دانشگاه سمنان

دانشکده ریاضی و آمار و علوم کامپیوتر

رساله برای دریافت درجه دکتری ریاضی محض(آنالیز)

φ-میانگین‌پذیری جبرهای باناخ

توسط:

سیده سمانه جوادی سیاهکله

استاد راهنما:

دکتر علی غفاری

استاد مشاور:

دکتر رضا معمارباشی

بهمن ۹۲

به همراهان همیشگی زندگی ام:

به نازنین پدرم که در مکتب مهربانی اش درس سبز اندیشیدن و خوب زندگی کردن آموختم

و به مهربان مادرم که در مدرسه عشق و بردباری اش مشق صبر نوشتم و هنر نیک زیستن را تجربه کردم.

سپاس‌گزاری...

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ جناب آقای دکتر غفاری، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید. بر خود لازم می‌دانم از استاد مشاورم دکتر معمارباشی و از داوران رساله‌ام دکتر رجبعلی کامیابی گل، دکتر محمود بیدخام و دکتر فریدون حبیبیان که با دقت این رساله را خوانده و نکات با ارزشی را برای بهتر شدن محتوای آن پیشنهاد کرده‌اند، قدردانی کنم.
بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از خواهران عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

سیده سمانه جوادی سیاهکله
بهمن ۹۲

چکیده

در این رساله به مطالعه مفهوم φ -میانگین‌پذیری جبر باناخ A می‌پردازیم که φ یک تابعک خطی ضربی ناصفر روی A است. نتایجی پیرامون جبرهای باناخ φ -میانگین‌پذیر ارائه می‌دهیم و شرط‌های لازم و کافی برای اینکه A^{**} دارای φ -میانگین پایای چپ با نرم یک باشد را بدست می‌آوریم. هدف بعدی ما ارائه مشخصه‌های وجود φ -میانگین پایای چپ (راست) روی $WAP(A)$ است. نتایج دیگری نیز در این زمینه بدست آمده است.

فرض کنیم $\{a_\alpha\}_{\alpha\in I}$ یک تور کراندار در جبر باناخ A باشد. به مطالعه این موضوع می‌پردازیم که چه زمانی $\|aa_\alpha - \varphi(a)a_\alpha\|$ روی مجموعه‌های فشرده ضعیف از A به صفر همگرای یکنواخت است. نشان می‌دهیم جبرهای گروهی $L^1(G)$ و جبرهای سگال پاسخگوی سوال ما هستند. همچنین نشان داده شده است $WAP(A)^*$، یک φ -میانگین پایای چپ دارد اگر و تنها اگر تور کراندار $\{a_\alpha\}_{\alpha\in I}$ در $\{a\in A;\ \varphi(a)=1\}$ موجود باشد که $\|aa_\alpha - \varphi(a)a_\alpha\|_{WAP(A)}$ روی مجموعه‌های فشرده ضعیف به صفر همگرای یکنواخت باشد.

در راستای تعمیم کنز میانگین‌پذیری و φ -میانگین‌پذیری، مفهوم φ -کنز میانگین‌پذیری جبر باناخ دوگان A با پیش‌دوگان A_* را مطالعه می‌کنیم که در اینجا φ همریختی از A به روی $\mathbb{C}$ است که در A_* قرار دارد. مشخصه‌های مختلفی از φ -کنز میانگین‌پذیری آورده شده است. همچنین ثابت می‌کنیم که اگر $l^1(S)$ یک جبر نیم‌گروهی حذفی ضعیف یکدار باشد، گزاره‌های زیر معادلند:

(الف) S، χ - میانگین‌پذیر است.

(ب) $l^1(S)$، $\hat{\chi}$ -کنز میانگین‌پذیر است.

(ج) $l^1(S)$ قطر واقعی $\hat{\chi}$ -نرمال دارد.

کلمات کلیدی:

جبر باناخ، جبر نیم‌گروهی، میانگین‌پذیری، کنز میانگین‌پذیری، φ- میانگین‌پذیری، مشتق، φ- میانگین، A- دومدول، تابعک‌های تقریبا متناوب ضعیف، واحد تقریبی کراندار.

