۱۳۲۶
دانشگاه تبریز
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض، گرایش جبر

عنوان

بررسی متناهی بودن بعد گرنشتاین انژکتیو مدولها

اساتید راهنما
دکتر رضا نقی پور
دکتر پرویز سهندی
استاد مشاور
دکتر علی اکبر مهرورز
پژوهشگر
سوسن معظمی گودرزی

تقدیم به

پروردگارم

او که

قامت استوار پدرم را همواره عشق رفتن

و چشمان مهربان و امیدوار مادرم را شوق ماندنم قرار داد

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست. اینک که با یاری خدا نگارش این پایان‌نامه به اتمام رسیده است، بر خود لازم می‌دانم قدردان کسانی باشم که مرا مورد حمایت خویش قرار داده و تحمل مشکلات را بر من آسان نمودند.

از پدر و مادر عزیزم که همواره پشتیبان من و سبب دلگرمی و امیدم بوده‌اند، نهایت تشکر را دارم.

از راهنمایی‌های ارزنده اساتید راهنمای ارجمند، جناب آقای دکتر رضا نقی‌پور و جناب آقای دکتر پرویز سهندی که در تمام مراحل نگارش این پایان‌نامه همواره از تدبیر خردمندانه و یاری بی‌دریغشان بهره‌مند بودم، تشکر و قدردانی می‌نمایم.

از استاد مشاور محترم، جناب آقای دکتر علی اکبر مهرورز به خاطر همکاری صمیمانه‌شان سپاسگزارم.

همچنین از تمامی اساتید ارجمندی که در طی تحصیل از محضرشان کسب علم نمودم، کمال تشکر را دارم.

نام خانوادگی: معظمی گودرزی نام: سوسن

عنوان پایان‌نامه: بررسی متناهی بودن بعد گرنشتاین انژکتیو مدولها

اساتید راهنما: دکتر رضا نقی پور و دکتر پرویز سهندی

استاد مشاور: دکتر علی اکبر مهرورز

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: جبر

دانشگاه: تبریز دانشکده: علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: تعداد صفحه: ۶۶

کلیدواژه‌ها:

عمق، پهنا، بعد انژکتیو، بعد گرنشتاین انژکتیو

چکیده

در این پایان‌نامه، فرمول چوینارد برای بعد انژکتیو یک مدول روی یک حلقه نوتری به بعد گرنشتاین انژکتیو تعمیم داده شده است. بویژه اگر M یک مدول با بعد گرنشتاین انژکتیو متناهی و مثبت روی حلقه جابجایی و نوتری R باشد، در این‌صورت بعد گرنشتاین انژکتیو آن برابر با سوپریمم $\operatorname{depth} R_{\mathfrak{p}} - \operatorname{width}_{R_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}}$ است، که در آن $\mathfrak{p}$ روی مجموعه ایده‌آلهای اول R تغییر می‌کند. همچنین ثابت شده است که اگر M باتولید متناهی و ناصفر و با بعد گرنشتاین انژکتیو متناهی باشد، بعد گرنشتاین انژکتیو آن برابر با عمق حلقه است. این فرمول به عنوان تعمیمی از فرمول باس برای بعد انژکتیو در نظر گرفته می‌شود.

فهرست مطالب

فصل ۱

پیشینه پژوهش و تعاریف مقدماتی

۱.۱ مقدمه

در سال ۱۹۷۶ چوینارد [۱] یک فرمول کلی برای بعد انژکتیو مدولهای با بعد انژکتیو متناهی معرفی کرد.

فرمول چوینارد. فرض کنیم R یک حلقه و M یک R- مدول با بعد انژکتیو متناهی باشد. در این‌صورت:

$$\mathrm{id}_R M = \sup\{\mathrm{depth} R_{\mathfrak{p}} - \mathrm{width}_{R_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)\}.$$

