بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

گرایش آنالیز عددی

روش آنالیز هوموتوپی برای قیمت گذاری اختیار معامله تحت مدل بلک-شولز

از:

سارا یعقوبی کجل

استاد راهنما:

دکتر حسین امینی خواه

استاد مشاور:

دکتر فرشید مهردوست

بهمن ۱۳۹۲

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

تقدیر و تشکر

در ابتدا لازم می دانم که از زحمات استاد گرامی آقای دکتر حسین امینی خواه که در طول مدت تحصیلم در دانشگاه گیلان برای اینجانب کشیده اند تشکر و قدردانی کنم و از آقای دکتر فرشید مهردوست که استاد مشاور بنده بوده اند بسیار ممنونم و همچنین از برادر بزرگوارم آقای دکتر سام یعقوبی که در امر تحصیل مشوق و راهنمای من بوده اند تشکر می کنم.

فهرست مطالب

فصل اول: معرفی روش آنالیز هوموتوپی

فصل دوم: مروری بر مفاهیم ریاضیات مالی

فصل سوم: کاربرد روش آنالیز هوموتوپی در اقتصاد

فهرست شکلها

فهرست جداول

چکیده:

روش آنالیز هوموتوپی برای قیمت گذاری اختیار معامله تحت مدل بلک-شولز

سارا یعقوبی کجل

امروزه قراردادها متداول ترین ابزارهای مالی هستند. به همین دلیل با افزایش تقاضا برای این ابزار مالی، مساله ی قیمت گذاری قراردادها یکی از مهم ترین مسائل اقتصادی است. با گسترش مدل های تصادفی، نیاز به روش های محاسباتی تصادفی باعث ایجاد رشته ای جدید به نام مهندسی مالی شد. ارائه ی مدل بلک-شولز در سال ۱۹۷۳، معادلات دیفرانسیل جزئی را بیش از پیش مورد توجه افراد در زمینه ی اقتصاد قرار داد. بنابراین برای تعیین قیمت قراردادهای اختیار نیاز به راه حلی ساده ودقیق برای این معادلات دیفرانسیل جزئی است. روش آنالیز هوموتوپی یک روش تحلیلی برای حل معادله های خطی و غیرخطی در اقتصاد و علوم مهندسی است. این روش با تبدیل مسائل پیچیده از معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی به تعداد نامتناهی معادلات دیفرانسیل جزئی خطی حل آن ها را ساده تر می کند و جواب را به صورت سری نامتناهی برحسب یک پارامتر فرضی بیان می کند. این روش، روشی کارا برای حل مسائل با شرایط مرزی است که در اقتصاد برای قیمت گذاری استفاده می شود. هدف از این پایان نامه، استفاده از این روش برای قیمت گذاری مشتقات مالی تحت مدل بلک-شولز است. با استفاده از روش آنالیز هوموتوپی و الگوریتم های مربوط به آن قیمت گذاری اختیار معامله با بررسی مدل بلک-شولز انجام می شود. مقایسه ی روش آنالیز هوموتوپی با روش های عددی دیگر دقت و همگرایی سری جواب بدست آمده از این روش را نشان می دهد.

کلید واژه: پارامتر فرضی، روش آنالیز هوموتوپی، قیمت گذاری قرارداد، مدل بلک-شولز

Abstract

Homotopy Analysis Method for Option Pricing under Black-Scholes model
Sara Yaghoubi Kajal

Nowadays, options are common financial derivatives. For this reason, by increase of applications for these financial derivatives, the problem of options pricing is one of the most important economic issues. With the development of stochastic models, the need for randomly computational methods caused the generation of a new field called financial engineering. Presentation of Black-Scholes model in the 1973 attracted the attention of economics to the partial differential equations more than past. So for pricing option contracts an accurate and simple solution for these partial differential equations is needed. The Homotopy analysis method (HAM) is an analytical method for solving linear and nonlinear equations in economics and engineering sciences. This method makes the solution easier by converting the complex problems of nonlinear partial differential equations into an infinite number of linear sub-problems. The analytic solution of the equation is calculated in the form of an infinite power series of assumed parameter with easily computable components. The HAM is an efficient method for solving problems with boundary conditions used for pricing in the economy. The goal of this thesis is to use HAM for pricing financial derivative under the Black-Scholes model. Using HAM and its related algorithms leads to the option pricing by studying Black – Scholes model. Comparison of the HAM with other numerical methods shows the accuracy and convergence of the answer series obtained with this method.