فهرست مطالب

مقدمه

در سال ۱۹۰۴ لبگ [۱] یک لیست از ویژگی‌های انتگرالش روی $\mathbb{R}$ را ارائه داد [۴۲]. همه این ویژگی‌ها جز یک ویژگی، ویژگی‌های مقدماتی انتگرال ریمان بودند. این ویژگی خاص یک نسخه از قضیه همگرایی یکنوا بود. لبگ این سوال را مطرح کرد که آیا انتگرال لبگ بدون ویژگی همگرایی یکنوا باز هم منحصربفرد است؟ ویژگی همگرایی یکنوا هم‌ارز با ویژگی جمعی شمارا بودن انتگرال لبگ است. در واقع سوال لبگ به این صورت بیان شد: اگر شرط همگرایی یکنوا با اندازه جمعی متناهی جایگزین شود، در این صورت آیا انتگرال لبگ منحصربفرد است؟
در سال‌های ۱۹۲۰ تا ۱۹۳۰، مسئله وجود اندازه پایای جمعی متناهی توسط باناخ [۲] و تارسکی [۳] بررسی شد و تارسکی نشان داد این معادل با این است که یک تجزیه متناقض برای گروه فشرده موضعی G موجود نباشد [۴]. مسئله می‌تواند به این صورت بیان شود که آیا اندازه احتمال جمعی متناهی روی G هست که تحت عمل G پایا باشد. به عبارت دیگر برای هر زیرمجموعه متناهی E از G و هر $a \in G$، $\mu(aE) = \mu(E)$. در راستای مطالعه قضیه باناخ-تارسکی فون‌نویمان [۴] کلاس گروه‌های میانگین‌پذیر را معرفی کرد [۴۶]، [۴۵].
دوره کلاسیک بررسی وجود اندازه پایای جمعی متناهی تا سال ۱۹۴۰ ادامه داشت و پس از آن وارد دوره مدرن شد. در دوره مدرن مسئله از انتگرال‌گیری اندازه جمعی متناهی روی G با $\mu(G) = ۱$ به میانگین روی G تغییر یافت. به عبارت دیگر وجود تابعک خطی و پیوسته روی $l^\infty(G)$ به طوری که $\|m\| = \langle m, ۱\rangle = ۱$ و ارتباط بین μ و m به صورت $\mu(E) = m(\chi_E)$ است. این تغییر از اهمیت اساسی برخوردار است. چرا که مطالعه میانگین‌پذیری را از دیدگاه آنالیز تابعی و آنالیز هارمونیک مجرد فراهم می‌سازد. تعریف فون‌نویمان به زبان میانگین‌ها ترجمه شد و تعریف آشنای گروه میانگین‌پذیر ارائه شد. تغییر اندازه به میانگین و واژه میانگین‌پذیر به دی [۵] نسبت داده شده است [۱۴]. با نگاهی به روند گسترش این تئوری می‌توان دریافت که نقش موثر وی در این فرایند غیرقابل انکار است. گروه G میانگین‌پذیر است اگر و تنها اگر یک میانگین روی G موجود باشد که برای هر $\phi \in l^\infty(G)$ و $y \in G$، $\langle m, L_y\phi\rangle = \langle m, \phi\rangle$. این تعریف برای نیم‌گروه‌ها نیز بکار می‌رود و نیم‌گروهی که دارای میانگین پایای چپ باشد را میانگین‌پذیر چپ نامیم [۴۱].
یکی از شگردهای زیبای میانگین‌پذیری برد وسیع آن در ریاضیات است. شگرد دیگر آن انعطاف‌پذیری بالای این تئوری برای کارآمدی در شاخه‌های دیگر است. میانگین‌پذیری فراتر از پدیده‌ای است که آنالیزدانان به آن علاقمندند. یکی از مثال‌های خوب عبور تئوری میانگین‌پذیری در شاخه‌های ریاضیات تئوری جبرهای باناخ میانگین‌پذیر است که توسط جانسون [۶] ارائه شد [۳۴]. جبر باناخ A را میانگین‌پذیر

[۱] Lebesgue
[۲] Banach
[۳] Tarski
[۴] Von Neumann
[5] Day
[۶] Johnson

گوییم هرگاه اولین گروه کوهمولوژی $\mathcal{A}$ با ضرایب در $\mathcal{A}$ -مدول باناخ X^* صفر شود. این به این معنی است که هر مشتق $D : \mathcal{A} \to X^*$ درونی باشد. در نگاه اول به نظر نمی‌رسد که هیچ ارتباطی بین میانگین‌های پایا و مشتق‌ها موجود باشد. با این وجود جانسون نشان داد که G میانگین‌پذیر است اگر و تنها اگر جبر باناخ $L^1(G)$ میانگین‌پذیر باشد. مفهوم میانگین‌پذیری ضعیف جبرهای باناخ جابجایی توسط بید، [۷] دیلز، [۸] کورتیس [۹] در [۲] معرفی شد و جانسون آن را به جبرهای باناخ ناجابجایی توسیع داد [۳۵]. به این صورت که جبر باناخ $\mathcal{A}$ را میانگین‌پذیر ضعیف نامید اگر هر مشتق $D : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^*$ درونی باشد. میانگین‌پذیری تقریبی، میانگین‌پذیری انقباضی و میانگین‌پذیری اساسی توسط قهرمانی [۱۰] و لوی [۱۱] در [۲۷] معرفی شده‌اند. پس از آن مفاهیمی چون شبه میانگین‌پذیری، شبه میانگین‌پذیری تقریبی، میانگین‌پذیری انقباضی و شبه میانگین‌پذیری انقباضی، میانگین‌پذیری تقریبی ضعیف ستاره، میانگین‌پذیری تقریبی کراندار و میانگین‌پذیری تقریبی دنباله‌ای و... در [۷]، [۱۱]، [۲۹]،[۳۰] معرفی و توسیع یافت.
یکی از عمیق‌ترین نتایج در تئوری میانگین‌پذیری قضیه کنز [۱۲] درباره میانگین‌پذیری C^* -جبرهاست. در راستای توسیع تئوری میانگین‌پذیری جانسون برای C^* -جبرها واسرمان [۱۳] نشان داد که یک جبر فون‌نویمان میانگین‌پذیر است اگر و تنها اگر زیر همگن باشد [۶۰]. این قضیه و برهان آن باعث شد تا به منظور دستیابی به یک تئوری غنی برای جبرهای فون‌نویمان نسخه جدیدی از میانگین‌پذیری جانسون برای جبرهای فون‌نویمان ارائه شود. هلمسکی [۱۴] این نسخه از میانگین‌پذیری را کنز میانگین‌پذیری نامید. رونده [۱۵] به تعمیم این موضوع روی جبرهای باناخ دوگان پرداخت و کنز میانگین‌پذیری جبرهای باناخ دوگان را تعریف کرد [۵۲].
جبرهایی مانند جبر گروهی $L^1(G)$ و جبرهای فوریه دارای این ویژگی‌اند که پیش‌دوگان یک W^* -جبر M اند که همانی η از M تابعک خطی ضربی روی آن است. لائو [۱۶] این دسته از جبرها را تحت عنوان F -جبر معرفی و میانگین‌پذیری چپ F -جبرها را تعریف کرد [۴۰]. به این صورت که گروه کوهمولوژی را برای $\mathcal{A}$ -مدول‌های باناخ X که ضرب آنها به صورت $a.x = \eta(a)x$ است در نظر گرفت. لائو نشان داد که میانگین‌پذیری چپ F -جبر $\mathcal{A}$ معادل با وجود $m \in P_1(\mathcal{A}^{**})$ است به طوری که برای هر $a \in P_1(\mathcal{A})$ و $f \in \mathcal{A}^*$، $\langle m, f.a\rangle = \langle m, f\rangle$ که $P(\mathcal{A})$ مخروط تابعک‌های مثبت در $\mathcal{A}$ و $P_1(\mathcal{A}) = \{a \in P(\mathcal{A}) : a(\eta) = 1\}$.
لائو، کانیوث [۱۷] و پیم [۱۸] میانگین‌پذیری چپ F -جبرها را به جبرهای باناخ تعمیم دادند [۳۸]،[۳۷].