پهنای مدول M روی حلقه موضعی $(R, \mathfrak{m}, k)$ را با نماد $\mathrm{width}_R M$ نشان می‌دهیم و تعریف می‌کنیم، $\mathrm{width}_R M = \inf\{i \mid \mathrm{Tor}_i^R(k, M) \neq 0\}$، که در آن k میدان مانده‌ای R است. این فرمول به عنوان تعمیمی از فرمول باس [۲] برای بعد انژکتیو در نظر گرفته می‌شود. باس در مقاله‌اش [۶]، ثابت می‌کند که بعد انژکتیو یک مدول باتولید متناهی و ناصفر روی یک حلقه موضعی، نامتناهی یا برابر عمق حلقه است. اهداف اصلی این پایان‌نامه، تعمیم فرمولهای باس و چوینارد برای بعد گرنشتاین انژکتیو [۳] مدولهاست. بعد گرنشتاین انژکتیو تظریفی از بعد انژکتیو یک مدول است و لذا همیشه کوچکتر یا مساوی آن می‌باشد و حالت تساوی وقتی که بعد انژکتیو متناهی است برقرار می‌باشد. این مطلب توسط ایناکس [۴] و جندا [۵] به عنوان دوگان مفهوم بعد گرنشتاین

[۱] Chouinard
[۲] Bass
[۳] Gorenstein
[۴] Enochs

که سالها پیش توسط آسلاندر [6] و بریجر [7] در [۲] بیان شده، ارائه شده است. در [۱۳]، یک فرمول چوینارد تعمیم یافته برای مدولهای با بعد گرنشتاین انژکتیو متناهی روی یک حلقه که خارج قسمتی از یک حلقه گرنشتاین است بیان شده است. تعمیم‌های متعددی از فرمول باس برای بعد گرنشتاین انژکتیو وجود دارد: روی حلقه موضعی گرنشتاین در [۱۶]، روی یک حلقه کوهن - مکالی موضعی که خارج قسمتی از یک حلقه موضعی گرنشتاین است، در [۱۱]، روی هر حلقه موضعی که خارج قسمتی از یک حلقه موضعی گرنشتاین است، در [۱۳]، و روی یک حلقه تقریباً کوهن - مکالی موضعی در [۲۵]. این پایان نامه که بر اساس مراجع [۱۰] و [۲۵] و [۲۶] می باشد، در ۳ فصل تنظیم شده است. نتایج بدست آمده، تعمیم این فرمولها برای حالتهایی که بعد گرنشتاین انژکتیو متناهی و مثبت است، می‌باشند. در سراسر این پایان‌نامه تمام حلقه‌ها یکدار، جابجایی و نوتری هستند.

[5] Jenda
[6] Auslander
[7] Bridger

۲.۱ تعاریف اولیه و نتایج مقدماتی

تعریف ۱.۲.۱. [***بعد انژکتیو محدود کوچک***] فرض کنیم R یک حلقه و N یک R- مدول باشد. بعد انژکتیو محدود کوچک N با نماد $\mathrm{rid}_R N$ نشان داده می‌شود و بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{rid}_R N = \sup_T \{m \in \mathbb{N}_0 \mid \mathrm{Ext}^m_R(T, N) \neq 0\},$$

که در آن سوپریمم روی مجموعه همه مدولهای باتولید متناهی T و با بعد پروژکتیو متناهی در نظر گرفته می‌شود. بعد انژکتیو محدود کوچک ظریفتر از بعد انژکتیو است، یعنی $\mathrm{rid}_R N \leq \mathrm{id}_R N$.

تعریف ۲.۲.۱. [***بعد یکدست محدود بزرگ***] فرض کنیم R یک حلقه و N یک R- مدول باشد. بعد یکدست محدود بزرگ N با نماد $\mathrm{Rfd}_R N$ نشان داده می‌شود و بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{Rfd}_R N = \sup\{i \in \mathbb{N}_0 \mid \mathrm{Tor}^R_i(L, N) \neq 0\},$$

که در آن سوپریمم روی مجموعه همه مدولهای با بعد یکدست متناهی L در نظر گرفته می‌شود.

تعریف ۳.۲.۱. حلقه موضعی $(R, \mathfrak{m})$ را منظم موضعی گویند، هرگاه $\mathrm{dim}R = \mathrm{dim}_{R/\mathfrak{m}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. به عبارت معادل ایده‌آل $\mathfrak{m}$ توسط $\mathrm{dim}R$ عضو تولید شود.

