱۰۱



شکل ۳–یک چهارم نیمه بسته



شکل ۴- شبکهٔ زیرمنطقه‌های دایره

بدین ترتیب اگر ما مجموعه‌ای از نقاط یک شبکه را در نظر بگیریم درمی‌یابیم که دو عملگر دوموضعی "∩" و"∪" و یک عملگر یک‌موضعی مکملیت روی آن تعریف شده‌است. این عملگرها از همان قوانین عملگرهای مشابهشان در نظریهٔ مجموعه‌ها تبعیت می کنند، اجتماع، اشتراک و مکملیت؛ و بطور مشخص قوانین توزیع‌پذیری برای هر یک از نقاط A,B,C صادقند.

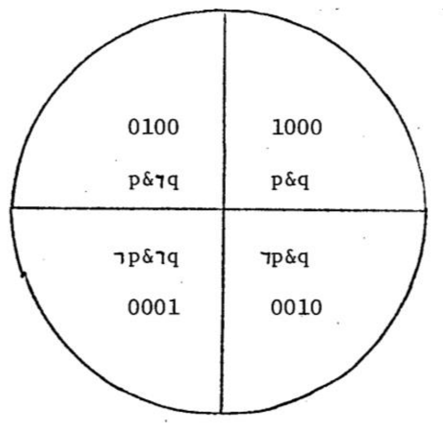
$$a\cap(b\cup c)=(a\cap b)\cup(a\cap c) \qquad a\cup(b\cap c)=(a\cup b)\cap(a\cup c) \qquad ۲-۲-۱$$

در نتیجه می‌توان بصورت مشابه، این ساختار ریاضی را به عنوان یک شبکهٔ توزیع‌پذیر یا یک جبر بولی شرح داد.

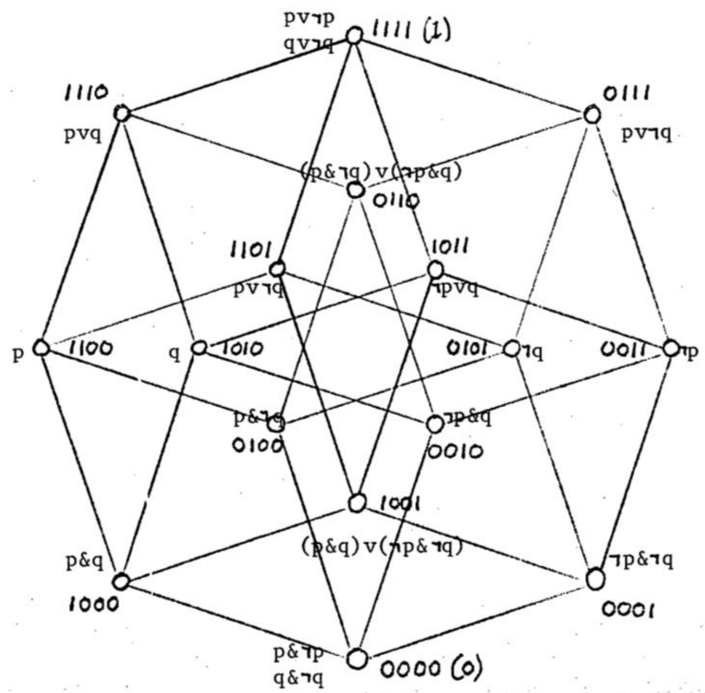
این سیستم فیزیکی سیستم ساده‌ای است زیرا تنها از دو سکه تشکیل شده و هر کدام از آنها می‌تواند شیر و یا خط باشد. هر توضیحی از ویژگیهای این سیستم، برابر با یک گزاره است که بعنوان بیان نظری این سیستم لحاظ می‌شود،