[۷] Bade
[۸] Dales
[۹] Curtis
[۱۰] Ghahramani
[۱۱] Loy
[۱۲] Connes
[۱۳] Wassermann
[۱۴] Helemskii
[۱۵] Runde
[۱۶] Lau
[۱۷] Kaniuth
[۱۸] Pym

به این صورت که برای هر $\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$ جبر باناخ $\mathcal{A}$ را φ -میانگین‌پذیر نامیدند هرگاه φ -میانگین پایای چپ روی $\mathcal{A}^*$ موجود باشد. به عبارت دیگر $m \in \mathcal{A}^{**}$ موجود باشد که برای هر $f \in \mathcal{A}^*$ و $a \in \mathcal{A}$، $\langle m, f.a\rangle = \varphi(a)\langle m, f\rangle$. در واقع با این تعریف F -جبر $\mathcal{A}$ میانگین‌پذیر چپ است اگر و تنها اگر $\mathcal{A}$، η -میانگین‌پذیر باشد. همچنین گروه G میانگین‌پذیر است اگر و تنها اگر $L^1(G)$، ۱-میانگین‌پذیر باشد. φ -میانگین‌پذیری ضعیف‌تر از میانگین‌پذیری جانسون است. لائو و همکارانش نشان دادند که φ -میانگین‌پذیری جبر باناخ $\mathcal{A}$ معادل با این است که اولین گروه کوهمولوژی برای $\mathcal{A}$ -مدول باناخ خاص X که ضرب مدولی آن به صورت $a.x = \varphi(a)x$ است صفر شود.
محور اصلی این پژوهش φ -میانگین‌ها روی فضاهای باناخ است. در فصل اول قضیه و تعریف‌هایی را می‌آوریم که در فصل‌های بعد از آنها استفاده می‌شود. در فصل دوم به φ -میانگین‌های پایا روی $WAP(\mathcal{A})$ و φ -میانگین‌های پایا با نرم یک می‌پردازیم. وجود φ -میانگین پایا روی $WAP(\mathcal{A})$ را به وجود صفر روی نیم‌گروه خاصی از عملگرها روی $WAP(\mathcal{A})$ مربوط می‌کنیم و نشان می‌دهیم وجود یک φ -میانگین پایای چپ و یک φ -میانگین پایای راست، وجود φ -میانگین پایای منحصربفرد روی $WAP(\mathcal{A})$ را نتیجه می‌دهد. مشخصه‌سازی φ -میانگین پایا با نرم یک موضوع دیگری است که در این فصل به آن می‌پردازیم.
در فصل دوم همگرایی یکنواخت به یک پایای چپ را بررسی می‌کنیم. نشان می‌دهیم همگرایی یکنواخت به یک پایای چپ روی زیرمجموعه‌های فشرده ضعیف از $L^1(G)$ معادل با میانگین‌پذیری گروه فشرده موضعی G و به عبارتی دیگر ۱-میانگین‌پذیری جبر باناخ $L^1(G)$ است. در حالتی که $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ باشد، با در نظر گرفتن زیرفضای $WAP(\mathcal{A})$ از $\mathcal{A}^*$ و φ -میانگین پایای چپ روی $WAP(\mathcal{A})$ به تعمیم این موضوع برای جبرهای باناخ می‌پردازیم.
در فصل سوم مفاهیم میانگین‌پذیری و φ -میانگین‌پذیری را تعمیم داده و φ -کنز میانگین‌پذیری جبرهای باناخ دوگان را به صورت صفر شدن اولین گروه کوهمولوژی $\mathcal{A}$ برای $\mathcal{A}$ -دومدول باناخ دوگان نرمال X که عمل چپ آن به صورت $a.x = \varphi(a)x$ است تعریف می‌کنیم. نشان می‌دهیم این ویژگی کوهمولوژی با وجود φ -میانگین پایای راست روی زیرفضای $\mathcal{A}_*$ از $\mathcal{A}^*$ معادل است. همچنین از نتایج اصلی این فصل این است که اگر S یک نیم‌گروه حذفی ضعیف گسسته و $l^1(S)$ یکدار باشد، χ - میانگین‌پذیری S معادل با $\hat{\chi}$ -کنز میانگین‌پذیری $l^1(S)$ است. همچنین معادل با این است که $l^1(S)$، قطر واقعی $\hat{\chi}$ -نرمال داشته باشد. مطالب فصل‌های دوم و سوم و چهارم از مراجع [۲۴]، [۲۵]، [۲۶] آورده شده است.

فصل ۱
مفاهیم و تعاریف مقدماتی

۱.۱ فضای برداری توپولوژیک

در این فصل به بیان برخی از تعریف و قضیه‌هایی که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرد، می‌پردازیم. در این رساله، اعداد مختلط، اعداد حقیقی و اعداد صحیح و اعداد طبیعی را به ترتیب با نماد $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم V یک فضای برداری و τ یک توپولوژی روی V باشد. V را یک فضای برداری توپولوژیک گوییم اگر:

(الف) مجموعه‌های یک عضوی در V بسته باشند.

(ب) عمل جمع و ضرب اسکالر نسبت به توپولوژی فوق پیوسته باشند.