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه و M یک R -مدول باشد. عناصر $x_1, ..., x_n$ از R را یک M -رشته ضعیف گوییم، هرگاه به ازای هر $1 \leq i \leq n$، $x_i \notin \mathrm{Z}_R(M/(x_1, ..., x_{i-1})M)$. به علاوه اگر $(x_1, ..., x_n)M \neq M$، آنگاه $x_1, ..., x_n$ را یک M -رشته منظم یا به اختصار M -رشته می‌نامیم.

تعریف ۱.۲.۵. فرض کنیم R یک حلقه و I یک ایده‌آل از R و M یک R-مدول باشد. M-رشته ضعیف $x_1, ..., x_n$ را در I ماکسیمال گوییم، هرگاه به ازای هر $b \in I$، رشته $x_1, ..., x_n, b \in I$ یک M -رشته ضعیف نباشد. به عبارت معادل، $I \subseteq \mathrm{Z}_R(M/(x_1, ..., x_n)M)$.

لم ۱.۲.۶. *فرض کنیم R یک حلقه و M و N دو R- مدول باشند. اگر $x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{Ann}_R N$ یک M- رشته ضعیف باشد، آنگاه:*

$$\mathrm{Hom}_R(N, M/(x_1, \ldots, x_n)M) \cong \mathrm{Ext}_R^n(N, M).$$

برهان. به [۱۸]، گزاره [۹.۲.۷] مراجعه شود. □

لم ۱.۲.۷. *فرض کنیم R یک حلقه و $x_1, ..., x_n \in R$ یک R- رشته باشد. در این‌صورت*

$$\mathrm{pd}_R(R/(x_1, ..., x_n)) = n.$$

برهان. حکم را با استقرا روی n ثابت می‌کنیم. فرض می‌کنیم $n = 1$ و رشته دقیق $0 \longrightarrow R \xrightarrow{x_1} R \longrightarrow R/(x_1) \longrightarrow 0$ را در نظر می‌گیریم. چون $R/(x_1)$ پروژکتیو نیست، $\mathrm{pd}_R(R/(x_1)) \neq 0$ و در نتیجه $\mathrm{pd}_R(R/(x_1)) = 1$. حال فرض کنیم حکم برای $n-1$ برقرار باشد، یعنی $\mathrm{pd}_R(R/(x_1, ..., x_{n-1})) = n-1$، حکم را برای n ثابت می‌کنیم. رشته دقیق زیر را در نظر می‌گیریم،

$$0 \longrightarrow R/(x_1, ..., x_{n-1}) \xrightarrow{x_n} R/(x_1, ..., x_{n-1}) \longrightarrow R/(x_1, ..., x_n) \longrightarrow 0.$$

لذا رشته دقیق زیر حاصل می‌شود:

$$\cdots \to \mathrm{Ext}_R^n(R/(x_1, ..., x_{n-1}), B) \to \mathrm{Ext}_R^{n+1}(R/(x_1, ..., x_n), B)$$

$$\to \operatorname{Ext}_R^{n+1}(R/(x_1,...,x_{n-1}),B) \xrightarrow{x_1} \operatorname{Ext}_R^{n+1}(R/(x_1,...,x_{n-1}),B) \to \cdots .$$

در نتیجه به ازای هر R-مدول B و هر $i \geq 1$، $\operatorname{Ext}_R^{n+i}(R/(x_1,...,x_n),B) = 0$. بنابراین $\operatorname{pd}_R(R/(x_1,...,x_n)) \leq n$. نشان می‌دهیم $\operatorname{Ext}_R^n(R/(x_1,...,x_n),B) \neq 0$.

بنا به لم ۶.۲.۱، داریم:

$$\operatorname{Ext}_R^n(R/(x_1,...,x_n),R) \cong \operatorname{Hom}_R(R/(x_1,...,x_n),R/(x_1,...,x_n)).$$

همچنین $\operatorname{Hom}_R(R/(x_1,...,x_n),R/(x_1,...,x_n)) \cong R/(x_1,...,x_n) \neq 0$. لذا حکم بدست می‌آید. $\square$

