دانشگاه بیرجند

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد

رشته‌ی ریاضی کاربردی (تحقیق در عملیات)

عنوان:

شرایط بهینگی کاروش-کان-تاکر در مسائل برنامه‌ریزی چندهدفی با توابع هدف فازی‌مقدار

استاد راهنما:

دکتر حسن حسن‌پور

استاد مشاور:

دکتر مسعود امان

نگارنده:

نغمه صلواتی‌نژاد

شهریور ماه 1390

بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیم به همسر عزیزم

پدر و مادر مهربانم

و فرزند دلبندم، یسنا

قدردانی

اکنون که به لطف خداوند متعال پایان نامه‌ی حاضر به انجام رسیده است، لازم می‌دانم بدین وسیله از زحمات بی دریغ و راهنمایی‌های سودمند استاد ارجمندم جناب آقای دکتر حسن حسن‌پور که همواره دلسوزانه پشتیبان من بودند تشکر و قدردانی نمایم. همچنین از خانواده‌ی گرامی‌ام که همواره در طول دوران تحصیل مشوق و یاورم بودند سپاسگزاری می‌کنم.

شرایط بهینگی کاروش-کان-تاکر در مسائل برنامه‌ریزی چندهدفی با توابع هدف فازی‌مقدار

چکیده

در این پایان‌نامه شرایط بهینگی کاروش-کان-تاکر(KKT) برای مسائل برنامه‌ریزی چندهدفی فازی بررسی شده‌اند. با تعریف یک رابطه‌ی ترتیب روی رده‌ی همه‌ی اعداد فازی، مفهوم جواب بهینه معرفی شده است. از آنجا که این رابطه‌ی ترتیب یک رابطه‌ی ترتیب جزئی می‌باشد، مفهوم جواب پیشنهاد شده در این پایان‌نامه از همان مفهوم جواب برای مسائل برنامه‌ریزی چندهدفی معمولی به نام جواب بهینه‌ی پارتو پیروی می‌کند. به منظور معرفی حد و مشتق توابع فازی‌مقدار، از متر هاسدورف برای تعریف فاصله‌ی دو عدد فازی و از تفاضل هوکوهارا برای تعریف تفاضل دو عدد فازی استفاده شده است. با معرفی ضرایب لاگرانژ، شرایط بهینگی KKT ابتدا برای مسائل برنامه‌ریزی چندهدفی با توابع هدف فازی‌مقدار و سپس برای مسائل برنامه‌ریزی چندهدفی با توابع هدف و توابع محدودیت فازی‌مقدار استخراج شده‌اند.

واژه‌های کلیدی: *شرایط کاروش-کان-تاکر، ضرایب لاگرانژ، متر هاسدورف، تفاضل هوکوهارا، تابع فازی‌مقدار،* $H-$*مشتق پذیری.*

فهرست مطالب

پیشگفتـــــار

دستیابی به بهترین نتیجه در شرایط داده شده را بهینه‌سازی[1] می‌گویند. در طراحی، ساخت و نگهداری هـر سیسـتم مهندسی، مهندسان باید تصمیمات تکنولوژیکی و مدیریتی بسیاری را در چند مرحله بگیرند. هـدف نهـایی چنـین تصمیماتی، کمینه کردن هزینه‌های لازم و یا بیشینه کردن سود موردنظر است. از طرفی هزینه‌های لازم و یـا سـود موردنظر را در هر وضعیت عملی می‌توان به صورت تابعی از متغیرهای تصمیم بیان کرد. لذا بهینه‌سـازی در واقـع فرایند یافتن شرایطی است که مقدار بیشینه یا کمینه‌ی یک تابع را به دست می‌دهد. برای حل گونـه‌هـای مختلـف مسائل بهینه‌سازی روش‌هـای بهینـه‌سـازی مختلفـی وجـود دارد. روش‌هـای جسـتجوی جـواب بهینـه را بـا عنـوان روش‌های برنامه‌ریزی ریاضی نیز می‌شناسند که عموماً به صورت بخشی از تحقیق در عملیات[2] مطالعه می‌شوند.