یک زیرمجموعه C از V محدب است هرگاه برای هر $۰ \leq t \leq ۱$، $tC + (۱ - t)C \subseteq C$. اگر K زیرمجموعه ناتهی از V باشد، غلاف محدب K را با نماد $co(K)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$co(K) = \Big\{ \sum_{i=۱}^{n} \alpha_i x_i;\ x_i \in K, \alpha_i \geq ۰,\ \sum_{i=۱}^{n} \alpha_i = ۱,\ n \in \mathbb{N} \Big\}.$$

زیرفضای تولید شده از K را با $Span(K)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$Span(K) = \Big\{ \sum_{i=۱}^{n} \alpha_i x_i;\ x_i \in K,\ \alpha_i \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N} \Big\}.$$

همچنین یک فضای برداری توپولوژیک را محدب موضعی گوییم هرگاه یک پایه موضعی برای صفر

موجود باشد که اعضای آن پایه محدب باشند.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنیم V یک فضای برداری توپولوژیک باشد. زیرمجموعه E از V را کراندار گوییم هرگاه برای هر همسایگی U از صفر، عدد طبیعی m موجود باشد که برای هر $t > m$، $E \subseteq tU$.

فرض کنیم V یک فضای برداری توپولوژیک باشد، فضای تابعک‌های خطی و پیوسته روی V را با نماد V^* نشان می‌دهیم.

قضیه ۳.۱.۱. *فرض کنیم A و B دو زیرمجموعه ناتهی، مجزا و محدب از یک فضای برداری توپولوژیک V باشد.*

(الف) اگر A باز باشد، آنگاه تابعک $\Lambda \in V^*$ و اسکالر $\gamma \in \mathbb{R}$ موجود است به طوری که برای هر $x \in A$ و $y \in B$،

$$Re\Lambda(x) < \gamma \leq Re\Lambda(y).$$

(ب) اگر A فشرده، B بسته و V فضای برداری توپولوژیک محدب موضعی باشد، آنگاه $\Lambda \in V^*$ و $\gamma_۱, \gamma_۲ \in \mathbb{R}$ موجودند به طوری که برای هر $x \in A$ و $y \in B$،

$$Re\Lambda(x) < \gamma_۱ < \gamma_۲ \leq Re\Lambda(y).$$

برهان. به قضیه ۴.۳ در [۵۰] مراجعه شود. □

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنیم E و F فضای برداری و $E \times F \to \mathbb{C}$ ،$(x, y) \to \langle x, y\rangle$ تابعک دوخطی باشد که برای هر $x \in E$ که $x \neq ۰$، $y \in F$ موجود باشد که $\langle x, y\rangle \neq ۰$ و برای هر $y \in F$ که $y \neq ۰$، $x \in E$ موجود باشد که $\langle x, y\rangle \neq ۰$. زوج (E, F) را زوج دوگان گوییم.

فرض کنیم (E, F) یک زوج دوگان باشد. برای هر $y \in F$، تعریف می‌کنیم

$$\rho_y(x) = |\langle x, y\rangle|, \quad (x \in E)$$

در این صورت ρ_y یک نیم‌نرم روی E است. توپولوژی ضعیف روی E که به وسیله F مشخص می‌شود، ضعیف‌ترین توپولوژی روی E است که هر نیم‌نرم ρ_y پیوسته است. این توپولوژی را با $\sigma(E, F)$ نشان

می‌دهیم. مجموعه $\{x \in E : |\langle x, y\rangle| < ۱\}$ یک زیرپایه از همسایگی‌های صفر در $(E, \sigma(E, F))$ است. همچنین $(E, \sigma(E, F))$ یک فضای محدب موضعی با دوگان F است.

فرض کنیم E یک فضای برداری و E' دوگان جبری آن باشد. (E, E') و (E', E) هر دو زوج‌های دوگانند. $\sigma(E', E)$ توپولوژی ضعیف ستاره روی E' است و λ_α در E' با توپولوژی $\sigma(E', E)$ به λ میل می‌کند اگر و تنها اگر برای هر $x \in E$، $\langle \lambda_\alpha, x\rangle \to \langle \lambda, x\rangle$.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنیم E و F فضاهای نرمدار باشند. فضای تبدیل‌های خطی و کراندار از E به F را با نماد $\mathcal{B}(E, F)$ نشان می‌دهیم. توپولوژی عملگر قوی روی $\mathcal{B}(E, F)$ توپولوژی است که توسط خانواده نیم‌نرم‌های $\{\rho_x : x \in E\}$ تعریف می‌شود که در آن $\rho_x(T) = \|Tx\|$. $\mathcal{B}(E, F)$ با توپولوژی عملگر قوی یک فضای محدب موضعی است و تور $\{T_\alpha\}_{\alpha \in I}$ در توپولوژی عملگر قوی به T همگراست اگر و تنها اگر برای هر $x \in E$، $T_\alpha x$ به Tx میل کند. توپولوژی عملگر ضعیف روی $\mathcal{B}(E, F)$ توپولوژی است که توسط خانواده نیم‌نرمهای $\{\rho_{x,\lambda} : x \in E, \lambda \in F'\}$ تعریف می‌شود که در آن $\rho_{x,\lambda}(T) = |\langle Tx, \lambda\rangle|$. $\mathcal{B}(E, F)$ با توپولوژی عملگر ضعیف یک فضای محدب موضعی است و تور $\{T_\alpha\}_{\alpha \in I}$ در توپولوژی عملگر ضعیف به T همگراست اگر و تنها اگر برای هر $x \in E$، $T_\alpha x$ با توپولوژی ضعیف در F به Tx میل کند.

قضیه ۶.۱.۱. *(باناخ-آلاغلو)* [۱] *اگر U یک همسایگی از صفر در فضای برداری توپولوژیک V باشد و*

$$K = \{\Lambda \in V^*;\ |\Lambda(x)| \leq ۱ \text{ برای هر } x \in U\},$$

آنگاه K با توپولوژی ضعیف ستاره فشرده است.