تعریف ۸.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه و M یک R-مدول باتولید متناهی و ناصفر و I یک ایده‌آل از R باشد، بطوریکه $IM \neq M$. در این‌صورت طول مشترک تمام M-رشته‌های ماکسیمال در I را M-درجه یا درجه I روی M گویند و آنرا با نماد $\operatorname{grade}(I,M)$ یا $\operatorname{depth}(I,M)$ نشان می‌دهیم. اگر $M = R$، به ازای هر ایده‌آل سره I از R به جای نماد $\operatorname{grade}(I,M)$ از نماد $\operatorname{grade} I$ استفاده می‌کنیم. ثابت شده است که:

$$\operatorname{depth}(I,M) = \min\{n \in \mathbb{N}_0 \mid \operatorname{Ext}_R^n(R/I,M) \neq 0\}.$$

تعریف ۹.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه و I یک ایده‌آل از R و M یک R-مدول باشد. پهنای M نسبت به I را با نماد $\operatorname{width}(I,M)$ نشان می‌دهیم و تعریف می‌کنیم:

$$\operatorname{width}(I,M) := \min\{i \in \mathbb{N}_0 \mid \operatorname{Tor}_i^R(R/I,M) \neq 0\}.$$

اگربه ازای هر i، $\operatorname{Tor}_i^R(R/I,M) = 0$، تعریف می‌کنیم $\operatorname{width}(I,M) = \infty$.

لم ۱.۲.۱۰. *فرض کنیم R یک حلقه و M یک R-مدول باشد. در این‌صورت:*

$$\mathrm{rid}_R M = \sup\{\mathrm{depth}(\mathfrak{p}, R) - \mathrm{width}(\mathfrak{p}, M) \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec(R)}\}.$$

برهان. به [۱۲]، گزاره [۵.۳] مراجعه شود. □

لم ۱.۲.۱۱. *فرض کنیم R یک حلقه و M یک R-مدول باشد. در این‌صورت:*

$$\mathrm{Rfd}_R M = \sup\{\mathrm{depth} R_{\mathfrak{p}} - \mathrm{depth}_{R_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)\}.$$

برهان. به [۱۲]، قضیه [۲.۴] مراجعه شود. □

لم ۱.۲.۱۲. *فرض کنیم R یک حلقه باشد. برای هر R-مدول M داریم، $\mathrm{Rfd}_R M \leq \mathrm{fd}_R M$. اگر $\mathrm{fd}_R M < \infty$، تساوی برقرار است.*

برهان. به [۱۲]، قضیه [۲.۵] مراجعه شود. □

تعریف ۱.۲.۱۳. فرض کنیم R یک حلقه و $\mathfrak{a}$ یک ایده‌آل از R باشد. به ازای هر R- مدول M، قرار می‌دهیم:

$$\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = \{x \in M \mid \exists n \in \mathbb{N} \quad , \quad \mathfrak{a}^n x = 0\} = \cup_{n=1}^{\infty} (0 :_M \mathfrak{a}^n).$$

واضح است که $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ زیر مدولی از M است. اگر $f : M \longrightarrow N$ یک R -هomomorفیسم باشد، آنگاه $f(\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)) \subseteq \Gamma_{\mathfrak{a}}(N)$. لذا $f \mid_{\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)}: \Gamma_{\mathfrak{a}}(M) \longrightarrow \Gamma_{\mathfrak{a}}(N)$. $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$ یک فانکتور همورد و جمعی از رسته R-مدولها و R -همومورفیسم ها به خودش است. به ازای هر R -همومورفیسم $f : M \longrightarrow N$، قرار می‌دهیم $\Gamma_{\mathfrak{a}}(f) = f \mid_{\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)}$. به ازای هر $n \geq 0$، n-امین فانکتور مشتق شده راست این فانکتور را با نماد $\mathrm{H}^n_{\mathfrak{a}}(-)$ نشان می‌دهیم و آن را n-امین فانکتور کوهمولوژی موضعی می‌نامیم.

تعریف ۱.۲.۱۴. ***[تحلیل انژکتیو کامل]*** فرض کنیم R یک حلقه باشد. همبافت دقیق

$$\mathbf{I}: \cdots \longrightarrow I_2 \longrightarrow I_1 \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_{-1} \longrightarrow \cdots,$$

از R-مدولها را یک تحلیل انژکتیو کامل نامیم، هرگاه I_i ها انژکتیو باشند و به ازای هر R- مدول انژکتیو J، همبافت $\mathrm{Hom}_R(J,\mathbf{I})$ دقیق باشد.