Keywords: Assumed parameter, Homotopy analysis method, Option price, Black-Scholes model

پیشگفتار

با پیدایش جوامع بشری و گسترش آن ها، اولین روابط تجاری بین افراد با دادوستد به صورت کالاباکالا شکل گرفت. با اختراع وسیله ی حمل ونقل و ارتباط ملت ها ی مختلف با هم، بشر را به فکر انداخت تا ابزاری برای آسان کردن روابط اقتصادی بسازد با ساخته شدن سکه ها و اسکناس این کار تا حدودی به رونق بازارها افزود اما با رشد سریع جمعیت در سده ی بیستم و تغییر در شیوه ی زندگی انسان ها، روابط اقتصادی و بین المللی باعث ایجاد روابط تجاری جدید شد و بشر متوجه شد که دیگر روش های قدیمی پاسخگوی نیاز جوامع نیست و به فکر افتاد تا ابزاری جدید متناسب با شیوه ی زندگی افراد بسازد و در این راستا قراردادها معرفی شدند. با گسترش قراردادها، امروزه قراردادهای اختیار متداول ترین نوع قراردادها هستند اما مهم ترین مساله در استفاده از قراردادها چگونگی تعیین قیمت این قراردادهاست.

امروزه با گسترش علوم در زمینه های مختلف، لازم است که بتوان از پدیده های طبیعی مدلی مناسب تر و منطبق تر طراحی نمود و هم چنین می دانیم مدل سازی یک پدیده معمولا به یک معادله دیفرانسیل منجر می شود. مدل قیمت گذاری بلک-شولز رایج ترین روشی است که مورد استفاده قرار می گیرد و در واقع همین معادله نقطه ی شروعی برای مهندسی اقتصاد بود. بنابراین برای تعیین قیمت قراردادها، لازم است راه های حل این گونه از معادلات را بشناسیم.

در این پایان نامه، فصل اول به توضیح روند شکل گیری روشی تحلیلی بر مبنای یک مفهوم توپولوژیک، روش آنالیز هوموتوپی می پردازد. در این روش جواب ها به صورت سری بیان می شوند و قابلیت ترکیب با روش های دیگر ریاضی را نیز دارد و به همین دلیل دارای دامنه ی کاربردی بسیار است که در این فصل چند روش بر اساس روش آنالیز هوموتوپی معرفی شده است و هم چنین چند مثال از کاربرد این روش نیز بیان شده است.

در فصل دوم، ابتدا مفهوم قراردادهای اختیار و عوامل مؤثر بر قیمت قراردادهای اختیار بیان می شود و با معرفی انواع قراردادها با قراردادهای اختیار خرید و فروش در مدل ها ی اروپایی و آمریکایی آشنا می شویم. این دو مدل با این فرض که قیمت سهام از فرآیند وینر پیروی می کند بررسی می شوند. بعد از بیان تفاوت مدل های پرکاربرد اروپایی و آمریکایی، مفاهیمی از ریاضیات مالی مانند فرآیند وینر و قضایای مورد استفاده در مدلسازی مساله ی قیمت گذاری قراردادها ارائه می گردد و هم چنین چگونگی بدست آمدن معادله ی بلک-شولز با استفاده از محاسبات تصادفی شرح داده خواهد شد.