برهان. به قضیه ۱۵.۳ از [۵۰] مراجعه شود. □

قضیه ۷.۱.۱. *اگر V یک فضای برداری نرمدار باشد، آنگاه گوی واحد در V در گوی واحد در V^{**} با توپولوژی ضعیف ستاره چگال است. در حالت خاص یک فضای باناخ V انعکاسی است اگر و تنها اگر گوی واحد بسته در V با توپولوژی ضعیف فشرده باشد.*

[۱] Alaoglu

برهان. به [۱] مراجعه شود. $\square$

فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ باشد. $\mathcal{A}$ -مدول چپ E یک فضای برداری E روی $\mathbb{C}$ همراه با نگاشت $a.x \to (a,x)$، $\mathcal{A}\times E \to E$ است به طوری که

(الف) $a.(\alpha x+\beta y)=\alpha a.x+\beta a.y \quad (\alpha,\beta\in\mathbb{C}, a\in\mathcal{A}, x,y\in E)$

(ب) $(\alpha a+\beta b).x=\alpha a.x+\beta b.x \quad (\alpha,\beta\in\mathbb{C}, a,b\in\mathcal{A}, x\in E)$

(ج) $a.(b.x)=(a.x).b \quad (a,b\in\mathcal{A}, x\in E)$

$\mathcal{A}$ -مدول راست به شیوه مشابه تعریف می‌شود. $\mathcal{A}$ -دومدول فضای برداری E است که $\mathcal{A}$ -مدول چپ و $\mathcal{A}$ -مدول راست است و

$$a.(x.b)=(a.x).b \quad (a,b\in\mathcal{A}, x\in E).$$

فرض کنیم E یک فضای باناخ باشد که $\mathcal{A}$ -مدول چپ است. E را $\mathcal{A}$ -مدول چپ باناخ گوییم اگر $c>0$ موجود باشد که برای هر $a\in\mathcal{A}$ و $x\in E$،

$$\|a.x\|\le c\|a\|\|x\|.$$

$\mathcal{A}$ -مدول راست باناخ و $\mathcal{A}$ -دومدول باناخ به شیوه مشابه تعریف می‌شود. اگر E یک $\mathcal{A}$ -مدول چپ (راست) باناخ باشد، E^* یک $\mathcal{A}$ -مدول راست (چپ) باناخ با عمل

$$\langle x,\phi.a\rangle:=\langle a.x,\phi\rangle \quad (\langle x,a.\phi\rangle:=\langle x.a,\phi\rangle) \quad (a\in\mathcal{A},\ x\in E,\ \phi\in E^*)$$

است. اگر E یک $\mathcal{A}$ -دومدول باناخ باشد، E^* یک $\mathcal{A}$ -دومدول باناخ است. فضاهای باناخ دوگان از مدول‌های باناخ که ضرب آن به صورت بالا تعریف می‌شود را مدول‌های باناخ دوگان گوییم.

تعریف ۸.۱.۱. یک واحد تقریبی چپ (راست) کراندار برای جبر باناخ $\mathcal{A}$ تور کراندار $\{e_\alpha\}_\alpha$ در $\mathcal{A}$ است به طوری که

$$e_\alpha a\to a,\ (ae_\alpha\to a) \quad (a\in\mathcal{A}).$$

تور $\{e_\alpha\}_\alpha$ را واحد تقریبی (واحد تقریبی دو طرفه) کراندار گوییم اگر واحد تقریبی راست کراندار و واحد تقریبی چپ کراندار باشد.

فرض کنیم E یک $\mathcal{A}$ -دومدول باناخ باشد. واحد تقریبی کراندار در $\mathcal{A}$ برای E تور کراندار $\{e_\alpha\}_\alpha$ در $\mathcal{A}$ است به طوری که

$$e_\alpha e \to e,\ (ee_\alpha \to e) \quad (e \in E).$$

ضرب آرنز: [۲] در سال ۱۹۵۱، آرنز دو ضرب روی $\mathcal{A}^{**}$ معرفی کرد که هر یک از آنها یک توسیع ضرب در $\mathcal{A}$ به عنوان تصویر کانونی در $\mathcal{A}^{**}$ است. اگر $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ باشد، $\mathcal{A}^{**}$ با ضرب زیر یک جبر باناخ است که به آن ضرب آرنز اول گوییم. برای هر $a,b \in \mathcal{A}$ و $f \in \mathcal{A}^*$، $m,n \in \mathcal{A}^{**}$، ضرب‌های $f.a \in \mathcal{A}^*$، $n.f \in \mathcal{A}^*$ و $m.n \in \mathcal{A}^{**}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\langle f.a, b\rangle = \langle f, a.b\rangle, \quad \langle n.f, b\rangle = \langle n, f.b\rangle, \quad \langle m.n, f\rangle = \langle m, n.f\rangle.$$

می‌توان $\mathcal{A}$ را به عنوان زیرجبری از $\mathcal{A}^{**}$ در نظر گرفت. ضرب آرنز دوم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\langle a.'f, b\rangle = \langle f, b.'a\rangle, \quad \langle f.'m, a\rangle = \langle m, a.'f\rangle, \quad \langle m.'n, f\rangle = \langle f.'m, n\rangle.$$

گوییم $\mathcal{A}$ آرنز منظم است اگر ضرب آرنز اول و دوم با هم برابر باشد [۱۳]. اگر $n \in \mathcal{A}^{**}$، آنگاه $m \to m.n$، روی $\mathcal{A}^{**}$ ضعیف ستاره- ضعیف ستاره پیوسته است. برای $n \in \mathcal{A}^{**}$، $m \to n.m$ در حالت کلی ضعیف ستاره- ضعیف ستاره پیوسته نیست.

قضیه ۹.۱.۱. *فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ باشد، گزاره‌های زیر معادلند:*

(الف) $\mathcal{A}$ آرنز منظم است.

(ب) برای هر $n \in \mathcal{A}^{**}$، $m \to n.m$، ضعیف ستاره- ضعیف ستاره پیوسته است.

(ج) برای هر $n \in \mathcal{A}^{**}$، $m \to m.'n$، ضعیف ستاره- ضعیف ستاره پیوسته است.

