بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه پیام نور

دانشکده علوم پایه

مرکز پیام نور تهران

پایان نامه

برای دریافت مدرک کارشناسی ارشد

رشته ریاضی کاربردی–آنالیز عددی

گروه ریاضی

مقایسه چند روش عددی برای حل معادله برگر

کوکب چلمبری

استاد راهنما : دکتر هاشم صابری نجفی

استاد مشاور : دکتر فهیمه سلطانیان

شهریور ۱۳۹۰

اینجانب کوکب چلمبری دانشجوی ورودی ۸۶ مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی گواهی می نمایم چنانچه در پایان نامه خود از فکر، ایده و نوشته دیگری بهره گرفته ام با نقل قول مستقیم یا غیر مستقیم منبع و ماخذ آن را در جای مناسب ذکر کرده ام. بدیهی است مسئولیت تمامی مطالبی که نقل قول دیگران نباشد برعهده خویش می دانم و جوابگوی آن خواهم بود.

نام و نام خانوادگی دانشجو

تاریخ و امضاء

اینجانب کوکب چلمبری دانشجوی ورودی ۸۶ مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی گواهی می نمایم چنانچه بر اساس مطالب پایان نامه خود اقدام به انتشار مقاله، کتاب و... نمایم ضمن مطلع نمودن استاد راهنما، با نظر ایشان نسبت به نشر مقاله،کتاب و... و به صورت مشترک و با ذکر نام استاد راهنما مبادرت نمایم.

نام و نام خانوادگی دانشجو

تاریخ و امضاء

شهریور ۱۳۹۰

أ

تقدیم به:

روح پدر بزرگوارم که الفبای زندگی و ریاضیات را

به من آموخت.

بدین وسیله از مادر و برادر عزیزم که صبورانه در کلیه مراحل تحصیلی مـرا یـاری نمودنـد، تشکر می نمایم.

همچنین مراتب سپاس خود را از استاد راهنمای بزرگوارم جناب آقای دکتـر هاشـم صـابری نجفی که با راهنمایی هایشان همچون چراغی راه را برمن آشکار نمودند، اعلام می دارم و در آخر از استاد مشاور محترم سرکار خانم دکتر فهیمه سلطانیان و کلیه عزیزان و دوستانی که دشواری راه را بر من هموار نمودند، قدردانی می نمایم.

چکیده:

مقایسه چند روش عددی برای حل معادله برگر

در این پایان نامه، ابتدا روش تفاضلات متناهی بیان شده و سپس به حل معادله برگر با استفاده از این روش پرداخته و در ادامه توضیحاتی در خصوص اسپلاین ها بیان شده و به حل معادله برگر با استفاده از اسپلاین های پنج تایی پرداخته شده است، در پایان نیز از معادله برگر به عنوان مدلی برای مساله ترافیک استفاده شده است.

کلید واژه:

روش تفاضلات متناهی، معادله برگر،اسپلاین،مساله ترافیک

فهرست مطالب :

چکیده فارسی: .... ج
مقدمه : ۱

فصل اول

۱-۱- تعاریف : ۲
۱-۲- تفاضلات متناهی: ۴
۱-۳- ماتریس های نواری : ۲۲
۱-۴- روش های تکراری : ۲۳

فصل دوم

۲-۱- آشنایی با معادله برگر : ۲۶

فصل سوم

۳-۱- درونیابی و تقریب چند جمله ای : ۳۸
۳-۲- اسپلاین مکعبی : ۳۹

فصل چهارم

۴-۱- رفتار عددی معادله برگر تعدیل یافته: ۵۲
۴-۲- روش پیشنهادی برای حل معادله برگر: ۵۴
۴-۳- تحلیل پایداری روش اسپلاین پنج تایی: ۶۴
۴-۱- نتایج عددی: ۶۶

فصل پنجم

۵-۱- جریان ترافیک پیوستار: ۶۸
۵-۲- طرح مساله : ۷۱
واژه نامه : ۷۶

فهرست منابع: ۸۰
چکیده انگلیسی: ۸۱

مقدمه :

ازمعادله برگر برای تشریح حرکت سیالات و بررسی لایه های مرزی و امواج ضربه ای حرکت و جا به جایی اجرام استفاده می گردد و همچنین در علوم مهندسی به عنوان مدلی ساده برای نمایش آشفتگی و تلاطم به کار می رود و لذا مطالعه این معادله و بررسی ویژگی های آن دارای اهمیت فراوانی است.