فصل سوم، شامل دو بخش است. در بخش اول با استفاده از روش آنالیز هوموتوپی روشی تحلیلی برای حل معادلات حاصل از مدلسازی ها در فصل دوم، برای قراردادهای اختیار اروپایی تحت محیط نوسان پذیری تصادفی بدست می آید که جواب به صورت یک سری نامتناهی است که ضرایب آن توسط یک رابطه ی بازگشتی که در این جا بدست می آید بیان می شود. در این زمینه برای حل معادلات از روش هایی مانند تابع گرین نیز بهره برده شده است و برای نشان دادن دقت این

روش، شرط همگرایی برای سری جواب قرارداد اروپایی مورد بررسی قرار می گیرد. در بخش دوم، قرارداد اختیار فروش آمریکایی مطرح می شود که با استفاده از ترکیب روش آنالیز هوموتوپی با تبدیل لاپلاس، تقریبی برای قیمت اعمال بهینه ارائه می شود. در اینجا نیز برای نشان دادن مزیت روش آنالیز هوموتوپی، تقریب بدست آمده با تقریب های تحلیلی قبلی مقایسه می شود و برای یک مقایسه درست، این روش با روش های عددی نیز سنجیده می شود.

فصل ۱

معرفی روش آنالیز هوموتوپی

۱-۱ مقدمه

مدلسازی بیشتر پدیده های فیزیکی در جهان به تشکیل معادلات دیفرا نسیل غیرخطی منجر می شود. بنابراین بدست آوردن جوابی دقیق برای این معادلات با روشی آسان همواره برای دانشمندان مهم بوده است. اما حل این معادلات نسبت به معادلات دیفرانسیل خطی، به ویژه با روشهای تحلیلی بسیار دشوار است. به طور کلی دو معیار برای یک روش تحلیلی خوب وجود دارد:

۱) باروشی کارا، همواره بتوان تقریب های تحلیلی ارائه داد.

۲) تقریب های تحلیلی ارائه شده دارای دقت کا فی برای همه ی پارامترهای فیزیکی باشند.

این دو استاندارد برای سنجش یک روش تحلیلی خوب مورد استفاده قرار می گیرند. در ابتدا با استفاده از این استانداردها چند روش تحلیلی با هم مقایسه می شوند و در ادامه روشی معرفی می شود که در سال های اخیر به خوبی برای حل انواع زیادی از معادله های غیرخطی، همگن، ناهمگن و دستگاه معادلات در علوم و مهندسی به کار رفته است. روش آنالیز هوموتوپی بیان جواب های مسائل غیرخطی را به طور تحلیلی امکان پذیر کرده است.

۱-۲ مقایسه ی چند روش تحلیلی

روش های آشفتگی، یکی از پرکاربردترین روش ها در علوم و مهندسی هستند. این روش ها بر اساس وجود پارامترهای کوچک و بزرگ در معادلات اصلی و شرایط مرزی یا اولیه شکل گرفته اند. جواب روش آشفتگی به صورت یک سری، از کمیت آشفتگی بیان می شود. در این روش معادله ی غیرخطی با معادلات خطی که از روی معادله ی اولیه تعیین شده اند، جایگزین می شود. از آن جایی که روش های آشفتگی مبنی بر پارامترهای کوچک و بزرگ فیزیکی هستند، اغلب مفاهیم فیزیکی را به روشنی بیان می کنند. سادگی این روش باعث فهم آسان آن می شود اما هر مساله ی غیرخطی دارای چنین کمیت آشفتگی نیست. از طرفی، حتی اگر چنین پارامتر فیزیکی کوچکی وجود داشته باشد، ممکن است زیر مساله ها جواب نداشته باشند یا به قدری پیچیده باشند که فقط تعدادی از آنها قابل حل باشند. بنابراین روش های آشفتگی را نمی توان برای هر مسئله ی غیرخطی به کار برد. از آنجایی که تقریب های آشفتگی بیشتر برای پارامترهای فیزیکی کوچک معتبر هستند نمی توان اعتبار روش آشفتگی را برای همه ی پارامترهای فیزیکی تضمین کرد. بدین ترتیب روش های آشفتگی نه فقط در استاندارد (۱) بلکه در استاندارد (۲) نیز صدق نمی کنند.