(د) برای هر $f \in \mathcal{A}^*$، $b \to f.b$ فشرده ضعیف است.

(ه) برای هر $f \in \mathcal{A}^*$، $b \to b.'f$ فشرده ضعیف است.

(و) برای هر دو دنباله $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ در $\mathcal{A}$ و $f \in \mathcal{A}^*$ که حدهای مضاعف $\lim_n \lim_m f(a_n b_m)$ و $\lim_m \lim_n f(a_n b_m)$ موجود است، داریم

$$\lim_n \lim_m f(a_n b_m) = \lim_m \lim_n f(a_n b_m).$$

[۲] Arens

برهان. به قضیه ۱ در [۱۸] مراجعه شود. □

$f \in \mathcal{A}^*$ را تقریبا متناوب ضعیف (تقریبا متناوب) گوییم هرگاه مجموعه $\{f.a : \|a\| \leq ۱\}$ فشرده ضعیف نسبی (فشرده نسبی) باشد. مجموعه چنین تابعک‌هایی را با $(AP(\mathcal{A}))WAP(\mathcal{A})$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱۰.۱.۱. *(قضیه تجزیه کوهن)* [۳] *فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ با واحد تقریبی کراندار برای $\mathcal{A}$-دومدول باناخ E باشد. $e \in E$ و $\delta > ۰$* ***داده شده باشد.*** *در این صورت* ***عناصر*** *$a \in \mathcal{A}$ و $f \in E$* ***موجود است که*** *$e = af$ و $\|f - e\| < \delta$.*

برهان. به قضیه ۱۰.۱۱.۱ در [۶] مراجعه شود. □

قضیه ۱۱.۱.۱. *فرض کنیم E زیرمجموعه محدب از یک فضای برداری توپولوژیک محدب موضعی باشد. در این صورت بستار E با توپولوژی ضعیف با بستار E با توپولوژی اولیه روی E با هم برابرند.*

برهان. به قضیه ۱۲.۳ در [۵۰] مراجعه شود. □

فرض کنیم Z, Y, X فضاهای برداری نرمدار روی یک میدان $\mathbb{F}$ و $BL(X, Y; Z)$ فضای نگاشت‌های دوخطی کراندار از $X \times Y$ به Z باشد.

تعریف ۱۲.۱.۱. فرض کنیم $x \in X$ و $y \in Y$. $x \otimes y$ به عنوان عنصری از $BL(X^*, Y^*; \mathbb{F})$ به صورت

$$(x \otimes y)(f, g) = f(x)g(y), \quad (f \in X^*, g \in Y^*)$$

تعریف می‌شود. ضرب تانسوری جبری دو فضای X و Y به صورت فضای تولید شده توسط مجموعه $\{x \otimes y : x \in X, y \in Y\}$ در $BL(X^*, Y^*, \mathbb{F})$ تعریف می‌شود و با نماد $X \otimes Y$ نمایش داده می‌شود.

قضیه ۱۳.۱.۱. *فرض کنیم $\phi : X \times Y \to Z$ یک نگاشت دوخطی باشد. در این صورت یک نگاشت خطی یکتا $K : X \otimes Y \to Z$* ***موجود است که***

$$K(x \otimes y) = \phi(x, y) \quad (x \in X,\ y \in Y).$$

[۳] Cohen

برهان. به قضیه ۶.۴۲.۶ در [۶] مراجعه شود. □

نرم تانسوری ضعیف: فرض کنیم X و Y فضاهای نرمدار باشند. نرم تانسوری ضعیف نرمی است که فضای برداری $X \otimes Y$ از $BL(X^*, Y^*; \mathbb{F})$ به ارث می‌برد و به صورت زیر است:

$$w(u) = \sup\Big\{|\sum_i f(x_i)g(y_i)| : \|f\| \leq 1, \|g\| \leq 1\Big\}$$

که $u = \Sigma_i x_i \otimes y_i$. کامل شده $X \otimes Y$ نسبت به این نرم را ضرب تانسوری ضعیف X و Y نامیم و با نماد $X \otimes_w Y$ نمایش می‌دهیم.

نرم تانسوری تصویری: فرض کنیم X و Y فضاهای نرمدار باشند. نرم تانسوری تصویری روی $X \otimes Y$ به صورت

$$\rho(u) = \inf\Big\{\sum_i \|x_i\|\|y_i\|; u = \Sigma_i x_i \otimes y_i\Big\}$$

است که اینفیموم روی همه نمایش‌های متناهی از u است. کامل شده $X \otimes Y$ نسبت به نرم تانسوری تصویری را با نماد $X \hat{\otimes} Y$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱۴.۱.۱. *فرض کنیم $F \in (X \hat{\otimes} Y)^*$ و $\phi_F : X \times Y \to \mathbb{C}$ به فرم $\phi_F(x,y) = F(x \otimes y)$ باشد. در این صورت $F \to \phi_F$ یک یکریختی طولپا از $(X \hat{\otimes} Y)^*$ به روی $BL(X^*, Y^*; \mathbb{F})$ است.*

برهان. به قضیه ۱۳.۴۲.۶ در [۶] مراجعه شود. □

ویژگی تقریب و رادون-نیکودیم: [۴] فرض کنیم E یک فضای باناخ باشد.

(الف) گوییم E ویژگی تقریب دارد اگر تور $\{S_\alpha\}_{\alpha \in I}$ از عملگرهای با بعد متناهی روی E موجود باشد که $\{S_\alpha\}_{\alpha \in I}$ روی زیرمجموعه‌های فشرده به عملگر همانی روی E همگرای یکنواخت است.