در این پایان نامه به حل این معادله مهم با روش تفاضلات متناهی و اسپلاین های پنج تایی پرداخته شده، سپس از این معادله برای بررسی تراکم خودروها در مساله ترافیک نیز استفاده شده است.

فصل اول

۱–۱ تعاریف و مفاهیم اساسی

۱–۱–۱ معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی

معادله دیفرانسیلی که علاوه بر متغیرهای مستقل شامل یک یا چند مشتق نسبی متغیرهای وابسته نیز باشد یک معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی و یا معادله مشتقات نسبی نامیده می شود که به طور کلی به فرم $(x,y,\ldots u\ .u_x\ ,u_y\ ,u_{xx}\ ,u_{yy},\ldots)=0$ می باشد که در آن y,x متغیر مستقل و u تابعی مجهول از این متغیرها می باشد و $u_{xx},\ldots.\ u_{yy}, u_y, u_x$, مشتقات نسبی این تابع هستند و معمولاً به صورت زیر بیان می شوند.

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, u_y = \frac{\partial u}{\partial y},$$
$$u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x}$$

۱–۱–۲ مرتبه معادله دیفرانسیل

مرتبه یک معادله با مشتقات نسبی عبارت است از بزرگترین مرتبه مشتق نسبی موجود در معادله. به عنوان مثال

$$u_{xx}+2xu_{xy}+u_{yy}=e^{y}$$

یک معادله با مشتقات نسبی مرتبه دوم است.

۱-۱-۳ معادله خطی و غیر خطی

معادله بامشتقات نسبی را خطی می گویند، اگر نسبت به تـابع مجهـول و تمـام مشـتقات آن خطی باشد و ضرایب آن فقط وابسته به متغیرهای مستقل بیان شوند.

معادله ای که خطی نباشد، غیر خطی است.

مثال: $yu_{xx}+2xyu_{yy}+u=1$

یک معادله با مشتقات نسبی خطی مرتبه دوم است.

۱-۱-۴ معادله شبه خطی

یک معادله با مشتقات نسبی را شبه خطی می نامند، اگر نسبت به بزرگترین مرتبـه مشـتقات تابع مجهول خطی باشد. $u_xu_{xx}+xuu_y=\sin y$

معادله فوق یک معادله با مشتقات نسبی شبه خطی مرتبه دوم است.

۱-۱-۵ عملگر

یک قاعده ریاضی است که وقتی درباره یک تابع به کار بسته می شود، تـابع دیگـری نتیجـه می دهد.مثال:

$\ell u=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\ \partial y}+\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}$ که $\ell=\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial^2}{\partial x\ \partial y}+\frac{\partial^3}{\partial y^3}$ عملگر دیفرانسیل نامیده می شود.

۱-۱-۶ تعریف خطای مطلق و نسبی

فرض کنید $\bar{x}$ یک تقریب برای x باشد، خطای مطلق (e_x) و خطای نسبی (r_x) به صورت زیر تعریف می شود: $e_x = |x - \bar{x}|$ و $r_x = \frac{|x - \bar{x}|}{|x|}$

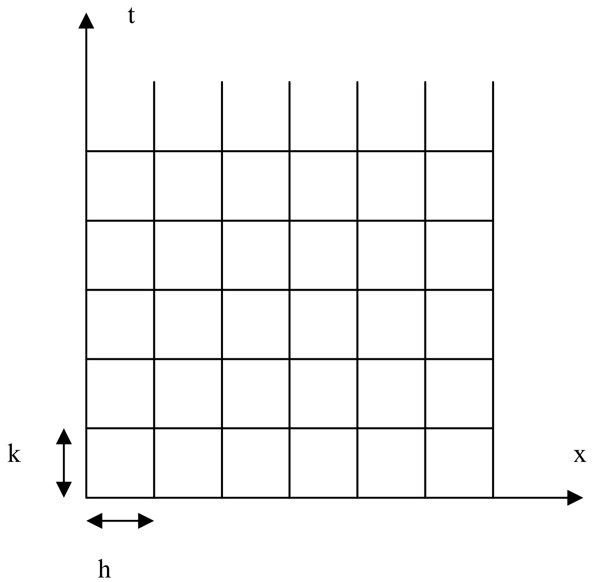
خطای مطلق به طور ساده اختلاف بین مقدار واقعی و مقدار تقریبی می باشد ولی خطای نسبی سنجش بهتری برای خطا می باشد. اگر مقدار مطلق e_x نسبت به قدرمطلق x کوچک باشد، در این صورت حد نسبت $\frac{e_x}{x}$ نزدیک به حد نسبت $\frac{e_x}{\bar{x}}$ می باشد که در عمل به دلیل نامعلوم بودن، x بیشتر مورد استفاده قرار می گیرد.