یعنی به عنوان فضـایی از دایره. حال گزارهٔ "پنی شـیر اسـت" را بصـورت نمادین با P، و "پنی خط اسـت" را با P¬، و "کوارتر شـــیر اســـت" با q، "کوارتر خط اســـت" با q¬ و "و" را با "&" نشـــان می‌دهیم وهمچنین می‌توانیم جملات مرکب حاوی q و p داشـته باشیم که متناظر با قسمتهایی از دایره باشند.(شکل ۵) توجه کنید که اگر بجای "۱" "T" و بجای "۰" "F" را بگذاریم، نشـــانه گذاری قبلی ما ســـتونی از یک جدول ارزش ســـازگار با گزارهٔ مربوط به آن یک چهارم دایره می‌شـود.هر نقطه روی شـبکه را می‌توان برای نمایش گزاره‌ای که شـامل "p" و "q" باشد در نظر گرفت (شـــکـل ۶). یعنی کلاس هم‌ارزی از این گزاره‌هـا را نمایش می‌دهد، بطوریکه تمام اعضـــای این گروه جدول ارزش یکسانی دارند. بالاترین نقطهٔ روی شبکه، ۱، گروه توتولوژیها را نمایش می‌دهد و پایین‌ترین نقطهٔ روی شبکه، ۰، گروه گزاره‌های متناقض را نمایش می‌دهد. متناظر با دو عملگر دوموضعی روی شبکه، گزاره‌های ربطی وجود دارند: عملگر ∪ متنـاظر بـا "∨"، "یا"، و عملگر ∩ متناظر با "&" "و"، و عملگر یک‌موضـــعی مکمل متناظر با نقیض اســـت. حال شـبکه، روابط بین گزاره‌ها را نمایش می‌دهد، رابطهٔ $\geq$ که ترتیب را نشـان می‌دهد می‌تواند مشـابه اسـتلزام باشـد. مانند گزاره‌هـای A و B کـه با نقاط a و b در شـــبکه متناظرند، $a \leq b$ اگر و فقط اگر A ⊨B اگر و فقط اگر A ⊢B. در واقع تنها با دو گزارهٔ اتمی، جبر لیندنباوم-تارسکی را برای حساب گزاره‌ها خواهیم داشت.

آشـکارا سـاختار جبری نمایش داده شـده در این سیسـتم، یک سـاختار منطقی است و تمامی این نکات دربارهٔ نظریهٔ مکانیک نیوتن کاربرد خواهد داشت.



شکل ۵- مناطق فضای فاز و گزاره‌های متناظر



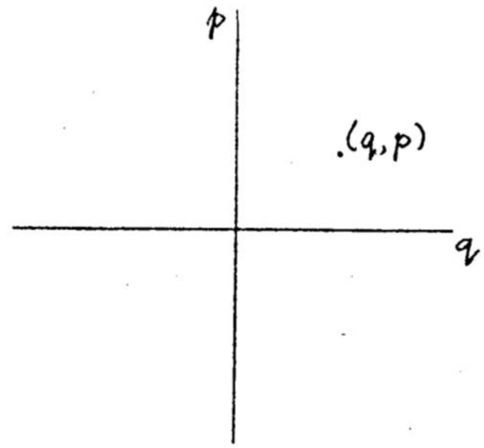
شکل ۶- شبکهٔ گزاره‌ها مربوط به سیستم دو سکه

۱-۳ ذره‌ای واحد در مکانیک نیوتن

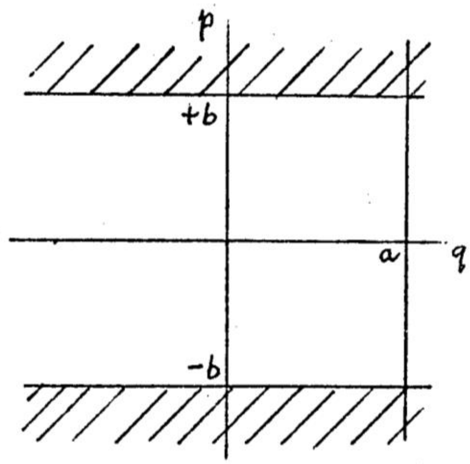
سیستم فیزیکی کلاسیک مورد بحث، مکانیک نیوتن است که حاوی ذرات متناهی می‌باشد. تمامی اطلاعاتی که این نظریه راجع به یک سیستم در زمان مشخص می‌دهد، می‌تواند از شناخت موقعیت هر ذره در آن زمان مشخص و اندازهٔ حرکت آن نشأت گرفته باشد. با در نظر گرفتن سیستم یک ذره درمی‌یابیم که اگر این ذره مجبور به حرکت در یک بعد باشد، حرکت آن در امتداد یک خط خواهد بود.