(ب) گوییم E ویژگی رادون-نیکودیم دارد اگر برای هر فضای اندازه متناهی (Ω, S, μ) و هر تبدیل خطی $T : L^1(\Omega, S, \mu) \to E$ ($L^1(\Omega, S, \mu)$ مجموعه توابع انتگرال‌پذیر روی Ω نسبت به μ است.) یک تابع μ-اندازه‌پذیر کراندار $\phi : \Omega \to E$ موجود باشد که

$$T(f) = \int f\phi d\mu \quad (f \in L^1(\Omega, S, \mu)).$$

[۴] Radon-Nikodym

فرض کنیم E و F فضاهای باناخ باشند و نگاشت $\kappa_{E,F} : E^* \times F^* \to (E \otimes_w F)^*$ را به صورت $\kappa_{E,F}(\phi,\psi) := \langle x,\phi\rangle\langle y,\psi\rangle \quad (x \in E, \phi \in E^*, y \in F, \psi \in F^*)$ در نظر می‌گیریم. $\kappa_{E,F}$ یک نگاشت دوخطی از $E^*\hat{\otimes}F^*$ به توی $(E \otimes_w F)^*$ القا می‌کند. قضیه زیر حالتی را نشان می‌دهد که $\kappa_{E,F}$ یک یکریختی است.

قضیه ۱۵.۱.۱. *فرض کنیم F, E فضاهای باناخ باشند که در گزاره‌های زیر صدق می‌کنند:*

(الف) E^* یا F^* ویژگی تقریب دارد.

(ب) E^* یا F^* ویژگی رادون-نیکودیم دارد.

در این صورت $\kappa_{E,F} : E^*\hat{\otimes}F^* \to (E \otimes_w F)^*$ یک یکریختی طولپا است.

برهان. به ۱.۶.۱۶ در [۱۶] مراجعه شود. □

۲.۱ نیم‌گروه‌ها و جبرهای آن

یک نیم‌گروه زوج $(S, \bullet)$ است که در آن S یک مجموعه ناتهی و $\bullet$ یک عمل دوتایی شرکت‌پذیر روی S است. در واقع $\bullet$ تابعی از $S \times S$ به توی S بوده و برای هر $r, s, t \in S$،

$$r \bullet (s \bullet t) = (r \bullet s) \bullet t.$$

از این پس به جای نماد $r \bullet s$ نماد rs را بکار می‌بریم. برای هر عنصر t از S، نگاشت‌های $\rho_t : S \to S$ و $\lambda_t : S \to S$ را برای هر $s \in S$ با ضابطه $\rho_t(s) = st$ و $\lambda_t(s) = ts$ تعریف می‌کنیم. فرض کنیم $s \in S$ و F زیرمجموعه ناتهی از S باشد. قرار می‌دهیم

$$s^{-1}F = \{t \in S : st \in F\}, \quad Fs^{-1} = \{t \in S : ts \in F\}.$$

S را حذفی چپ (راست) گوییم هرگاه برای هر $s \in S$، $(\rho_s)\lambda_s$ یک به یک باشد. نیم‌گروه S را حذفی گوییم هرگاه حذفی راست و حذفی چپ باشد. S را حذفی چپ (راست) ضعیف گوییم اگر برای هر $s \in S$ و هر مجموعه متناهی F از S، $(Fs^{-1})s^{-1}F$ متناهی باشد. نیم‌گروه S را حذفی ضعیف گوییم اگر حذفی چپ ضعیف و حذفی راست ضعیف باشد. نیم‌گروه S را یکانی گوییم اگر $u_S \in S$ موجود

باشد که برای هر $s \in S$، $su_S = u_S s = s$. نیم‌گروه یکانی S را یک گروه نامیم هرگاه برای هر $s \in S$، عنصر $t \in S$ موجود باشد که $ts = st = u_S$.

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنیم S یک نیم‌گروه با یک توپولوژی باشد.

(الف) S یک نیم‌گروه نیم‌توپولوژیک است هرگاه برای هر $t \in S$، $\lambda_t : S \to S$ و $\rho_t : S \to S$ پیوسته باشند.

(ب) S یک نیم‌گروه توپولوژیک است هرگاه نگاشت $(s,t) \to st$، $S \times S \to S$ پیوسته باشند.

(ج) S یک گروه توپولوژیک است هرگاه S یک گروه و یک نیم‌گروه توپولوژیک بوده و نگاشت $s \to s^{-1}$ از S به S پیوسته باشد.

فرض کنیم S یک نیم‌گروه هاسدورف و فشرده موضعی، $C_\circ(S)$ مجموعه توابع پیوسته روی S که در بی‌نهایت صفر می‌شود و $M(S)$ مجموعه اندازه‌های بورل منظم روی S باشد. اگر A یک مجموعه اندازه‌پذیر بورل باشد، تغییرات کلی $|\mu|$ از μ به صورت

$$|\mu|(A) = \sup\Big\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(V_i)| : \text{است } A \text{ اندازه‌پذیر از } - |\mu| \text{ یک افراز از مجموعه‌های } V_i \Big\}$$

تعریف می‌شود. بنا به قضیه نمایش ریس [5] $M(S) = C_\circ(S)^*$. $M(S)$ با نرم $\|\mu\| = |\mu|(S)$ و ضرب

$$\langle \mu * \nu, f\rangle = \int_G \int_G f(st) d\mu(s) d\nu(t) \quad (f \in C_\circ(S))$$

یک جبر باناخ است. تکیه‌گاه یک اندازه نامنفی μ، مجموعه بسته C است به طوری که $\mu(S \setminus C) = \circ$ و برای هر زیرمجموعه باز U از S که $U \cap C \neq \emptyset$، داشته باشیم $\mu(U \cap C) > \circ$.