تعریف ۱.۲.۱۵. فرض کنیم M یک زیر مدول از مدول انژکتیو E باشد. E را توسیع انژکتیو M گوییم. بعلاوه اگر به ازای هر زیر مدول N از E، از $N \cap M = 0$ نتیجه شود که $N = 0$، این توسیع را توسیع اساسی و انژکتیو M گوییم و آنرا پوش انژکتیو M می‌نامیم.

تعریف ۱.۲.۱۶. فرض کنیم $(R,\mathfrak{m},k)$ یک حلقه موضعی و M یک R -مدول باشد. دوگان ماتلیس R - مدول M عبارتست از: $M^v = \mathrm{Hom}_R(M, E_R(k))$، که در آن $E_R(k)$ پوش انژکتیو k است.

تعریف ۱.۲.۱۷. فانکتور T را دقیق باوفا گوییم، هرگاه رشته $T(A) \overset{T(f)}{\to} T(B) \overset{T(g)}{\to} T(C)$ (در حالت پادورد $T(C) \overset{T(g)}{\to} T(B) \overset{T(f)}{\to} T(A)$) دقیق است، اگر و تنها اگر رشته $A \overset{f}{\to} B \overset{g}{\to} C$ دقیق باشد.

تعریف ۱.۲.۱۸. فرض کنیم R یک حلقه و $V(-) = \mathrm{Hom}_R(-,Q)$ یک فانکتور پادورد باشد. R-مدول Q را انژکتیو باوفا گوییم، هرگاه $V(-)$ دقیق باوفا باشد.

تعریف ۱.۲.۱۹. فرض کنیم R یک حلقه و M یک R -مدول باشد. M را یکدست باوفا گوییم، هرگاه یکدست باشد و از $M \otimes_R N = 0$ نتیجه شود که $N = 0$.

تعریف ۲۰.۲.۱. فرض کنیم R و S دو حلقه باشند. حلقه S همراه با همومورفیسم $f : R \to S$ را یک R - جبر می‌نامیم. حال اگر حلقه S به عنوان R -جبر یکدست باشد، همومورفیسم فوق را یکدست می‌نامیم.

تعریف ۲۱.۲.۱. فرض کنیم $(R, \mathfrak{m})$ و $(S, \mathfrak{n})$ دو حلقه موضعی و $f : R \to S$ یک همومورفیسم حلقه‌ها باشد. f را همومورفیسم موضعی گوییم، هرگاه $f(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{n}$. به عبارت معادل طبق تعریف ۱۹.۲.۱، f یکدست یا یکدست باوفا باشد.

لم ۲۲.۲.۱. *فرض کنیم R یک حلقه و M یک R-مدول باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

(۱) M *یکدست باوفاست.*

(۲) M *یکدست است و به ازای هر R-مدول نا صفر N، $N \otimes_R M \neq 0$.*

(۳) M *یکدست است و به ازای هر ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ از R، $\mathfrak{m}M \neq M$.*

برهان. به [۲۸]، قضیه [۷.۲] مراجعه شود. □

لم ۲۳.۲.۱. *فرض کنیم R یک حلقه و M یک R -مدول باشد. M یکدست است اگر و تنها اگر به ازای هر ایده‌آل I از R، همومورفیسم $I \otimes_R M \to R \otimes_R M$ یک به یک باشد. به علاوه $I \otimes_R M \cong IM$.*

برهان. به [۲۸]، قضیه [۷.۷] مراجعه شود. □

لم ۲۴.۲.۱. *فرض کنیم R یک حلقه و M یک R-مدول باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

(۱) M یکدست است.

(۲) به ازای هر R -مدول N، $\operatorname{Tor}_1^R(M,N)=0$.

(۳) به ازای هر ایده‌آل I از R، $\operatorname{Tor}_1^R(M,R/I)=0$.

برهان. به [۲۸]، قضیه [۷.۸] مراجعه شود. □

تعریف ۲۵.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه و M یک R -مدول باشد. گوییم M با نمایش متناهی است، هرگاه R -مدولهای آزاد F و F' با پایه‌های متناهی موجود باشند، بطوریکه رشته

$$F \longrightarrow F' \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

دقیق باشد.