تاریخچه‌ی روش‌های بهینه‌سازی را می‌توان در زمان نیوتن[3]، لاگرانژ[4] و کوشی ردیابی کرد. تـلاش‌هـای کـان[5] و تاکر[6] در سال 1951 برای شرایط لازم و کافی جـواب بهینـه‌ی مسـائل برنامـه‌ریـزی ریاضـی، زیربنـای تحقیقـات بعدی در برنامه‌ریزی غیرخطی شد.

---

۱ *Optimization*
۲ *Operations research*
۳ *Newton*
۴ *Lagrange*
۵ *Kuhn*
۶ *Tuck er*

موضوع بهینه‌سازی تصادفی[7]، وقایع تصادفی در مسائل بهینه‌سازی را به کمک نظریه‌ی احتمال مورد بحث قرار می‌دهد. درکتاب‌های نوشته شده توسط بیرگ[8] و لاویکس[9] [5]، کال[10][10]، پریکوپا[11][14]، استانکامیناسیان[12] [22] و واجدا[13] [24] روش‌های مفید زیادی برای حل مسائل بهینه‌سازی تصادفی معرفی شده است.

یکی از رویکردهای مسائل بهینه‌سازی نامعین و نادقیق بهینه‌سازی بازه مقدار[14] و بررسی مسائل برنامه‌ریزی خطی و غیرخطی بازه مقدار می‌باشد. تاناکا[15] در سال 1984 و رومل فانگر[16] [16] در سال 1989 در مورد مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی با ضرایب بازه‌ای در تابع هدف بحث کردند. تونگ[17] در سال 1994 و سنگوپتا[18] در سال 2001 مسائل برنامه‌ریزی خطی ای را مورد بررسی قرار دادند که در آن‌ها ضرایب تابع هدف و قیود بازه‌ای بودند. در سال‌های اخیر افرادی چون وو[19] [30،29،26] کارهایی در زمینه‌ی مسائل بهینه‌سازی چندهدفی بازه مقدار انجام داده‌اند.

نظریه‌ی مجموعه‌های فازی در سال 1965 توسط پروفسور لطفی عسکرزاده معروف به "زاده" ارائه شد و آثار زیادی از وی به نگارش در آمد[32،31]. نظریه‌ی مجموعه‌های فازی نظریه‌ای برای اقدام در شرایط عدم اطمینان است. این نظریه قادر است بسیاری از مفاهیم، متغیرها و سیستم‌هایی را که نادقیق و مبهم هستند، چنانچه در عالم واقع اکثراً چنین است، فرمول بندی کند و زمینه را برای استدلال، استنتاج،کنترل و تصمیم گیری در

---

۷ *Stochastic optimization*
۸ *Birge*
۹ *Louveaux*
۱۰ *Kall*
۱۱ *P rekopa*
۱۲ *St ancu – Minasian*
۱۳ *Vajda*
۱۴ *Interval valued optimization*
۱۵ *Tanaka*
۱۶ *Rommelfanger*
۱۷ *Tong*
۱۸ *Sengupta*
۱۹ *Wu*

شرایط عدم اطمینان فراهم آورد. در حقیقت با کشف این نظریه توسط زاده، ابزارهایی فراهم آمد که به وسیله‌ی آن‌ها می توان نحوه‌ی استدلال و تصمیم گیری انسان را صورتبندی ریاضی بخشید و از الگوهای ریاضی بدست آمده، در زمینه‌های گوناگون علوم و تکنولوژی استفاده کرد. یکی از این الگوها، مدل برنامه‌ریزی فازی[20] می‌باشد.

آن دسته از مسائل بهینه‌سازی که ضرایب آن‌ها اعداد فازی می‌باشند، مسائل بهینه‌سازی فازی مقدار[21] نامیده می‌شوند. موضوع بهینه‌سازی فازی، وقایع با ماهیت فازی را در مسائل بهینه‌سازی به کمک نظریه‌ی مجموعه‌های فازی مورد بحث قرار می‌دهد. مجموعه مقالات نوشته شده توسط اسلوینسکی[22] [19] و دلگادو[23] [6] شامل مسائل اصلی در این زمینه هستند. همچنین آثار لائی[24] [12] و وانگ[25] شامل مطالعات جامعی است. همین طور اسلوینسکی مقایسه‌هایی بین بهینه‌سازی فازی و بهینه‌سازی تصادفی برای مسائل برنامه‌ریزی چندهدفی[26] انجام داده است. اینگوچی[27] و رامیک[28] [9] نیز مرور مختصری بر بهینه‌سازی فازی و یک مقایسه با بهینه‌سازی تصادفی در مسئله‌ی انتخاب سهام انجام داده‌اند.