۱-۲ تفاضلات متناهی

۱-۲-۱ شبکه تفاضلات متناهی یک بعدی

برای تقریب سازی دسته معادلات دیفرانسیل نسبی از شبکه تفاضلات متناهی یک بعدی استفاده می کنیم. دامنه جواب در صفحه (x,t) در ناحیه متناهی $0 \le t < T, 0 < X < 1$ تعریف می شود و با شبکه مستطیلی شکلی از $\Delta t, \Delta x$ در جهت محورهای t,x پوشانده می شود. مقادیر Δt و Δx ثابت فرض می شوند. شبکه شامل ۲ مجموعه خطوط است که یک مجموعه موازی محور t و دیگری موازی محور x می باشد.

مجموعه خطوط موازی محور t با $x=x_i,\ i=1(1)I$ معین می شود که $x_i=i\Delta x$ و $\Delta x=1/I$ و مجموعه خطوط موازی محور X با $t=t_j,\ j=1(1)N$ مشخص می شود $t_j=j\Delta x$ که $T=N\Delta t$ پایان بازه زمانی است.



شکل ۱-۱

اساس روش تفاضل متناهی تعیین تقریب مقادیری از u در نقاط داخل دامنه جواب است که با قطع خطوط $x=x_j,t=t_j$ به دست می آیند. این نقاط را با مختصات (x_i,t_j) نقاط شبکه می نامند.

نقاط (x_i,t_j) به نقاط (i,j) ام شبکه اشاره داردو نقاط شبکه را گره نیز می نامند. نقاط شبکه در دامنه جواب را شرایط داخلی و روی مرز دامنه جواب که برای آن $j=0$ یا $i=n$ می باشد را نقاط مرزی شبکه می نامند. فرض کنید تابع مجهول درمعادله u باشدو مقادیر u و مشتقات آن در نقاط (i,j) ام شبکه به صورت زیر نمایش داده می شود.

$$u_i^j = u(\mathrm{x_i},\mathrm{t_j})$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_i^j = \frac{\partial u(\mathrm{x_i},\mathrm{t_j})}{\partial \mathrm{t}}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_i^j = \frac{\partial u(\mathrm{x_i},\mathrm{t_j})}{\partial \mathrm{x}}$$

لازم به ذکر است، اندیس بالا (j) نشان دهنده مرحله زمانی و اندیس پایین (i) نشان دهنده موقعیت مکانی است.

۱-۲-۲ تقریب سازی مشتقات با تفاضلات متناهی

فرض کنیم تابع u دارای بسط تیلور به صورت زیر باشد.

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \tfrac{1}{2}h^2u''(x) + \frac{1}{6}h^3u'''(x) + \ldots \qquad (۱-۲)$$

$$u(x-h) = u(x) - hu'(x) + \tfrac{1}{2}h^2u''(x) - \frac{1}{6}h^3u'''(x) + \ldots \qquad (۱-۳)$$

با جمع بسط های فوق داریم:

$$u(x+h) + u(x-h) = 2u(x) + h^2u''(x) + 0(h^4) \qquad (۱-۴)$$

که $0(h^4)$ جملات شامل توان های چهارم و بالاتر h می باشد و فرض می کنیم در مقایسه با توان های پایین تر h ناچیز باشد. در این صورت خواهیم داشت

$$u''(x)=\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_{x=x}\approx\frac{1}{h^2}\{u(x+h)-2u(x)+u(x-h)\} \qquad (۱-۵)$$

سمت راست خطایی از مرتبه h^2 دارد.