برای از بین بردن محدودیت های روش های آشفتگی، برخی روش های قدیمی غیرآشفتگی گسترش یافتند. روش هایی مانند: روش پارامترمصنوعی کوچک لای پونوف[۱]، روش بسط دلتا[۲]، روش تجزیه ی آدمین[۳] و . . .

[1]Lyapunov's artificial small parameter
[2] Delta expansion
[3] Adomian decomposition

همه ی این روش ها براساس یک پارامتر مصنوعی ساخته شده اند. در این روش ها جواب های تقریبی به صورت یک سری از پارامترمصنوعی بیان می شوند. پارامتر کوچک مصنوعی، طوری استفاده می شود که همواره بتوان جواب تقریبی برای یک معادله ی غیرخطی به دست آورد. پیشرفت بزرگی که در این روش نسبت به روش های آشفتگی[1] وجود دارد این است که پارامتر کوچک مصنوعی را می توان به روش های مختلف قرار داد اما متاسفانه اصول کلی، برای چگونگی بهتر قرار دادن این پارامتربرای به دست آوردن تقریب بهتر وجود ندارد.

برای مثال، روش تجزیه ی آدمین در بیشتر موارد عملگر خطی $\frac{d^k}{dx^k}$ را به کار می برد که k بیشترین مرتبه ی مشتق در معادلات اولیه است. بنابراین جواب های زیرمساله ها، با k بارانتگرالگیری نسبت به x به آسانی به دست می آیند. اگر چه چنین عملگرهای خطی به آسانی تقریب هایی در سری توانی می دهند، اما روش تجزیه آدمین همگرایی سری های تقریبی را تضمین نمی کند.

به طورکلی همه ی روش های غیرآشفتگی قدیمی مانند روش پارامترمصنوعی کوچک لای پونوف، روش بسط دلتا، روش تجزیه ی آدمین نمی تواند همگرایی سری های تقریب را ضمانت کند. بنابراین روش های غیرآشفتگی قدیمی فقط در استاندارد (۱) صدق می کنند اما در استاندارد (۲) که در مقدمه بیان شد صدق نمی کنند.

۱-۳ هوموتوپی در توپولوژی

تعریف۱-۱: هر فضای توپولوژیک $\left\langle X,J \right\rangle$ عبارت است از یک مجموعه ناتهی X از نقاط ،توام با خانواده J از زیر مجموعه های آن ها که دارای خواص زیر هستند:

۱) $X \in J$, $\varnothing \in J$

۲) اگر $A, \mathrm{B} \in \mathrm{J}$ در این صورت $A \cap B \in J$

۳) $A_\alpha \in J$ ایجاب می کند، $\cup A_\alpha \in J$

با فرض اینکه X مجموعه ای دلخواه باشد $J = \{X, \varnothing\}$ کوچکترین توپولوژی ممکن در X است.

تعریف۱-۲: فرض کنیم X یک مجموعه و J یک توپولوژی در X باشد. در این صورت زوج مرتب $\left(X,J\right)$ را یک فضای توپولوژیک گویند. در یک فضای توپولوژیک، دو تابع پیوسته را هوموتوپیک[2] می گویند اگر یکی از آن ها به طور پیوسته به دیگری تغییر کند و این تغییرحالت، یک هوموتوپی بین دو تابع نامیده می شود. این مطلب را می توان به طور خلاصه به صورت زیر بیان کرد:

---
[1] Perturbation
[2] Homotopic

تعریف۱-۳: با فرض اینکه X,Y دو فضای توپولوژیک و $f,g:X\to Y$ نگاشت های پیوسته باشند در این صورت یک هوموتوپی از f به g تابع پیوسته $F:X\times[0,1]\to Y$ است که در شرایط زیر صدق می کند:

$$F(x,0)=f(x)\quad,\quad F(x,1)=g(x)\qquad \forall x\in X \tag{۱-۱}$$

اگر چنین تابعی وجود داشته باشد f را هوموتوپیک g می نامند.