شرایط بهینگی KKT برای مسئله‌ی بهینه‌سازی تک هدفی با تابع هدف فازی مقدار توسط هسین-چونگ وو[29] [27] مورد بحث قرارگرفته است. در این پایان نامه که تحلیل و تعمیم مقاله‌ی نوشته شده توسط وو [28] می‌باشد، مسائل بهینه‌سازی چندهدفی با توابع هدف فازی مقدار را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

---

۲۰ *Fuzzy programming*

۲۱ *Fuzzy valued optimization problems*

۲۲ *Slowinski*

۲۳ *Delgado*

۲۴ *Lai*

۲۵ *Hwang*

۲۶ *Multiobjective programming*

۲۷ *Inuiguchi*

۲۸ *Ramik*

۲۹ *Hsien – Chung Wu*

در فصل اول، مقدمات موردنیاز از مجموعه‌های فازی معرفی می‌شوند. تعدادی از ویژگی‌های اصلی و محاسباتی اعداد فازی مطرح شده و پس از آن متر مشهور هاسدورف برای تعریف فاصله بین دو عدد فازی معرفی می‌شود. سپس به کمک این متر حد و پیوستگی توابع فازی مقدار تعریف می‌شود. همین طور مفهوم تفاضل هوکوهارا برای تعریف تفاضل دو عدد فازی معرفی می‌شود و به کمک آن و مفهوم حد، مشتق یک تابع فازی تعریف می‌شود. سپس مسئله‌ی برنامه‌ریزی چندهدفی با توابع هدف فازی مقدار فرمول بندی شده و مفهوم جواب برای آن ارائه می‌گردد. در فصل دوم، با معرفی ضرایب لاگرانژ، شرایط KKT برای مسئله‌ی فرمول بندی شده ارائه می‌شوند. سپس در فصل سوم مسئله‌ی برنامه‌ریزی چندهدفی با توابع هدف فازی‌مقدار به مسئله‌ای با توابع هدف و توابع محدودیت فازی مقدار تعمیم داده شده و شرایط KKT برای آن بررسی می‌گردد[30]. در نهایت در فصل چهارم چند مثال عددی ارائه می‌شوند.

[۳۰] مطالب این فصل از نگارنده است.

فصل 1

مفـــاهیم و مقدمات اولیه

1.1 . مقدمه

اغلب پدیده‌های جهان به عواملی غیرقطعی وابسته اند که به طور دقیق قابل وصف نیستند. بسیاری از استنتاج‌های بشر بر پایه‌ی منطق دو ارزشی قابل بیان نیستند. به عنوان مثال گفته می‌شود، فلان شخص قدبلند یا راستگو است، یا آسمان ابری است. برای تعیین ارزش درستی این گزاره‌ها در مواقعی که این عبارات کاملاً صحیح یا غلط نیستند نمی‌توان منطق دو ارزشی را به کار برد. به دنبال این مسئله هستیم که زمانی که آسمان نه کاملاً ابری و نه کاملاً آفتابی است چگونه می‌توان گفت مثلاً 70درصد یا 10درصد آسمان ابری است؟ در این شرایط گزاره‌ی" آسمان ابری است ." صحیح است یا غلط؟ چنین مسائلی در جهان واقعی را نمی‌توان مطابق با منطق دو یا چندارزشی تفسیر کرد. بنابراین ابزاری برای توصیف غیرقطعی بودن یا ابهام در پدیده‌های جهان واقعی موردنیاز است. با معرفی نظریه‌ی مجموعه‌های فازی توسط پرفسور زاده در سال 1965 با مطرح کردن مفهوم تعلق به یک مجموعه با درجه ای از عضویت، زمینه‌های مختلفی از غیرقطعی بودن مورد بررسی قرار گرفتند.

در ایـن فصـل بعـد از ارائـه‌ی تاریخچـه‌ای کوتـاه و کاربردهـایی از نظریـه‌ی فـازی، بـه معرفـی مفهـوم مجموعه‌های فازی، اعداد فازی و توابع فـازی مـی‌پـردازیم. سـپس مفهـوم جـواب‌هـای بهینـه‌ی پـارتو[1] (جواب کارا[2]) را برای مسائل بهینه‌سازی چندهدفی معرفی می‌کنیم.