از تفریق رابطه (۱-۲) و (۱-۳) خواهیم داشت:

$$u'(x)=\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=x}\approx\frac{1}{2h}\{u(x+h)-u(x-h)\} \qquad (۱-۶)$$

تقریب (۱-۶) تقریب تفاضل مرکزی نامیده می شود.

درمورد مشتق اول تقریب های (۱-۷) و (۱-۸) را خواهیم داشت:

تفاضل پیشرو (۱-۷)

$$u'(x)\approx\frac{1}{h}\{u(x+h)-u(x)\}$$

و تفاضل پسرو (۱-۸)

$$u'(x)\approx\frac{1}{h}\{u(x)-u(x-h)\}$$

فرمول های تفاضل پیشرو و پسرو خطایی از مرتبه h دارند.

۱-۲-۳ نمادها و قراردادها

فرض کنیم u یک تابع ازمتغیرهای t,x همانگونه که قبلا توضیح داده شد، صفحه x-t را با مجموعه ای از مستطیل های مساوی در اندازه های $\delta t=k\,,\delta x=h$ تقسیم بندی می کنیم. با توجه به شکل ۱-۱ نقطه p شبکه با مختصات (x,t) در نظر می گیریم که درآن t=jk,x=ih و j,i اعداد صحیح مثبت هستند. مقدار u در نقطه p را با $u_p=u(ih,jh)=u_{i,j}$ نشان می دهیم که با استفاده از معادله (۱-۵) خواهیم داشت:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_p = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} \approx \frac{u\{(i+1)h, jk\} - 2u\{ih, jk\} + u\{(i-1)h, jk\}}{h^2}$$

یعنی (۱-۹)
$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

که خطایی از مرتبه h^2 داردو به طور مشابه

(۱-۱۰)
$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{i,j} \approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2}$$

که خطای پیشرو از مرتبه k^2 دارد.

با نماد فوق تقریب تفاضل پیشرو برای $\frac{\partial u}{\partial t}$ به صورت (۱-۱۱) می باشد.

(۱-۱۱)
$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k}$$

خطای این تقریب از مرتبه k است.

۱-۲-۴ روشهای صریح

با استفاده از معادلات (۱-۹) و (۱-۱۱) یک تقریب تفاضل متناهی برای معادله $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ به صورت (۱-۱۲) $\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$ بیان می شود که در آن

t=jk,(j=0,1,2,…),x=ih و (i=0,1,2,…)

با انجام محاسبات ومعرفی $r = \frac{\delta t}{(\delta x)^2} = \frac{k}{h^2}$ در رابطه (۱-۱۲) خواهیم داشت:

(۱-۱۳) $u_{i,j+1} = u_{i,j} + r(u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1j})$ این فرمول مجهول $u_{i,j+1}$ یعنی نقطه (i,j+1) ام شبکه را با مقادیر معلوم در سطر j ام محاسبه می کند.

بنابراین مقدار مجهول u در امتداد طول سطر اول با مقادیر آغازی و مرزی t=0 محاسبه می شود. از این رو چون یک مقدار مجهول مستقیما بر حسب مقادیر معلوم به دست می آید این روش را صریح می نامند.

مثال برای روش صریح

جواب عددی معادله $\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (حرارت) را با شرایط زیر محاسبه می کنیم:

شرایط آغازی

$$1)\, u(x,0)=2x \qquad 0\le x\le \frac{1}{2}$$
$$2)\, u(x,0)=2(1-x) \qquad \frac{1}{2}\le x\le 1$$

$$3)\, u(0,t)=u(1,t)=0 \qquad \forall t$$ شرایط مرزی

حالت اول: قرار می دهیم $h=\frac{1}{10}, k=\frac{1}{1000}$ و لذا $r=\frac{k}{h^2}=\frac{1}{10}$ با جایگزینی در معادله

(۱-۱۳) داریم $u_{i,j+1}=\frac{1}{10}(u_{i-1,j}+8u_{i,j}+u_{i+1,j})$ برای مثال

$u_{5,1}=u_{5,0+1}=\frac{1}{10}\left(u_{4,0}+8u_{5,0}+u_{6,0}\right)=\frac{1}{10}\left(0.8+8+0.8\right)=0.96$ چون مساله متقارن است.