مثال ۱-۱: اگر $f,g:R\to R$ دو تابع حقیقی و پیوسته باشند، آنگاه f هوموتوپیک g است.

برهان : تابع $F:R\times[0,1]\to R$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$F(x,t)=(1-t)f(x)+tg(x) \tag{۲-۱}$$

از آن جایی که F ترکیبی از توابع پیوسته است بنابراین F نیز پیوسته است. بعلاوه:

$$\begin{aligned}F(x,0)&=(1-0).f(x)+0.g(x)=f(x)\\F(x,1)&=(1-1).f(x)+1.g(x)=g(x)\end{aligned} \tag{۳-۱}$$

بنابراین F یک هوموتوپی بین f و g است.

تعریف۱-۴: زیرمجموعه ی $A\subseteq R^n$ را محدب نامند هرگاه برای هر دونقطه ی داده شده $x,y\in A$ یک قطعه خط راست از x به y در A قرار گیرد. به عبارت دیگر:

$$(1-t).x+t.y\in A\qquad \forall t\in[0,1] \tag{۴-۱}$$

گزاره۱-۱ : اگر A زیرمجموعه ای محدب از R^n با زیرفضای توپولوژی و X فضای توپولوژی باشد در این صورت هر دو نگاشت پیوسته ی $f,g:X\to A$ هوموتوپیک هستند.

برهان: به منبع [۱] رجوع کنید.

قضیه۱-۲: با فرض اینکه X,Y دو فضای توپولوژی و نگاشت (X,Y) مجموعه ای از همه ی نگاشت های پیوسته از X به Y باشند هوموتوپی یک رابطه ی هم ارزی روی نگاشت (X,Y) است.

برهان: به منبع [۱] رجوع کنید.

۱-۴ ایده ی اساسی و تاریخچه ی روش آنالیز هوموتوپی

۱-۴-۱ روش آنالیز هوموتوپی اولیه

در ۱۹۹۲ لیائو[1] برای حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی با روشی تحلیلی، مفهومی اساسی در توپولوژی، به نام هوموتوپی را کاربردی و جزئیات این ایده را برای اولین بار در رساله ی دکترای خود بیان کرد. او در ابتدا یک معادله دیفرانسیل غیر خطی در شکل کلی زیر در نظر گرفت:

[1] Liao

$$N[u(x)] = 0 \qquad x \in \Omega \tag{۱-۵}$$

که N یک عملگر غیرخطی و $u(x)$ یک تابع مجهول است. لیائو خانواده ای از معادلات با پارامتر فرضی $q \in \left[0,1\right]$ ساخت و آن را معادله ی تغییر شکل مرتبه ی صفرام نامید.

$$(1-q)\,L[\phi(x;q) - u_0(x)] + qN[\phi(x;q)] = 0 \qquad x \in \Omega,\quad q \in [0,1] \tag{۱-۶}$$

که L یک عملگر خطی کمکی و $u_0(x)$ یک حدس اولیه است. در این فرضیه، آزادی زیادی برای انتخاب عملگر خطی کمکی L و حدس اولیه $u_0(x)$ نسبت به روش های غیرآشفتگی قدیمی که در مقدمه بیان شد، وجود دارد. هنگامی که $q = 0$ است از (۱-۶) رابطه ی زیر برقرار است:

$$\phi(x;0) = u_0(x) \tag{۱-۷}$$

و در $q = 1$ نتیجه می شود:

$$\phi(x;1) = u(x) \tag{۱-۸}$$

بنابراین هنگامی که پارامتر فرضی از صفر به یک افزایش می یابد $\phi\left(x,q\right)$ جواب معادله ی تغییر شکل مرتبه ی صفرام، از حدس اولیه ی $u_0(x)$ تا $u(x)$ جواب دقیق معادله دیفرانسیل اصلی $N\left[u(x)\right] = 0$ تغییر می کند. از آن جایی که $\phi\left(x,q\right)$ به پارامتر فرضی $q \in \left[0,1\right]$ بستگی دارد می توان آن را در سری مک- لورن نسبت به q بسط داد:

$$\phi(x;q) = u_0(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)\,q^n \tag{۱-۹}$$

این سری، سری هوموتوپی-مک لورن[1] نامیده می شود. با توجه به آزادی زیادی که برای انتخاب عملگر خطی کمکی L و حدس اولیه $u_0(x)$ وجود دارد اگر عملگر خطی و حدس اولیه به طور مناسب انتخاب شده باشند این سری در $q = 1$ به جواب واقعی همگرا می شود. بنابراین، سری:

$$u(x) = u_0(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \tag{۱-۱۰}$$

در معادله ی اصلی $N\left[u(x)\right] = 0$ صدق می کند که سری جواب هوموتوپی نامیده می شود. برای تعیین $u_n(x)$ ها از معادله ی تغییرشکل مرتبه ی n -ام استفاده می شودکه به صورت زیر تعریف می شود.

$$L\left[u_n(x) - \chi_n\, u_{n-1}(x)\right] = -\delta_{n-1}(x) \tag{۱-۱۱}$$

که در آن:

[1] Homotopy-Maclaurin

$$\chi_n = \begin{cases} 0 & n \le 1 \\ 1 & n > 1 \end{cases} \quad (۱۲-۱)$$

$$\delta_k(x) = \{\frac{1}{k!}\frac{\partial^k N[\phi(x;q)]}{\partial q^k}\}\Big|_{q=0} \quad (۱۳-۱)$$

معادله ی (۱-۱۱)، همواره یک معادله ی خطی است که طرف راست آن عبارت های معلوم هستند. بنابراین مادامی که عملگر خطی کمکی L به طور مناسب انتخاب شده باشد معادله به آسانی قابل حل است.

۱-۴-۲ روش آنالیز هوموتوپی نرمال

روش آنالیز هوموتوپی[1] اولیه که در بالا بیان شد همواره، همگرایی سری جواب معادلات غیرخطی را تضمین نمی کند. بنابراین، لیائو در ۱۹۹۷ برای غلبه به این محدودیت، پارامتر کمکی غیر صفر c_0 را معرفی کرد و خانواده ای از معادلات دو پارامتری را ساخت. یعنی معادلات تغییرشکل مرتبه ی صفرام:

$$(1-q)\,L[\phi(x;q)-u_0(x)] = c_0\,q\,N[\phi(x;q)] \qquad x\in\Omega\ ,q\in[0,1] \quad (۱۴-۱)$$

و معادله ی تغییرشکل مرتبه ی n-ام، متناظر با معادله ی (۱-۱۱) به صورت زیر تعیین شد:

$$L[u_n(x)-\chi_n\,u_{n-1}(x)] = c_0\,\delta_{n-1}(x) \quad (۱۵-۱)$$

که $\delta_k(x)$ در (۱-۱۳) تعریف شده است. در این روش، سری جواب (۱-۱۰) علاوه بر متغیر فیزیکی x به پارامتر کمکی c_0 نیز وابسته است. اگرچه پارامتر کمکی c_0 هیچ مفهوم فیزیکی ندارد اما به طور ریاضی آن را می توان به عنوان کنترل کننده و تنظیم کننده ی سرعت و ناحیه ی همگرایی در نظرگرفت. استفاده از پارامتر همگرایی c_0 یک پیشرفت بزرگ در چارچوب روش آنالیز هوموتوپی است که می تواند در روشی مناسب همگرایی سری جواب را تضمین کند. پارامتر کمکی c_0 یک آزادی ایجاد می کند، که احتمال به دست آوردن تقریب های بهتر در روش آنالیز هوموتوپی را افزایش می دهد. به همین دلیل، لیائو در ۱۹۹۹ پارامتر مصنوعی c_0 را با استفاده از معادله ی تغییرشکل مرتبه ی صفرام بیشتر معرفی می کند.