2.1. تاریخچه

در سال 1965، دانشمند ایرانی الاصلی بـه نـام علـی لطفـی‌عسـکرزاده، کـه بعـدها بـه نـام زاده در جهـان معـروف شـد، اسـتاد دانشـگاه برکلـی آمریکـا، در مجلـه‌ی اطلاعـات وکنتـرل، مقالـه‌ای تحـت عنـوان مجموعه‌های فازی (*Fuzzy Sets*) منتشر ساخت. این مقاله مبنای توسعه و تـرویج ایـن نظریـه بـه جهـان شد. مدت‌ها بود که او با نظریه‌ی سیستم‌ها سر وکار داشت و ملاحظه می‌کردکه هرچـه پیچیـدگی یـک سیستم بیشتر شود حل و فصل آن به وسیله‌ی ریاضیات رایج، مشکل تر است و لذا به ریاضـیات دیگـری برای حل این مشکل نیاز است این ریاضیات باید بتواند ابهام موجود در پیچیـدگی یـک سیسـتم را مـدل سازی کند و با محاسبات خود آن را تحت کنترل و نظـارت درآورد و رفتـار آن را پـیش گـویی کنـد و بالاخره درسال 1965 به این موفقیت دست یافت. اولین دانشجویی کـه در جهـان رسـماً دوره‌ی دکتـری خود را در این رشته در سال1972 میلادی زیر نظر پروفسور زاده به اتمام رسانید، مرحوم ولی‌الله طحـانی بود. ایشان اولین کسی بودکه در ایران به تحقیق فازی پرداخت. اما نهال این رشـته‌ی علمـی وادبیـات آن در ایران و در دانشگاه کرمان در سال 1366 کاشته شد. همچنین اولـین فـارغ التحصـیل دکتـری ریاضـی ایران در رشته‌ی جبر فازی بود.

لطفی‌زاده در پاسخ به این سوال که چرا کلمه‌ی فازی را برای این نظریه انتخاب کـرده اسـت مـی‌گویـد: «من کلمه‌ی فازی را انتخاب کردم چون احساس می‌کردم که این کلمه با بیشترین دقت، آنچه را کـه در

[1] *Pareto optimal solution*
[2] *Efficient solution*

این نظریه آمده است، توصیف می‌کند. من می‌توانستم کلمه‌ی محترمانه تری را که کم تر عوامانـه باشـد انتخـاب کـنم. پـس در مـورد کلمــه‌هــای نـرم (*Soft*)، غیـر دقیـق (*Unsharp*)، کـدر و درهــم و برهم (*Blurred*) و یا قابل ارتجاع و انعطاف (*Elastic*) فکر کردم اما هیچ کدام آن چه را که در ذهـن من بود به دقت توصیف نمی‌کردند. پـس در نهایـت کلمـه‌ی «فـازی» (*Fuzzy*) را در ایـن جایگـاه قـرار دادم.»

از روز آغازین ارائه‌ی تفکر فازی بیش از 40 سال می‌گذرد. بـا انتشـار مقالـه‌ی زاده و مقالـه‌هـای بعـدی مربوط به آن موجی از مخالفت و انتقاد از سوی دانشمندان غربی به این دیـدگاه برانگیخته شـد. امـروزه از شدت مخالفت‌ها و بی اعتنایی‌ها به این منطق کاسته شده است. به خصوص از زمانی که تکنولوژی بـا مبانی فازی به خصوص در ژاپن پیشرفت‌های چشمگیری کرد و سـودآوری خـود را نشـان داد، انعطـاف نسبت به این نوع نگرش بیشتر شـده اسـت. امـروزه منطـق فـازی و نظریـه‌ی مجموعـه‌هـای فـازی اسـاس بسیاری از حوزه‌های علمی را به کلی دگرگـون کـرده اسـت. در حـوزه‌هـای ریاضـی، علـوم کـامپیوتر، هوش مصنوعی، پزشکی، حقوق، مدیریت، تکنولوژی و بسیاری دیگر از فعالیت‌هـای بشـری، تحـولات بسیار جالب توجه بوده اند و در این زمینه سرمایه گذاری‌های بسیاری به خصـوص در کشـورهای شـرق آسیا صورت گرفته است. قدرت دیدگاه جهانی فازی به متفکرینـی چـون ارسـطو و بـودا برمـی‌گـردد و آینده‌ی آن به مباحثی چون قانون، سقط جنین و هوشـمندی مـی‌رسـد. بـه ایـن ترتیـب ممکـن اسـت در آینده ما با ماشین‌های زیرکی به سر بریم که می‌توانند در هر مسابقه ای ما را شکست دهند.