بنابراین جواب را درفاصله $0\le x\le 1/2$ محاسبه می کنیم.

جدول (١-١)

t	i=0 X=0	i=1 X=0.1	i=2 X=0.2	i=3 X=0.3	i=4 =0.4	i=5 =0.5
(j=0) t=0.000	0	0.2000	0.4000	0.6000	0.8000	1.000
(j=1) t=0.001	0	0.2000	0.4000	0.6000	0.8000	0.9600
(j=2) t=0.002	0	0.2000	0.4000	0.6000	0.7960	0.9280
(j=3) t=0.003	0	0.2000	0.4000	0.5996	0.7896	0.9016
(j=4) t=0.004	0	0.2000	0.4000	05986	0.7818	0.8792
(j=5) t=0.005	0	0.2000	0.3999	0.5971	0.7732	0.8597
. . . .				.		
(j=10) t=0.01	0	0.1996	0.3968	0.5822	0.7281	0.7867
. . . .						
(j=20) t=0.02	0	0.1938	0.3781	0.5373	0.6486	0.6891

جواب تحلیلی حساب معادله دیفرانسیل نسبی که در شرایط داده شده صدق می کند به صورت زیر است:

$$u(x,t)=\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(\sin(\frac{1}{2}n\pi))(\sin n\pi x)\exp(-n^2\pi^2 t)$$

این جواب را با جواب عددی در x=0.3 مقایسه می کنیم.

جدول (١-٢)

	جواب عددی	جواب تحلیلی	خطای مطلق	درصد خطای نسبی
t=0.005	0.5971	0.5966	0.0005	0.08
t =0.01	0.5822	0.5799	0.0023	0.4
t =0.02	0.5373	0.5334	0.0039	0.07
t =0.10	0.2472	0.2444	0.0028	1.1

با توجه به جدول (۱-۲) مشاهده می کنید. جواب عددی در x=0.3 به ازای مقادیر مختلف

همچنین جواب را با جواب عددی در x=0.5 نیز مقایسه می کنیم.

جدول(۱-۳)

	جواب عددی	جواب تحلیلی	خطای مطلق	درصد خطای نسبی
t =0.005	0.8597	0.8404	0.0193	2.3
t =0.01	0.7867	0.7743	0.0124	1.4
t =0.02	0.6891	0.6809	0.0082	1.2
t =0.10	0.3056	0.3021	0.0035	1.2

همان طور که در جدول مشاهده می شود. در x=0.5 اختلاف نسبتا زیاد است، زیرا مقدار آغازی در این نقطه مشتق ندارد.

حالت دوم :

قرار می دهیم $r=\frac{1}{2}=0.5, h=0.1, k=0.005$ با جایگزینی در معادله (۱-۱۳) خواهیم داشت:

(۱-۱۵) $u_{i,j+1}=\frac{1}{2}(u_{i-1,j}+u_{i+1,j})$ جواب در این معادله در جدول (۱-۴) آمده است.

جدول (۱-۴)

	i=0 X=0	i=1 X=0.1	i=2 X=0.2	i=3 X=0.3	i=4 X=0.4	i=5 X=0.5
t=0.000	0	0.2000	0.4000	0.6000	0.8000	1.000
t=0.005	0	0.2000	0.4000	0.6000	0.8000	0.8000
t=0.010	0	0.2000	0.4000	0.6000	0.7000	0.8000
t=0.015	0	0.2000	0.4000	0.5500	0.7000	0.7000
t=0.020	0	0.2000	0.3750	0.5500	0.6250	0.7000
⋮						
t=0.100	0	0.0949	0.1717	0.2484	0.2778	0.3071

جدول (۱-۵)

	جواب عددی در x=0.3	جواب تحلیلی در x=0.3	خطای مطلق	درصد خطای نسبی
t=0.005	0.6000	0.5966	0.0034	0.57
t=0.01	0.6000	0.5799	0.0201	3.5
t=0.02	0.550	0.5334	0.0166	1.3
t=0.10	0.2484	0.2444	0.0040	1.6

با توجه به جدول فوق جواب عددی تقریب خوبی برای جواب معادله دیفرانسیل نسبی نیست.