$$[1-\alpha(q)]\ L[\phi(x;q)-u_0(x)] = c_0\,\beta(q)\,N[\phi(x;q)] \qquad x\in\Omega\ ,q\in[0,1] \quad (۱۶-۱)$$

که $\alpha(q),\beta(q)$ توابع تغییرشکل[2] نامیده می شوند و در شرایط زیر صدق می کنند:

$$\alpha(0)=\beta(0)=0 \qquad , \quad \alpha(1)=\beta(1)=1 \quad (۱۷-۱)$$

و با بسط سری تیلور این توابع از پارامتر فرضی q سری آن ها به صورت زیر تعریف می شود:

[1] Homotopy analysis method (HAM)
[2] Approaching function

$$\alpha(q)=\sum_{n=1}^{+\infty}\alpha_n\, q^n \quad , \quad \beta(q)=\sum_{n=1}^{+\infty}\beta_n\, q^n \tag{۱۸-۱}$$

که برای $\left|q\right|\le 1$ همگرا هستند و معادله تغییر شکل مرتبه ی n-ام، متناظر با معادله ی تغییرشکل مرتبه ی صفرام به صورت زیر است:

$$L[u_n(x)-\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k u_{n-k}(x)]=c_0\sum_{k=1}^{n}\beta_k\delta_{n-k}(x) \tag{۱۹-۱}$$

که $\delta_k(x)$ در (۱-۱۳) تعریف شده است. به طور آشکار، تعداد نامتناهی از توابع تغییرشکل مانند آن چه در بالا تعریف شده است وجود دارد. بدین ترتیب سری تقریب بدست آمده از روش آنالیز هوموتوپی دارای درجه هایی از آزادی تصنعی است که این آزادی همگرایی سری جواب را تضمین می کند. معادله ی دیفرانسیل مربوط به $u_n(x)$ از اثر عملگر خطی L ساخته می شود و آزادی در انتخاب عملگر L این امکان را فراهم می کند که معادله ی دیفرانسیل مربوط به $u_n(x)$ به گونه ای تعریف شود که $u_n(x)$ به آسانی قابل محاسبه باشد. برای عملگر خطی کمکی و حدس اولیه دلخواه، با انتخاب پارامتر کنترل همگرایی c_0 و توابع تغییرشکل $\alpha\left(q\right),\beta\left(q\right)$ به طور مناسب، همواره می توان همگرایی سری به دست آمده از روش آنالیز هوموتوپی را تضمین کرد و در مقابل، این تضمین همگرایی برای سری جواب هوموتوپی، یک آزادی برای انتخاب عملگرخطی کمکی و حدس اولیه فراهم می کند. در روش آنالیز هوموتوپی، این نوع تضمین همگرایی، از تبدیل یک معادله ی دیفرانسیل معمولی غیرخطی با ضرایب متغیر به یک دنباله از دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی خطی با ضرایب ثابت یا تبدیل معادله دیفرانسیل جزئی غیرخطی به یک تعداد نامتناهی دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی ناشی می شود. در واقع این قبیل تضمین برای همگرایی سری جواب به اضافه ی آزادی زیاد در انتخاب عملگرهای خطی، به طور چشمگیری پیدا کردن سری های همگرا از معادلات غیرخطی، در چارچوب روش آنالیز هوموتوپی را آسان می کند. از طرف دیگر، بدون این قبیل تضمین همگرایی، در عمل هیچ آزادی درستی برای انتخاب عملگرخطی کمکی L وجود ندارد چون آزادی برای بدست آوردن سری جواب واگرا هیچ مفهومی ندارد. بنابراین برخلاف روش های آشفتگی و غیرآشفتگی قدیمی بیان شده در بخش (۱-۲) روش آنالیز هوموتوپی در هر دو استاندارد (۱) و (۲) صدق می کند.