3.1 . کاربردها

به کمک منطق فازی عبارت‌هایی مثل نسبتاً گرم یا خیلی سرد فرمول بندی شده و برای پردازش توسـط کامپیوترها آماده می‌شوند. منطق فازی در واقع روش‌هـای اسـتدلال و نتیجـه‌گیـری مغـز را مـدل‌سـازی می‌کند.

شاید این مثال از خود پروفسور زاده جالب باشد:

"منطق کلاسیک شبیه به شخصی است که با یک لباس رسمی مشکی، بلوز سفید آهاردار، کروات مشکی، کفش‌های براق و غیره به یک مهمانی رسمی‌آمده است و منطق فازی تا اندازه ای شبیه به فردی است که با لباس غیررسمی، شلوار جین، تی شرت و کفش های پارچه ای آمده است. این لباس را درگذشته نمی‌پذیرفتند. اما امروز، جور دیگری است."

منطق فازی یک منطق کاربردی است و در رشته‌های متنوعی مانند هوش مصنوعی و نظریه‌ی کنترل کاربرد دارد. نظریه‌ی کنترل شاخه‌ای از ریاضی کاربردی و مهندسی است که به رفتار سامانه‌های پویا از هدایت مترو گرفته تا پرونده‌های جرم‌شناسی و مطالعات روان‌شناسی و جامعه‌شناختی می‌پردازد. کاربرد علم نظریه‌ی فازی از حدود علوم ریاضی و مهندسی کنترل فراتر رفته و به بسیاری از رشته‌های علمی دیگر قدم گذاشته است. مدیریت صنعتی، اقتصاد، مهندسی پزشکی و مهندسی صنایع از رشته‌های علمی است که کاربردهای فازی در آن در حال گسترش می‌باشد. منطق فازی به ویژه در صنعت کاربردهای فراوان پیداکرده است. مثلاً در شبکه‌های عصبی، کامپیوتر، منطق، تحقیق درعملیات، شبیه سازی، آمار، شیمی، محاسبات نرم، تجزیه و تحلیل داده‌ها، پایگاه های داده‌ها، سیستم های خبره، رایانه‌های فازی، ساخت و تکمیل تراشه‌ها، کشاورزی وچندین زمینه دیگر.

از دیگر زمینه‌هایی که مبحث فازی در آن به آرامی اما به صورت ریشه ای و بنیادی در حال گسترش است، رشته‌ی علوم تربیتی، جامعه شناسی، علم اخلاق و زیبایی‌شناسی می‌باشد.

هم اکنون سیستم‌های واقعی فازی و یا بسته‌های نرم افزاری فازی ساخته شده اند. مهندسین ژاپنی اولین محصولات تجاری فازی باهوش را طراحی کردند. به زودی دوربین‌های فازی، ماشین لباسشویی، اجاق مایکرو و کاربراتورهای فازی و صدها وسیله باهوش دیگر وارد بازار می‌شوند.

کاربرد منطق فازی در یک مسئله سه مرحله دارد:

1. تبدیل مقادیر عددی به مجموعه‌ای از مقادیر فازی،

2. اثر کردن مجموعه‌ای از قواعد استنتاجی (قانون‌های اگر-آن‌گاه)،

3. باز گرداندن مقادیر فازی و تبدیل آن‌ها به مقادیر عددی.

به عنوان مثال یک دستگاه تهویه‌ی هوای بسیار ساده را در نظر بگیرید که از یک دماسنج برای تشخیص دمای اتاق و یک پنکه برای تنظیم دمای اتاق تشکیل شده است.