حالت سوم:

قرار می دهیم $r=\frac{k}{h^2}=1, h=0.1, k=0.01$ و با جا گذاری در معادله (۱-۱۳) خواهیم داشت:

$$u_{i,j+1}=u_{i-1,j}-u_{i,j}+u_{i+1,j} \quad (۱-۱۶)$$

جدول (۱-۶)

	i=0 X=0	i=1 X=0.1	i=2 X=0.2	i=3 X=0.3	i=4 X=0.4	i=5 X=0.5
t=0.01	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
t=0.02	0	0.2	0.4	0.6	0.8	0.6
t=0.03	0	0.2	0.4	0.6	0.4	1.0
t=0.04	0	0.2	0.4	0.2	1.2	0.2
t=0.05	0	0.2	0.4	1.4	1.2	2.6

نتیجه : این سه حالت نشان می دهد، مقدار r مهم است و روش صریح تنها برای $0 < r \leq \frac{1}{2}$ کاراست.

(اسمیت[۱]، ۱۹۸۴:۱۷-۱۲)

۱-۲-۵ روش ضمنی کرانک نیکلسون

روش صریح از نظر محاسبه ای ساده است ولی یک اشکال مهم دارد و آن اینکه نمو زمان یعنی $\delta t = k$ لزوما باید خیلی کوچک باشد زیرا فقط برای $0 < \frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}$ معتبر است. کرانک ونیکلسون در سال ۱۹۴۷ روشی پیشنهاد کردند که حجم محاسبات کم و به ازای هر مقدار r همگرا و پایدار است. $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ را بدین صورت تقریب زدند.

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \frac{1}{2}\left\{\frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2} + \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}\right\}$$

ولذا (۱-۱۷)

$$-ru_{i-1,j+1} + (2+2r)u_{i,j+1} - ru_{i+1,j+1} = ru_{i-1,j} + (2-2r)u_{i,j} + ru_{i+1,j}$$

که در آن $r = \frac{k}{h^2}$

۱.Smith

سـمت چـپ معادلـه (۱–۱۷) شـامل ۳ مجهـول و سـمت راسـت دارای ۳ مقـدار معلـوم u می باشد. اگر N نقطه درونـی شـبکه در طـول هـر سـطح زمـان داشـته باشـیم، آنگـاه بـرای j=0 و i=1,2,…N معادله (۱–۱۷) N معادله برای N مقدار مجهول خواهیم داشت که در اولین سطر زمان بـا مقادیر مرزی و آغازین معلوم معین می شوند. به طور مشابه برای j=1، N تعداد مجهـول u در طـول دومین سطرهای زمان با مقادیر معلوم درسطر اول محاسبه مـی شـود بـه همـین ترتیـب مقـادیر u در سطرهای دیگر معین می شود چون این روش مقادیر مجهول را با دستگاه معادلات محاسبه می کند. روش ضمنی (غیر صریح) نامیده می شود.

مثال : با استفاده از روش کرانک و نیکلسون جواب عددی معادله زیر را بـا شـرایط داده شـده محاسبه می کنیم. شرایط آغازی

$$1)\ u(x,0)=2x \qquad 0\le x\le\frac{1}{2}$$

$$2)\ u(x,0)=2(1-x) \qquad \frac{1}{2}\le x\le 1$$

شرایط مرزی

$$3)\ u(0,t)=u(1,t)=0 \qquad t\ge 0$$

حل : قرار می دهیم $h=\frac{1}{10},k=\frac{1}{100}$ ولذا $r=\frac{k}{h^2}=1$ با جاگذاری در معادله (۱–۱۷) داریم : (۱–۱۸)

$$-u_{i-1,j+1}+4u_{i,j+1}-u_{i+1,j+1}=u_{i-1,j}+u_{i+1,j}$$

$u_{i,j+1}$ را برای (i=1,2,…,9) با u_i مشخص می کنیم. البته این مساله متقارن است یعنی

$u_4=u_6$ $\qquad$ $u_3=u_7$

مرحله اول : i=1 و j=0 با توجه به اینکه u_0 صفر است، دستگاه معادله زیر را خواهیم داشت:

$-0+4u_1-u_2=0+0.4$