لم ۲۶.۲.۱. *فرض کنیم R یک حلقه و M و N دو R-مدول و B یک R- جبر یکدست باشد. اگر M با نمایش متناهی باشد، آنگاه*

$$\operatorname{Hom}_R(M,N)\otimes_R B=\operatorname{Hom}_B(M\otimes_R B, N\otimes_R B).$$

برهان. به [۲۸]، قضیه [۷.۱۱] مراجعه شود. □

تعریف ۲۷.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه و I ایده‌آلی از آن باشد. زنجیری از ایده‌آلها بصورت $I \supset I^2 \supset I^3 \supset \dots$ موجود است و $f_{ij} : R/I^j \longrightarrow R/I^i$ که $i \leq j$، با ضابطه $f_{ij}(x+I^j)=x+I^i$ تعریف می‌شود، یک R -همومورفیسم است. بنابراین $(\{R/I^i\},\{f_{ij}\})$ یک دستگاه معکوس از R -مدولها و R- همومورفیسم می‌باشد. ثابت شده است که:

$$\lim_{\leftarrow} R/I^i=\{(x+I,x_2+I^2,\dots)\mid x_i+I^i=f_{ii+1}(x_{i+1}+I^{i+1})\}$$

$$= \{(x+I, \ldots) \mid x_i \equiv x_{i+1} \ modI^i\}.$$

$\{x+I^i\}$ پایه یک توپولوژی روی R است، زیرا R را می‌پوشاند و اگر $z \in (x+I^i)\cap(y+I^j)$، آنگاه $z + I^k = (x+I^i) \cap (y+I^j)$ که $k = \max\{i,j\}$. توپولوژی تولید شده توسط $\{x+I^i\}$ را توپولوژی I -ادیک می‌نامیم. دنباله $\{x_n\}$ از اعضای R نسبت به این توپولوژی کوشی نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر عدد صحیح و نامنفی k، n_0 ی موجود باشد بطوریکه به ازای هر $i \geq n_0$، $x_{i+1} - x_i \in I^k$. گوییم این دنباله به $x \in R$ همگراست، هرگاه به ازای هر عدد صحیح نامنفی k، n_0 ی موجود باشد بطوریکه $x_n - x \in I^k$، وقتی $n \geq n_0$. حال فرض کنیم C مجموعه تمام دنباله‌های کوشی در R نسبت به این توپولوژی باشد، جمع و ضرب اسکالر در C را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\{x_n\} + \{y_n\} = \{x_n + y_n\} \qquad \text{و} \qquad r\{x_n\} = \{rx_n\}\ , \quad r \in R,$$

واضح است که C یک R -مدول است. مجموعه تمام دنباله‌های کوشی همگرا به صفر را با C_0 نشان می‌دهیم که زیر مدولی از C است. مدول خارج قسمتی C/C_0 را I-کمال R گوییم و با نماد $\hat{R}$ نشان می‌دهیم.

لم ۲۸.۲.۱. *فرض کنیم R یک حلقه و I یک ایده‌آل از R و $\hat{R}$، I-تکمیل R باشد. برای هر R-مدول باتولید متناهی M هomomورفیسم $\hat{R} \otimes_R M \longrightarrow \hat{M}$ یک ایزومورفیسم است.*

برهان. به [۱]، گزاره [۱۰.۱۳] مراجعه شود. $\square$

لم ۲۹.۲.۱. *فرض کنیم R یک حلقه و $\mathfrak{a}$ یک ایده‌آل R و $\hat{R}$، $\mathfrak{a}$-تکمیل R باشد. در این‌صورت $\hat{\mathfrak{a}} \cong \hat{R} \otimes_R \mathfrak{a}$.*

برهان. به [۱]، گزاره [۱۰.۱۵] مراجعه شود. $\square$

لم ۳۰.۲.۱. *فرض کنیم R یک حلقه و I ایده‌آلی از آن و $\hat{R}$، I-تکمیل R باشد. در این‌صورت $\hat{R}$ روی R یکدست است.*

برهان. طبق لم ۲۳.۲.۱، کافیست نشان دهیم هومومورفیسم $\mathfrak{a} \otimes_R \hat{R} \longrightarrow \hat{R}$ برای هر ایده‌آل $\mathfrak{a}$ از R یک به یک است. اما $\mathfrak{a} \otimes_R \hat{R} = \hat{\mathfrak{a}}$ و هومومورفیسم $\hat{\mathfrak{a}} \longrightarrow \hat{R}$ یک به یک است. لذا $\hat{R}$ روی R یکدست است. □