ابتدا دستگاه به کمک دماسنج، دمای اتاق را می‌خواند. سپس درجه‌ی عضو بودن این دما را به هر یک از مجموعه‌های خیلی سرد، سرد، معمولی و گرم اندازه‌گیری می‌کند. تا این‌جا مرحله‌ی اول کار یعنی فازی‌سازی انجام شده است. در مرحله‌ی بعد قانون‌های زیر روی این مقادیر فازی عمل می‌کند:

اگر هوا خیلی سرد است آن‌گاه پنکه را خاموش کن.

اگر هوا سرد است آن‌گاه پنکه را متوقف کن.

اگر هوا معمولی است آن‌گاه سرعت پنکه را کم کن.

اگر هوا گرم است آن‌گاه سرعت پنکه را زیاد کن.

در مرحله‌ی بعد کافی است برای دستگاه مشخص شود که سرعت کم یا زیاد یا خاموش دقیقاً به معنی چه عددی است. در این‌جا مرحله‌ی آخر کار یعنی باز گرداندن مقادیر فازی، انجام شده است. با انجام مرتب این‌کار توسط دستگاه تهویه، دمای اتاق همیشه مطلوب خواهد بود.

در ادامه به برخی از کاربردهای این نظریه اشاره می‌شود:

1. دستگاه‌های تهویه‌ی هوا: دستگاه‌ها طوری تنظیم می‌شود که به تدریج دمای هوای اتاق به دمای مناسب برسد.
2. کنترل عملکرد موتور وسیله‌ی نقلیه برای به دست آوردن بازده بیشتر و مصرف سوخت کمتر.
3. خوراک پزها، ماشین‌های لباس شویی، ماشین‌های ظرف شویی و به طور کلی اغلب لوازم خانگی. مثلاً در مورد ماشین لباس شویی، با در نظر گرفتن اندازه، جنس و میزان کثیفی، سرعت ماشین و زمان شستشو را برنامه ریزی می‌کند.
4. بالابرها.
5. بازی‌های هوش مصتوعی.
6. اتاق‌های گفت و گو.
7. کنترل سامانه‌های حمل و نقل شهری مانند مترو.
8. تشخیص‌های طبی که در آن‌ها تاریخچه‌ی بیماری به دلیل تشخیص‌های اشتباه قبلی یا به دلیل ناقص بودن پرونده‌ی بیمار یا به هر دلیل دیگر، مبهم است.

4.1 . مجموعه‌های فازی

فرض کنید X یک مجموعه‌ی مرجع دلخواه باشد. تابع نشانگر(مشخصه) زیرمجموعه‌ی معمولی A از X یک تابع از X به $\{0,1\}$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1 & x\in A,\\ 0 & x\notin A.\end{cases}$$

حال اگر برد تابع نشانگر را از مجموعه‌ی دو عنصری $\{0,1\}$ به بازه‌ی $[0,1]$ توسعه دهیم، اصطلاحاً یک زیرمجموعه‌ی فازی از X خواهیم داشت که آن را با $\tilde{A}$ نمایش می‌دهیم. تابع $\chi_{\tilde{A}}$ به هر x از X،

عـددی را از بـازه‌ی $[0,1]$ نسـبت مـی‌دهـد. ایـن تـابع را تـابع عضـویت $\tilde{A}$ مـی‌نـامیم و آن را بـا $\mu_{\tilde{A}}(x)$ یا $\tilde{A}(x)$ نشـان مـی‌دهـیم. بنـابراین یـک مجموعـه‌ی فـازی[3] ماننـد $\tilde{A}$، مجموعـه ای اسـت کـه درجـه‌ی عضویت اعضای آن می‌تواند به طور پیوسته از $[0,1]$ اختیـار شـود. ایـن مجموعـه بـه طـور کامـل و یکتـا توسط تابع عضویت مشخص می‌شود، تـابعی کـه بـه هـر عنصـر از X ، یـک عـدد را از بـازه‌ی $[0,1]$ بـه عنوان درجه‌ی عضویت آن عنصر در مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ نسبت مـی‌دهـد. نزدیکـی مقـدار $\mu_{\tilde{A}}(x)$ بـه عدد یک نشان دهنده‌ی تعلق بیشتر x به مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ است و برعکس، نزدیکی آن به صـفر نشـان دهنده‌ی تعلق کمتر x به $\tilde{A}$ مـی‌باشـد. بـه لحـاظ شـهودی $\mu_{\tilde{A}}(x)$ را مـی‌تـوان درجـه‌ی پـذیرش مـا در قبول x به عنوان عضوی از $\tilde{A}$ در نظر گرفت. در حالت حـدی چنانچـه x کـاملاً عضـو $\tilde{A}$ باشـد داریـم: $\mu_{\tilde{A}}(x)=1$ و چنانچه x عضو $\tilde{A}$ نباشد داریم: $\mu_{\tilde{A}}(x)=0$. پس مجموعه‌های معمولی و توابـع نشـانگر آن‌ها، حالت خاصی از مجموعه‌های فازی و توابع عضویت آن‌ها هستند.