۱-۴-۳ روش آنالیز هوموتوپی بهینه

در سال ۲۰۱۲، لیائو روش آنالیز هوموتوپی بهینه ی گسترش یافته را با پیشنهاد $\alpha\left(q\right)=q$ و یک تابع تغییرشکل خاص به صورت زیر:

$$\beta(q) = \frac{1}{c_0}\sum_{n=1}^{k} c_n q^n \tag{۱-۲۰}$$

و تعریف c_0 برای $k \geq 1$ که یک عدد صحیح و مثبت است:

$$c_0 = \sum_{n=1}^{k} c_n \neq 0 \tag{۱-۲۱}$$

معرفی کرد. با جایگذاری تعاریف بالا در معادله ی (۱-۱۶)، معادله ی تغییرشکل مرتبه ی صفرام به صورت زیر حاصل می شود:

$$(1-q)L[\phi(x;q) - u_0(x)] = (\sum_{n=1}^{k} c_n q^n) N[\phi(x,q)] \tag{۱-۲۲}$$

و متناظر با آن، معادله ی تغییرشکل مرتبه ی nام، به صورت زیر تعیین می شود:

$$L[u_n(x) - \chi_n u_{n-1}(x)] = \sum_{m=1}^{\min\{n,k\}} c_n \delta_{n-m}(x) \tag{۱-۲۳}$$

که $\delta_k(x)$ در (۱-۱۳) تعریف شده است. بنابراین، تقریب هوموتوپی مرتبه ی nام به صورت زیر به دست می آید:

$$u(x) \sim u_0(x) + \sum_{m=1}^{n} u_m(x) \tag{۱-۲۴}$$

که شامل حداکثر k پارامتر کنترل-همگرایی مجهول است.

$$c_1, c_2, c_3, \ldots, c_k \tag{۱-۲۵}$$

در این نظریه، حتی اگر n به سمت بی نهایت میل کند تعداد پارامترهای کنترل-همگرایی مجهول $c_0, c_1, \ldots, c_k$ متناهی خواهد بود. اگر $k \to \infty$ آن را روش هوموتوپی بهینه ی مجانبی می نامند و اگر $c_0 = c_1$ و برای $c_n = 0, n > 1$ روش آنالیز هوموتوپی بهینه ی پایه نامیده می شود. بنابراین روش معرفی شده، حالت کلی روش آنالیز هوموتوپی بهینه است.

۱-۵ ساختار کلی روش آنالیز هوموتوپی

در بخش های قبلی روند شکل گیری روش آنالیز هوموتوپی بیان شد. در اینجا توصیفی از ساختار کلی روش آنالیز هوموتوپی ارائه می شود. در بیش تر موارد یک مساله ی غیرخطی را می توان بوسیله ی یک معادله ی دیفرانسیل و شرایط مرزی یا اولیه توصیف کرد. برای شرح روش آنالیز هوموتوپی به اختصار معادله غیرخطی، در شکل کلی زیر در نظر گرفته می شود:

$$N[u(x,t)] = 0 \tag{۱-۲۶}$$

که N یک عملگر غیرخطی و $u(x,t)$ یک تابع مجهول از دو متغیر مستقل x,t است. اگر $u_0(x,t)$ نشان دهنده ی حدس اولیه، $h \neq 0$ پارامتر کمکی، $H(x,t) \neq 0$ تابع کمکی و L یک عملگر خطی با ویژگی های زیر باشد:

$$L[f(x,t)] = 0 \quad when \quad f(x,t) = 0 \tag{۱-۲۷}$$