لم ۳۱.۲.۱. *فرض کنیم $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی و M یک R-مدول باتولید متناهی و ناصفر باشد. در این‌صورت:*

$$\mathrm{depth} M \leq \mathrm{dim} M.$$

برهان. به [۳۱]، تبصره [۱۶.۳۰] مراجعه شود. □

تعریف ۳۲.۲.۱. فرض کنیم R حلقه موضعی و M یک R-مدول باتولید متناهی و ناصفر باشد. گوییم M کوهن-مکالی است، هرگاه $\mathrm{depth} M = \mathrm{dim} M$. حال اگر حلقه R را به عنوان R-مدول در نظر بگیریم، R را کوهن-مکالی گوییم، هرگاه $\mathrm{depth} R = \mathrm{dim} R$.

تعریف ۳۳.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه و M یک R-مدول باشد. $x \in R$ را یک عضو M-منظم نامیم، هرگاه x یک مقسوم علیه صفر روی M نباشد.

لم ۳۴.۲.۱. *فرض کنیم $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی و $\hat{R}$، $\mathfrak{m}$-تکمیل آن باشد. در این‌صورت:*

$$\mathrm{depth} R = \mathrm{depth} \hat{R}.$$

برهان. طبق لم ۲۶.۲.۱ داریم:

$$\mathrm{Ext}^i_R(R/\mathfrak{m}, R) \otimes_R \hat{R} \cong \mathrm{Ext}^i_{\hat{R}}(\hat{R}/\mathfrak{m}\hat{R}, \hat{R})$$

وصفر شدن یک طرف معادل صفر شدن طرف دیگر است، لذا حکم بدست می‌آید. □

تعریف ۳۵.۲.۱. *[اعداد باس]* [۸] فرض کنیم R یک حلقه و M یک R-مدول با تولید متناهی و $\mathfrak{p}$ یک ایده‌آل اول از R باشد. عدد(متناهی)

$$\mu_i(\mathfrak{p}, M) = \dim_{k(\mathfrak{p})} \mathrm{Ext}^i_{R_\mathfrak{p}}(k(\mathfrak{p}), M_\mathfrak{p})$$

را i-امین عدد باس برای M نسبت به $\mathfrak{p}$ می‌نامیم.

تعریف ۳۶.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه و M یک R -مدول باتولید متناهی باشد. گوییم M به کلاس G که با نماد $\mathrm{G}(R)$ نمایش داده می‌شود، متعلق است اگر و تنها اگر:

(۱) به ازای هر $m > 0$، $\mathrm{Ext}^m_R(M, R) = 0$؛

(۲) به ازای هر $m > 0$، $\mathrm{Ext}^m_\mathrm{R}(\mathrm{Hom_R(M, R), R}) = 0$؛

(۳) نگاشت $\delta_M : M \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(M, R), R)$ یک ایزومورفیسم باشد.

تعریف ۳۷.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد. یک G-تحلیل برای R-مدول باتولید متناهی M، یک رشته دقیق به‌صورت:

$$\cdots \longrightarrow G_l \longrightarrow G_{l-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow G_1 \longrightarrow G_0 \longrightarrow 0,$$

است که در آن به ازای هر $i \geq 0$، $G_i \in \mathrm{G}(R)$ و $M \cong G_0/\mathrm{Im}(G_1 \longrightarrow G_0)$. رشته دقیق

$$\cdots \longrightarrow G_l \longrightarrow G_{l-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow G_1 \longrightarrow G_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

موجود است. گوییم طول این رشته n است، اگر $G_n \neq 0$ و به ازای هر $l > n$، $G_l = 0$.

[۸] Bass numbers

تعریف ۳۸.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه و M یک R-مدول باتولید متناهی باشد. گوییم بعد گرنشتاین M متناهی است و می‌نویسیم $\mathrm{G}-\dim_R M<\infty$، هرگاه یک G-تحلیل با طول متناهی برای M موجود باشد.

بر حسب قرارداد، $\mathrm{G}-\dim_R 0=-\infty$.