فرض کنیم λ یک تابع روی S باشد. انتقال چپ (راست) λ توسط a را با $L_a\lambda$ $(R_a\lambda)$ نمایش می‌دهیم و به صورت $L_a\lambda(x) = \lambda(ax)$ $(R_a\lambda(x) = \lambda(xa))$ تعریف می‌کنیم. مجموعه توابع مختلط مقدار پیوسته و کراندار روی S را با $C_b(S)$ نشان می‌دهیم. $\lambda \in C_b(S)$ را تقریبا متناوب (تقریبا متناوب ضعیف) گوییم اگر $\{L_s\lambda : s \in S\}$ فشرده نسبی (فشرده ضعیف نسبی) در $C_b(S)$ باشد و آن را با $AP(S)$ $(WAP(S))$ نشان می‌دهیم. $\lambda \in C_b(S)$ را پیوسته یکنواخت چپ (راست) گوییم اگر نگاشت‌های $g \to L_g\lambda$ $(g \to R_g\lambda)$، از S به توی $C_b(S)$ با توپولوژی نرم روی $C_b(S)$ پیوسته باشد و مجموعه این

[5] Riesz

توابع را با $LUC(S)$ $(RUC(S))$ نشان می‌دهیم. مجموعه توابع پیوسته یکنواخت راست و چپ را با نماد $UC(S)$ نشان می‌دهیم.

جبر نرمدار $l^1(S)$ به صورت

$$l^1(S) = \left\{ f = \sum_s f(s)\delta_s : \|f\| = \sum_{s\in S} |f(s)| < \infty \right\}$$

تعریف می‌شود و با ضرب نقطه‌ای یک جبر باناخ جابجایی است. $l^\infty(S)$ مجموعه توابع کراندار مختلط مقدار روی S است. $l^\infty(S)$ با ضرب نقطه‌ای و نرم $|f|_\infty = \sup\{|f(s)| : s \in S\}$ یک جبر باناخ جابجایی و یکدار است. $l^\infty(S)$ فضای دوگان $l^1(S)$ است که رابطه دوگانی آن به صورت زیر است:

$$\langle \lambda, f \rangle = \sum \left\{ f(s)\lambda(s) : s \in S \right\} \quad (\lambda \in l^\infty(S), f \in l^1(S))$$

فرض کنیم G یک گروه هاسدورف و فشرده موضعی با اندازه هار چپ m_G باشد، $L^1(G)$ مجموعه توابع اندازه‌پذیر (کلاس‌های هم‌ارزی) روی G است که $\int_G |f(t)| dm_G(t) < \infty$. همچنین $L^1(G)$ با نرم $\|f\|_1 = \int_G |f(t)| dm_G(t)$ و ضرب

$$f_1 * f_2(t) = \int_G f_1(x) f_2(x^{-1}t) dm_G(x), \quad (f_1, f_2 \in L^1(G))$$

یک جبر باناخ است. تابع پیوسته منحصربفرد $\Delta_G : G \to (0, \infty)$ موجود است به طوری که برای هر $x, y \in G$، $\Delta_G(xy) = \Delta_G(x)\Delta_G(y)$ و اگر E زیرمجموعه بورل از G باشد و $x \in G$، آنگاه $m_G(Ex) = \Delta_G(x) m_G(E)$. Δ_G را تابع مدولار گوییم.

قضیه ۲.۲.۱. *فرض کنیم G یک گروه فشرده موضعی، $\mu \in M(G)$ و $f \in L^1(G)$. در این صورت گزاره‌های زیر m_G -تقریبا همه جا برقرار است.*

(الف) $\mu * f(x) = \int_G f(t^{-1}x) d\mu(t)$.

(ب) $f * \mu(x) = \int_G f(xt^{-1}) \Delta_G(t^{-1}) d\mu(t)$

برهان. به قضیه ۹.۲۰ در [۳۲] مراجعه شود. □

$f \to f dm_G$ یک یکریختی طولپا است که برد آن شامل اندازه‌های پیوسته مطلق نسبت به اندازه هار

m_G است. مجموعه اندازه‌های پیوسته مطلق نسبت به m_G را با $M_a(G)$ نشان می‌دهیم و $M_a(G)$ یک ایده‌ال بسته در $M(G)$ است.

قضیه ۳.۲.۱. *فرض کنیم G یک گروه فشرده موضعی باشد، در این صورت $L^1(G)$ یک واحد تقریبی کراندار دارد.*

برهان. به قضیه ۲۷.۲۰ در [۳۲] مراجعه شود. $\square$

فضای توابع اندازه‌پذیر کراندار اساسی روی G را با نماد $L^\infty(G)$ نشان می‌دهیم. نرم $f \in L^\infty(G)$ به صورت

$$\|f\|_\infty = ess\sup|f(x)| = \inf\left\{\alpha \in \mathbb{R};\ \alpha \geq 0,\ \text{پوچ موضعی است}\ \{x \in G : |f(x)| > \alpha\}\right\}$$

است. بنا به قضیه ۲.۱۸ در [۳۲]، $L^1(G)^* = L^\infty(G)$، که رابطه دوگانی آن به صورت زیر است:

$$\langle f, g\rangle = \int fg dm_G \quad (f \in L^1(G), g \in L^\infty(G)).$$

برای هر $\mu \in M(G)$ و $f \in L^\infty(G)$، $\mu * f$ و $f * \mu$ به عنوان عناصری از $L^\infty(G)$، m_G -تقریبا همه جا به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu * f(x) = \int_G f(t^{-1}x)d\mu(t), \quad f * \mu(x) = \int_G f(xt^{-1})d\mu(t).$$

فرض کنیم E یک زیرفضای $L^\infty(G)$ باشد که شامل توابع ثابت است و تحت مزدوج مختلط بسته است. E را زیرفضای پایای چپ(راست) گوییم اگر برای هر $f \in E$ و $g \in G$، $\delta_g * f \in E$ $(f * \delta_g \in E)$. زیرفضای E را پایا گوییم اگر پایای راست و پایای چپ باشد. زیرفضای $C_b(G)$ شامل توابع پیوسته و کراندار و $C_0(G)$ شامل توابع پیوسته که در بی‌نهایت صفر می‌شود زیرفضاهای پایای از $L^\infty(G)$ اند. همچنین داریم

$$AP(G) \subseteq WAP(G) \subseteq LUC(G) \subseteq C_b(G) \subseteq L^\infty(G)$$

و

$$C_0(G) \subset WAP(G)$$

[۱۲].