حال، از آنجائی که حالت سیستم قبلی با یک فضا روی دایره مشخص شده بود، در اینجا حالت سیستم توسط نقطهٔ روی صفحهٔ دکارتی (q.p) نمایش داده می‌شود، که مختصات آن، موقعیت (q) ، و اندازهٔ حرکت (p) آن ذره را به ما می‌گوید(شکل ۷).این صفحه یک فضای فاز برای این سیستم است، همانطور که دایره یک فضای فاز برای سیستم قبلی بود. بنابراین حالت سیستم قبلی توسط یک قسمت از فضای فاز و حالت یک ذرهٔ واحد از مکانیک نیوتن توسط یک نقطه در فضای فاز نمایش داده شده‌است، اما در مکانیک کوانتوم، همانطور که خواهیم دید، حالت یک سیستم توسط یک بردار در فضای فاز نمایش داده خواهد شد.

سیستم نیوتنی و سیستم قبلی بسیار به یکدیگر شبیه هستند، زیرا ساختار ریاضی آنها یکی است. ساختار ریاضی سیستم دو سکه، قسمتهای مشخص از فضای فاز(دایره) است که با حالتهای مشخصی متناظر هستند، اما در اینجا ضرورتاً قسمت‌هایی وجود ندارد، بلکه مناطقی که با گزاره‌های معینی متناظرند را خواهیم داشت. در شکل ۸ قسمتهای هاشور زده با "انرژی جنبشی ≤ $b^2/۲m$" (m جرم ذره است)، و خطوط مستقیم عمودی با "موقعیت= a" متناظر هستند. حال مفهوم "تناظر" را بیشتر شرح می‌دهیم، گزارهٔ A متناظر با منطقهٔ S است، یعنی اگر حالت ω از سیستم در S قرار گرفته باشد، آنگاه A صادق است. با زبان ریاضی می‌توان از "زیرمجموعه‌های بورل فضای فاز" سخن گفت، مانند مجموعه‌ای از قسمتهای فرعی دایره، مجموعهٔ زیرمجموعه‌های بورل از صفحهٔ دکارتی، ساختار شبکه‌ای که توسط شمول مرتب شده را دارد، و مانند قبل، عملگرهای دوموضعی شبکه، اجتماع و اشتراک هستند و مکمل یک زیر مجموعهٔ بورل از یک صفحه، شامل تمامی نقاطی روی صفحه‌اند که در زیر مجموعه نیستند. در اینجا نیز یکریختی بین این ساختار و ساختاری منطقی که عناصر آنها گزاره‌هایی از کلاسهای هم‌ارزند، را خواهیم داشت، و در آن عملگرها بر پایهٔ رابطهای "∨" و "&" و"¬" هستند. دقیقاً به همان صورت که در سیستم ابتدائی بود، این ساختار یک شبکهٔ کاملاً توزیع‌پذیر است (و یا یک جبر بولی)، بنابراین منطق آن یقیناً منطق کلاسیک است. تنها تفاوت اینست که حال ما با شبکهٔ نسبتاً بزرگتری از سیستم قبلی- با مجموعه‌ای بی‌نهایت از کلاسهای هم ارز از گزاره‌ها سرو کار داریم.گسترش این نظریات برای پرداختن به سیستمهایی با ذرات بسیار زیاد در فضاهای سه بعدی بسیار پیچیده‌تر خواهد بود، اما در مبانی تفاوت اساسی نخواهد داشت.



شکل ۷- فضای فاز برای ذره‌ای واحد که در یک بعد حرکت می‌کند.



شکل۸- تناظر بین زیر مجموعه‌های فضای فاز و گزاره‌های نظری.

فضای هاشور زده متناظر با گزارهٔ K.E $\geq b^2/2m$

خط عمودی متناظر با گزارهٔ $q = a$