برای $n\in\mathbb{N}$، گوییم بعد گرنشتاین M حداکثر n است و می‌نویسیم $\mathrm{G}-\dim_R M\leq n$، هرگاه یک G-تحلیل با طول n برای M موجود باشد. اگر چنین تحلیل برای M موجود نباشد، بعد گرنشتاین آن نامتناهی است، یعنی $\mathrm{G}-\dim_R M=\infty$.

لم ۳۹.۲.۱. *فرض کنیم R یک حلقه و S یک زیر مجموعه بسته ضربی از R باشد. به ازای هر ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ از R، که $\mathfrak{p}\cap S=\emptyset$،*

$\mathrm{ht}_R\mathfrak{p}=\mathrm{ht}_{S^{-1}R}S^{-1}\mathfrak{p}$، *بویژه* $\mathrm{ht}\mathfrak{p}=\mathrm{ht}\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}=\dim R_{\mathfrak{p}}$.

برهان. از اینکه ایده‌آلهای اول R و آن دسته از ایده‌آلهای اول $S^{-1}R$ که با S اشتراک ندارند در تناظر یک به یک هستند، حکم بدست می‌آید. □

قضیه ۴۰.۲.۱. **[*لم ناکایاما*]** *فرض کنیم R یک حلقه و I ایده‌آلی از آن باشد بطوریکه $I\subseteq \mathrm{J}(R)$. اگر M یک R-مدول باتولید متناهی باشد، بطوریکه $IM=M$، آنگاه $M=0$.*

برهان. به [۳۱]، لم [۸.۲۴] مراجعه شود. □

فصل ۲

تعمیم فرمول چوینارد از بعد انژکتیو به بعد گرنشتاین انژکتیو

۱.۲

فرمول چوینارد . فرض کنیم R یک حلقه و M یک R-مدول با بعد انژکتیو متناهی باشد. در این‌صورت

$$\mathrm{id}_R M = \sup\{\mathrm{depth} R_{\mathfrak{p}} - \mathrm{width}_{R_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)\}.$$

در [۱۱]، گزاره [۶.۲.۶] ثابت شده است که بعد گرنشتاین انژکتیو یک تظریف از بعد انژکتیو است که همیشه کوچکتر یا مساوی آن است و تساوی وقتی که بعد انژکتیو متناهی است، برقرار می‌باشد.

در این فصل ابتدا فرمول چوینارد برای بعد انژکتیو و سپس تعمیم آن به بعد گرنشتاین انژکتیو یک مدول بررسی شده است.

لم ۱.۱.۲. *فرض کنیم R یک حلقه و M یک R-مدول باشد. در این‌صورت $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R M$، اگر و تنها اگر زیر مدولی از M مانند N موجود باشد، بطوریکه $N \cong R/\mathfrak{p}$.*

برهان. به [۳۱]، تبصره [۹.۳۳] مراجعه شود. □

لم ۲.۱.۲. *فرض کنیم R یک حلقه و M یک R-مدول باتولید متناهی و ناصفر باشد. در این‌صورت زنجیری از زیر مدولهای M به‌صورت*

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n = M,$$

وجود دارد، بطوریکه به ازای هر $0 \leq i \leq n$، یک ایده‌آل اول چون $\mathfrak{p}_i$ از R موجود است که $M_i/M_{i-1} \cong R/\mathfrak{p}_i$.

برهان. به [۲۸]، قضیه [۶.۴] مراجعه شود. □

لم ۳.۱.۲. *فرض کنیم R یک حلقه و M یک R-مدول و N یک R-مدول باتولید متناهی و $n > 0$ یک عدد صحیح باشد. اگر برای هر ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ از R، بطوریکه $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}_R(N)$، $\mathrm{Ext}^n_R(R/\mathfrak{p}, M) = 0$، آنگاه $\mathrm{Ext}^n_R(N, M) = 0$.*

برهان. به [۸]، لم [۳.۱.۱۱] مراجعه شود. □

لم ۴.۱.۲. *فرض کنیم R یک حلقه و M یک R-مدول باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

(۱) $\mathrm{id}_R(M) \leq n$.

(۲) *برای هر ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ از R،* $\mathrm{Ext}^{n+1}_R(R/\mathfrak{p}, M) = 0$.

برهان. به [۸]، نتیجه [۳.۱.۱۲] مراجعه شود. □