اگر X مجموعه‌ی مرجع باشد و اعضای آن را با x نمایش دهیم، مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ در X به وسـیله‌ی زوج‌های مرتبی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\tilde{A}=\{\ (x,\mu_{\tilde{A}}(x)):x\in X\ \}$$

$\mu_{\tilde{A}}(x)$ مقدار تابع عضویت و یا درجه‌ی عضویت x می‌باشد که میزان تعلق x به مجموعـه‌ی فـازی $\tilde{A}$ را نشان می‌دهد.

هنگامی که X یـک مجموعـه‌ی متنـاهی (و یـا نامتنـاهی شـمارا) بـه صـورت $\{x_1,\ldots,x_n\}$ باشـد، یـک زیرمجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ از X به صورت زیر نیز نشان داده می‌شود:

$$\tilde{A}=\{\ \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_1)}{x_1},\ldots,\frac{\mu_{\tilde{A}}(x_n)}{x_n}\ \}$$

[3] Fuzzy set

مثـال 1. 4. 1. فـرض کنیـد $X=\{1,2,3,4,5\}$، در ایـن صـورت $\tilde{A}$ بـا تـابع عضـویت زیـر یـک زیرمجموعه‌ی فازی از X می‌باشد:

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases} 0/9 & x=1 \\ 0/6 & x=2 \\ 0/1 & x=3 \\ 0 & x=4,5 \end{cases}$$

که می‌تواند ویژگی کوچک بودن را در بین اعضای X نشان دهد. تابع عضویت $\tilde{A}$ را می‌توان به صورت‌های زیر نیز نوشت:

$$\tilde{A}=\left\{\frac{0/9}{1},\frac{0/6}{2},\frac{0/1}{3},\frac{0}{4},\frac{0}{5}\right\} \quad ، \quad \tilde{A}=\{\ (1,0/9),(2,0/6),(3,0/1),(4,0),(5,0)\ \} .$$

تعریف 1. 4. 1. [31] تکیه گاه مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ با $Supp\,\tilde{A}$ نمایش داده شده و به صورت زیر تعریف می‌شود: $Supp\,\tilde{A}=\{\ x\in X : \mu_{\tilde{A}}(x)>0\ \}$. مقدار $h_{\tilde{A}}=\underset{x\in X}{Sup}\,\mu_{\tilde{A}}(x)$ ارتفاع مجموعه‌ی $\tilde{A}$ نام دارد. اگر ارتفاع مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ برابر یک باشد، آنگاه $\tilde{A}$ نرمال نامیده می‌شود. در غیر این صورت $\tilde{A}$ زیر نرمال نام دارد.

تعریف 1. 4. 2. [31] اگر برای هر $x\in X$ ، $\mu_{\tilde{A}}(x)=0$ ، آنگاه مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ تهی و اگر برای هر $x\in X$ ، $\mu_{\tilde{A}}(x)=1$ ، آنگاه مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ تام نام دارد.

تعریف 1. 4. 3. [31] فرض کنید $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ دو مجموعه‌ی فازی دلخواه باشند. در این صورت،

1) دو مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ برابر نامیده می‌شوند هرگاه:

$$\forall x\in X : \mu_{\tilde{A}}(x)=\mu_{\tilde{B}}(x) .$$

2) مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ زیر مجموعه‌ی مجموعه‌ی فازی $\tilde{B}$ نام دارد هرگاه:

$$\forall x\in X : \mu_{\tilde{A}}(x)\le\mu_{\tilde{B}}(x) .$$

3) اجتماع $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ به صورت یک مجموعه‌ی فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود: