دانشکده علوم ریاضی و آمار

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض
گرایش هندسه– توپولوژی جبری

عنوان :

گروه‌های بنیادین توپولوژیکی و برخی از فضاهای پوششی تعمیم یافته

استاد راهنما :

دکتر بهروز مشایخی فرد

استاد مشاور :

دکتر هانیه میرابراهیمی

نگارنده :

طیبه نصری

فهرست مندرجات

مقدمه

مفهوم توپولوژی روی گروه بنیادین یک فضا اولین بار در سال ۱۹۳۵ توسط هرویچ [۱] [۱۱] مطرح شد و پس از آن در سال ۱۹۵۰ دوگونجی [۲] [٦] یک توپولوژی روی گروه های بنیادین فضاهای خاصی قرار داده و نتایجی را در مقاله خود ارائه داد. پس از آن در سال ۲۰۰۲ بیس [۳] [۱] توپولوژی دیگری روی گروه بنیادین فضاها معرفی کرد و نتایجی را بدست آورد که می‌توان گفت کار او تعمیمی از نتایج ارائه شده توسط دوگونجی محسوب می‌شود. توپولوژی‌ای که بیس معرفی کرده توپولوژی مناسبی است زیرا با قراردادن این توپولوژی روی گروه بنیادین برخی از قضایای گروه بنیادین در این حالت نیز برقرارند. به عنوان مثال این توپولوژی بر فضاهای از یک نوع هموتوپی یکسان عمل می‌کند. همچنین بیس در مقاله خود نشان داد که با گذاشتن این توپولوژی روی گروه بنیادین، این فضا یک گروه توپولوژیک است. اما در سال ۲۰۰٦ فابل [۴] [۱۰] و در سال ۲۰۰۹ کلکات و مکارتی [۵] [۴] به استدلال بیس در این مورد ایراد گرفتند و در مقاله اخیر نشان داده شد که گروه بنیادین توپولوژیک یک فضای همگن است. و به عنوان یک مسئله حل نشده این سؤال مطرح می‌شود که آیا گروه بنیادین توپولوژیک یک گروه توپولوژیک است؟ از ترکیب قضایای بیس، کلکات و مکارتی می‌توان این نتیجه را گرفت که یک تابعگون از رسته‌ی فضاهای نقطه‌دار به رسته‌ی فضاهای همگن وجود دارد. بیس در مقاله خود [۱]

---

[۱] Hurewicz

[۲] Dugundji

[۳] Biss

[۴] Fabel

[۵] Calcut and Mccarthy

قضیه‌ی مهمی را بیان کرد که *شرط لازم و کافی برای اینکه فضای* X *همبند ساده نیم موضعی باشد آن است که گروه بنیادین توپولوژیک* X *گسسته باشد.* استدلال بیس برای اثبات این قضیه دارای اشکالاتی بود. در سال ۲۰۰۵ فابل [۸] با ارائه یک مثال نقض نشان داد که قضیه فوق در حالت کلی برقرار نیست و با اضافه کردن شرط همبند مسیری موضعی روی X این قضیه را در حالتی که X فضای متریک باشد اثبات کرد. پس از آن در سال ۲۰۰۹ کلکات و مکارتی [۴] قضیه فابل را بدون شرط متریک اثبات کردند. بیس در مقاله خود مفهومی به نام تارسازی پوششی دقیق را معرفی می‌کند که تعمیمی از فضای پوششی است و نشان می‌دهد که *شرط لازم و کافی برای اینکه یک فضا دارای یک تارسازی پوششی دقیق جهانی باشد آن است که گروه بنیادین توپولوژیک آن ناهمبند مسیری کلی باشد.* سپس ازاین طریق پوشش های همبند فضای X را دسته بندی می‌کند.

این رساله شامل چهار فصل است. در فصل اول تعاریف و مفاهیم مقدماتی مورد نیاز این رساله با این فرض که خواننده با مفاهیم اولیه توپولوژی کارشناسی آشنا باشد، جمع آوری شده است. در فصل دوم به معرفی گروه بنیادین توپولوژیک و مطالعه ویژگی‌های آن می‌پردازیم. در فصل سوم تارسازی پوششی و تارسازی پوششی دقیق را معرفی می‌کنیم و به ارتباط آن با گروه بنیادین توپولوژیک می‌پردازیم. فصل چهارم کاربرد قضایای دو فصل قبلی است. در حقیقت در این فصل مثال هایی را ارائه می‌دهیم که برای آن‌ها فضای پوششی جهانی وجود ندارد، اما با استفاده از قضایای فصل سوم می‌توان وجود یا عدم تارسازی پوششی دقیق برای این دو فضا را تعیین کرد.

مقالاتی که در این رساله مورد استفاده قرارگرفتند به شرح زیر است.

1. D.K. Biss, The topological fundamental group and generalized covering space, *Topology Appl.* **124** (2002), 355-371.

2. J.S. Calcut and J.D. Mccarthy, Discreteness and homogeneity of the topological fundamental group, *Topology Proc.* **34** (2009), 339-349.

3. P. Fabel, The fundamental group of the harmonic archipelago, preprint, available at http://www2.msstate.edu/fabel/.

4. P. Fabel, Metric spaces with discrete topological fundamental group, *Topology Appl.* **154** (2007), 635-638.

5. P. Fabel, The topological Hawaiian earring group does not embed in the inverse limit of free groups, *Algebr. Geom. Topol.* **5**, Springer, (2005) 1585-1587.

6. P. Fabel, Topological fundamental group can distinguish spaces with isomorphic homotopy groups, *Topology Proc.* **30** (2006) 187-195.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

این فصل در سه بخش به پیشنیازهای مورد نیاز این رساله می‌پردازد.

۱.۱ مفاهیم جبری

در این بخش قصد داریم مفاهیم جبری که در این رساله مورد استفاده قرار گرفته است را بیان کنیم. در ابتدا به معرفی چند تابعگون می‌پردازیم.

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنیم $\mathcal{C}$ یک رسته[۱]ی دلخواه و A یک شی ثابت در آن باشد. دراین‌صورت

۱) تابعگون [۲]

$$\begin{array}{rccc} Hom(A,-): & \mathcal{C} & \longrightarrow & sets \\ & B & \longmapsto & Hom(A,B) \end{array}$$

یک تابعگون هموردِ[۳] از رسته‌ی $\mathcal{C}$ به رسته‌ی مجموعه‌هاست.

---

[۱] category
[۲] functor
[۳] covariant functor

۲) تابعگون

$$\begin{array}{rcl} Hom(-,A): \quad \mathcal{C} & \longrightarrow & sets \\ B & \longmapsto & Hom(B,A) \end{array}$$

یک تابعگون ناهمورد (پادورد)[۴] از رسته‌ی $\mathcal{C}$ به رسته‌ی مجموعه‌هاست.

تعریف ۲.۱.۱ در رسته‌ی $\mathcal{C}$ یک *دستگاه معکوس*[۵] با مجموعه‌ی اندیس‌گذار I عبارت است از مجموعه‌ای از اشیاء F_i و مجموعه‌ای از مورفیسم[۶]های $\psi_i^j : F_j \longrightarrow F_i$ برای $i \leq j$، به‌طوری که

۱) برای هر $i \in I$، مورفیسم $\psi_i^i : F_i \longrightarrow F_i$ همانی است.

۲) اگر $i \leq j \leq k$، آن‌گاه $\psi_i^k = \psi_j^k \circ \psi_i^j$. یا به عبارتی نمودار زیر جابه‌جایی است.

$$\begin{array}{ccc} F_k & \xrightarrow{\psi_i^k} & F_i \\ \psi_j^k \searrow & & \nearrow \psi_i^j \\ & F_j & \end{array}$$

دستگاه معکوس را با نماد $\{F_i, \psi_i^j\}$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳.۱.۱ فرض کنیم $\{F_i, \psi_i^j\}$ یک دستگاه معکوس در رسته‌ی $\mathcal{C}$ باشد. دراین‌صورت حد معکوس [۷] این دستگاه شیئی است در رسته $\mathcal{C}$ (که آن را با نماد $\varprojlim F_i$ نشان می‌دهیم) همراه با خانواده‌ای از مورفیسم‌های $\{\alpha_i : \varprojlim F_i \longrightarrow F_i\}$ به‌طوری که برای هر $i \leq j$، $\alpha_i = \psi_i^j \circ \alpha_j$. و برای هر شی X در رسته $\mathcal{C}$ همراه با خانواده دلخواهی از مورفیسم‌ها به صورت $\{f_i : X \longrightarrow F_i\}$ که برای هر $i \leq j$، در شرط $f_i = \psi_i^j \circ f_j$ صدق می‌کند، مورفیسم منحصربه‌فرد $\beta : X \longrightarrow \varprojlim F_i$ وجود خواهد داشت به‌طوری که در نمودار جابه‌جایی زیر صدق می‌کند.

---

[۴] contravariant functor
[۵] inverse system
[۶] morphism
[۷] inverse limit

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim F_i \arrow[dr, "\alpha_i"] \arrow[ddr, "\alpha_j"'] & & X \arrow[ll, dashed, "\beta"'] \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[ddl, "f_j"] \\
& F_i & \\
& F_j \arrow[u, "\psi_i^j"] &
\end{tikzcd}$$

اگر نگاشت‌های ψ_i^j موجود نباشند آن‌گاه $\varprojlim F_i = \prod_{i\in I} F_i$. در حالت کلی $\varprojlim F_i \subseteq \prod_{i\in I} F_i$ و

$$\varprojlim F_i = \{(a_j)_j;\ \ \psi_i^j(a_j) = a_i\ \ \forall \psi_i^j\}.$$

۲.۱ مفاهیم توپولوژیکی

در این بخش به معرفی چند توپولوژی که در این رساله به آن‌ها نیاز داریم، می‌پردازیم. قبل از آن چند قضیه و تعریف از آنالیز مربوط به همگرایی یکنواخت و همپیوستگی را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنیم (Y,d) یک فضای متریک و $f_n : X \longrightarrow Y$ دنباله‌ای از توابع و $f : X \longrightarrow Y$ یک تابع باشد. دراین‌صورت گوییم $\{f_n\}$ بر X ***همگرای یکنواخت***[۸] به f است و به‌صورت $f_n \xrightarrow{U} f$ بر X نشان می‌دهیم هرگاه

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists N \in \mathbb{N}\ \ ; (\forall n \geq N \quad d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon\ \ \forall x \in X).$$

یا به عبارتی می‌توان گفت $f_n \xrightarrow{U} f$ بر X اگر و تنها اگر

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists N \in \mathbb{N}\ \ ; (\forall n \geq N \quad sup_{x\in X} d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon).$$

[۸] uniform convergence

تعریف ۲.۲.۱ فرض کنیم $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ خانواده‌ای از توابعی از فضای متریک (X, d_1) به توی فضای متریک (Y, d_2) باشد. گوییم خانواده‌ی مذکور بر X **همپیوسته**[9] است هرگاه

$$\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists\delta > 0 \quad ; (d_1(x, y) < \delta \Rightarrow d_2(f_\alpha(x), f_\alpha(y)) < \varepsilon \quad , \quad \forall\alpha \in I).$$

قضیه ۳.۲.۱ هر دنباله همگرای یکنواخت از توابع پیوسته‌یکنواخت[10]، همپیوسته است.

برهان . به قضیه‌ی ۲۴.۷ از [۱۵] رجوع شود. □

قضیه ۴.۲.۱ هر خانواده‌ی متناهی از توابع پیوسته‌ی یکنواخت، همپیوسته است.

برهان . به [۱۵] رجوع شود. □

تعریف ۵.۲.۱ فرض کنیم X و Y دو فضای توپولوژیک باشند. دراین‌صورت فضای تمام توابع از X به Y را با Y^X نشان داده و تعریف می‌کنیم

$$\mathcal{C}(X, Y) = \{f : X \longrightarrow Y \ \ ; \text{پیوسته است } f\}.$$

در حالتی که $X = S^1$، $\mathcal{C}(S^1, Y)$ فضای تمام مسیرهای Y است و زیرفضای $\mathcal{C}((S^1, 1), (Y, y))$ از $\mathcal{C}(S^1, Y)$ فضای تمام مسیرهای بسته یا فضای طوقه[11]های Y می‌باشد و معمولاً این فضا را با $Hom((S^1, 1), (Y, y))$ یا $C_y(Y)$ نشان می‌دهند.

روی فضای تابعی Y^X توپولوژی‌های مختلفی تعریف شده است که در اینجا توپولوژی همگرایی یکنواخت روی این فضا را معرفی می‌کنیم.

---

[9] equicontinuous

[10] uniform continuous

[11] loop

تعریف ۶.۲.۱ فرض کنیم (Y,d) یک فضای متریک و X یک فضای توپولوژیک باشد. عضوی مانند f از Y^X، زیرمجموعه‌ی فشرده‌ای مانند C در X و عدد مثبتی مانند ε مفروض‌اند. فرض کنیم

$$B_C(f,\varepsilon) = \{g \in Y^X \ ; sup_{x\in C} d(f(x), g(x)) < \varepsilon\}.$$

مجموعه‌های $B_C(f,\varepsilon)$ یک پایه برای یک توپولوژی از Y^X است. این توپولوژی را *توپولوژی همگرایی فشرده*[۱۲] یا *توپولوژی همگرایی یکنواخت*[۱۳] بر مجموعه های فشرده می‌نامند.

همانطور که دیدیم در تعریف توپولوژی همگرایی یکنواخت، به متریک بودن Y نیاز است. اکنون توپولوژی‌ای روی $\mathcal{C}(X,Y)$ معرفی می‌کنیم که به متریک بودن Y نیازی نباشد.

تعریف ۷.۲.۱ فرض کنیم X و Y دو فضای توپولوژیک باشند. اگر K زیر مجموعه‌ی فشرده از X و U زیر مجموعه‌ی بازی از Y باشد. دراین صورت تعریف می‌کنیم

$$< K,U >= \{f \in Y^X; f(K) \subseteq U\}.$$

مجموعه‌های $\{< K,U >; K \subseteq X, U \subseteq Y\}$ به عنوان یک زیرپایه، تشکیل یک توپولوژی برای $\mathcal{C}(X,Y)$ می‌دهد که به توپولوژی *فشرده — باز*[۱۴] موسوم است.

قضیه ۸.۲.۱ فرض کنیم X فضایی دلخواه و (Y,d) فضایی متریک باشد. دراین‌صورت توپولوژی فشرده— باز و توپولوژی همگرای یکنواخت روی $\mathcal{C}(X,Y)$ یکی هستند.

برهان . به [۱۲] رجوع شود. □

قضیه‌ی فوق قضیه‌ی بسیار جالبی است زیرا نشان می‌دهد توپولوژی همگرایی یکنواخت روی $\mathcal{C}(X,Y)$ به متریک Y بستگی ندارد.

تعریف ۹.۲.۱ یک گروه G به همراه توپولوژی τ راگروه *توپولوژیک*[۱۵] گوییم هرگاه دو نگاشت $\theta : G \times G \longrightarrow G$ با ضابطه‌ی $\theta(g,h) = gh$ و $\gamma : G \longrightarrow G$ با ضابطه‌ی $\gamma(g) = g^{-1}$ پیوسته باشند.

[۱۲] compact convergence topology
[۱۳] uniform convergence topology
[۱۴] compact- open topology
[۱۵] topological group

به عنوان ساده‌ترین مثال هر گروه G به همراه توپولوژی گسسته[۱۶] یک گروه توپولوژیک است. همچنین می‌توان به گروه $(\mathbb{R},+)$ با توپولوژی اقلیدسی و $(S^۱,.)$ با توپولوژی زیرفضایی $\mathbb{R}^۲$ به عنوان دو گروه توپولوژیک اشاره کرد.

لم ۱۰.۲.۱ فرض کنیم G یک گروه توپولوژیک باشد و $H \trianglelefteq G$. دراین‌صورت گروه خارج قسمتی G/H یک گروه توپولوژیک است که G/H به عنوان یک فضای خارج قسمتی[۱۷] از G به‌وسیله H درنظر گرفته شده است.

برهان . به گزاره ی $III.۲.۶.۱۶$ از [۳] رجوع شود. □

گروه‌های توپولوژیک دارای ویژگی‌های جالبی هستند که در زیر دو ویژگی این فضاها را بیان می‌کنیم.

قضیه ۱۱.۲.۱ فرض کنیم G یک گروه توپولوژیک باشد و $H \trianglelefteq G$. دراین‌صورت

۱) گروه خارج قسمتی G/H هاسدورف[۱۸] است اگر و تنها اگر H در G بسته باشد.

۲) گروه خارج قسمتی G/H گسسته است اگر و تنها اگر H در G باز باشد.

برهان . به گزاره ی $III.۲.۶.۱۸$ از [۳] رجوع شود. □

بنابراین در یک گروه توپولوژیک G اگر عضو همانی این گروه در G بسته باشد آن‌گاه G هاسدورف است و اگر عضو همانی این گروه در G باز باشد آن‌گاه G گسسته است.

تعریف ۱۲.۲.۱ فضای توپولوژیک X را *فضای همگن*[۱۹] گوییم هرگاه برای هر $x,y \in X$ یک همسانریختی f از X به خودش موجود باشد به‌طوری که $f(x)=y$.

تعریف ۱۳.۲.۱ فرض کنیم X یک مجموعه باشد که توسط زیرمجموعه‌های A_i که i در مجموعه اندیس‌گذار (حتی نامتناهی) تغییر می‌کند، پوشیده شده باشد. به‌علاوه فرض کنیم

---

[۱۶] discrete topology

[۱۷] qoutient space

[۱۸] Hausdorff

[۱۹] homogeneous space

۱) برای هر $i \in I$، A_i فضای توپولوژیک باشد.

۲) برای هر $i, j \in I$، توپولوژی A_i و A_j روی $A_i \cap A_j$ یکی باشد.

۳) برای هر $i, j \in I$، مجموعه $A_i \cap A_j$ در A_i و A_j بسته باشد.

دراین‌صورت *توپولوژی ضعیف* [۲۰] روی X تعریف شده توسط $\{A_i; i \in I\}$ توپولوژی‌ای است که $F \subseteq X$ بسته است اگر و تنها اگر برای هر $i \in I$، $F \cap A_i$ در A_i بسته باشد.

به سادگی می توان دید که

۱) برای هر $i \in I$، A_i در X بسته است.

۲) توپولوژی زیرفضایی A_i با توپولوژی A_i یکی است.

۳) فرض کنیم τ و τ' به ترتیب توپولوژی ضعیف و توپولوژی دلخواه روی X باشد، دراین‌صورت اگر I متناهی باشد، آن‌گاه $\tau = \tau'$.
قابل توجه است که اگر I نامتناهی باشد، آن‌گاه ممکن است حکم ۳ برقرار نباشد. برای دیدن مثال نقض آن می‌توان به مثال ۸.۱۰ [۱۴] مراجعه کرد.

۳.۱ مفاهیم توپولوژی جبری

در این بخش به برخی از مفاهیم توپولوژی جبری که در این رساله مورد نیاز است، می‌پردازیم.

تعریف ۱.۳.۱ فرض کنیم $X \subseteq Y$، دراین‌صورت

۱) فضای X را *توکشیده‌ی* Y [۲۱] گوییم هرگاه نگاشت پیوسته $r : Y \longrightarrow X$ موجود باشد به‌طوری که $r \circ i = 1_X$ که در آن $i : X \longrightarrow Y$ نگاشت شمول است. در این حالت نگاشت r را *توکشنده* [۲۲] گوییم.

---

[۲۰] weak topology
[۲۱] retract
[۲۲] retraction

۲) فضای X را *توکشیده‌ی دگردیسی* Y [۲۳] گوییم هرگاه X توکشیده‌ی Y باشد و $i \circ r \simeq 1_Y$.

۳) فضای X را *توکشیده‌ی دگردیسی قوی* Y [۲۴] گوییم هرگاه X توکشیده‌ی Y باشد و

$$i \circ r \simeq 1_Y \qquad rel\{X\}.$$

لم ۲.۳.۱ فضای $D^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \times I$ یک توکشیده دگردیسی قوی از $D^n \times I$ است.

برهان . به نتیجه‌ی ۴.۲.۳ از [۱۶] رجوع شود. □

لم ۳.۳.۱ فضای X توکشیده‌ی دگردیسی قوی Y است اگر و تنها اگر تابع پیوسته $F : Y \times I \longrightarrow Y$ موجود باشد به طوری که

۱) برای هر $y \in Y$، $F(y, 0) = y$؛

۲) برای هر $x \in X$، $F(Y \times 1) \subseteq X, F(x, 1) = x$؛

۳) برای هر $x \in X$ و برای هر $t \in I$، $F(x, t) = x$.

برهان . بنا به تعریف توکشیده دگردیسی قوی براحتی دیده می‌شود. □

تعریف ۴.۳.۱ فضای توپولوژیک X را *انقباض پذیر*[۲۵] گوییم هرگاه 1_X پوچ‌هموتوپیک[۲۶] باشد.

تعریف ۵.۳.۱ فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد. دراین‌صورت یک مخروط روی X فضای خارج قسمتی $X \times I/\sim$ است که در آن رابطه‌ی هم ارزی $\sim$ به صورت

$$(x, 1) \sim (x', 1) \quad \forall x, x' \in X.$$

تعریف می‌شود. فضای $X \times I/\sim$ را با CX و هر عنصر آن را با $[x, t]$ نشان می‌دهیم.

---

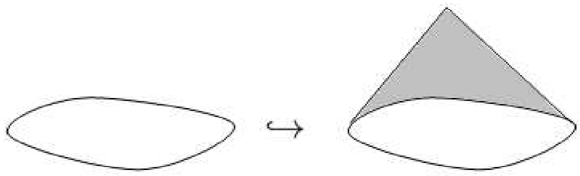
[۲۳] deformation retract

[۲۴] strong deformation retract

[۲۵] contractible

[۲۶] nullhomotopic

هر فضای توپولوژیک در یک فضای انقباض پذیر نشانده می‌شود. در واقع هر فضای توپولوژیک X در مخروط خود، CX نشانده می‌شود و مخروط انقباض پذیر است.



تعریف ۶.۳.۱ فضای توپولوژیک X را *انقباض پذیر موضعی* [۲۷] گوییم هرگاه برای هر $x \in X$ و هر همسایگی U از x، یک همسایگی V از x موجود باشد که در U انقباض پذیر به x باشد؛ یعنی نگاشت $F : V \times I \longrightarrow U$ با این ویژگی وجود داشته باشد که برای هر $v \in V$، $F(v, 0) = v$ و $F(v, 1) = x$.

لزومی ندارد که هر فضای انقباض پذیر، انقباض پذیر موضعی باشد و برعکس.

مثال ۷.۳.۱ S^1 یک فضای انقباض پذیر موضعی است که انقباض پذیر نیست و فضای شانه‌ای [۲۸] یک فضای انقباض پذیر است که انقباض پذیر موضعی نیست.

قضیه ۸.۳.۱ فرض کنیم Y یک فضای توپولوژیک و $f : S^n \longrightarrow Y$ یک نگاشت پیوسته باشد، دراین صورت گزاره‌های زیر معادلند.

۱) f پوچ‌هموتوپیک است.

۲) f به یک تابع پیوسته از D^{n+1} به Y توسیع [۲۹] پذیر است.

۳) اگر $x_0 \in S^n$ و $k : S^n \longrightarrow Y$ نگاشت ثابت در $f(x_0)$ باشد، آن‌گاه یک هموتوپی F بین f و k وجود دارد به طوری که برای هر $t \in I$، $F(x_0, t) = f(x_0)$.

برهان . به قضیه‌ی ۶.۱ از [۱۴] رجوع شود. □

---

[۲۷] locally contractible

[۲۸] comb space

[۲۹] extended

تعریف ۹.۳.۱ فضای همبند مسیری X را *همبند ساده* [۳۰] یا ۱ − *همبند*[۳۱] گوییم هرگاه $\pi_1(X)$ بدیهی باشد.

تعریف ۱۰.۳.۱ فضای X را *همبند ساده نیم موضعی* [۳۲] یا ۱ − *همبند نیم موضعی* [۳۳] گوییم هرگاه هر $x \in X$ دارای یک همسایگی U باشد به‌طوری که $i_* : \pi_1(U, x) \longrightarrow \pi_1(X, x)$ همریختی بدیهی باشد که در آن $i : U \longrightarrow X$ نگاشت شمول است.

توجه داریم که هر فضای همبند ساده، همبند ساده نیم موضعی است ولی عکس آن برقرار نیست. به عنوان مثال S^1 همبند ساده نیم موضعی است اما همبند ساده نیست.

لم ۱۱.۳.۱ هر فضای انقباض‌پذیر موضعی، همبند مسیری موضعی[۳۴] و همبند ساده نیم موضعی است.

برهان . به قضیه‌ی ۳۹.۱۰ از [۱۴] رجوع شود. □

در اینجا برخی از ویژگی‌های گروه بنیادین را بیان می‌کنیم.

لم ۱۲.۳.۱ فرض کنیم (X, x) و (Y, y) از یک نوع هموتوپی باشند، دراین صورت $\pi_1(X, x) \cong \pi_1(Y, y)$.

برهان . به قضیه‌ی ۱۰.۳ از [۱۴]رجوع شود. □

لم ۱۳.۳.۱ فرض کنیم X و Y دو فضای همبند مسیری و از یک نوع هموتوپی باشند، دراین صورت برای هر $x \in X$ و $y \in Y$ $\pi_1(X, x) \cong \pi_1(Y, y)$.

برهان . به نتیجه‌ی ۱۱.۳ از [۱۴] رجوع شود. □

نتیجه ۱۴.۳.۱ اگر فضای X انقباض پذیر باشد، آن‌گاه برای هر $x \in X$، $\pi_1(X, x) = 1$.

برهان . به نتیجه‌ی ۱۲.۳ از [۱۴] رجوع شود. □

---

[۳۰] simply connected
[۳۱] 1-connected
[۳۲] semilocally simply connected
[۳۳] semioclly 1-connected
[۳۴] locally path connected

لم ۱۵.۳.۱ فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد و $x,y \in X$ و فرض کنیم $\gamma : I \longrightarrow X$ مسیری از x به y باشد. دراین صورت نگاشت $\theta : \pi_1(X,x) \longrightarrow \pi_1(X,y)$ با ضابطه $\theta([f]) = [\gamma^{-1} * f * \gamma]$ یکریختی است.

برهان . به قضیه‌ی ۶.۳ از [۱۴] رجوع شود. □

لم ۱۶.۳.۱ فرض کنیم (X,x) و (Y,y) دو فضای توپولوژیک باشند، دراین صورت $\pi_1(X \times Y, (x,y)) \cong \pi_1(X,x) \times \pi_1(Y,y)$.

برهان . به قضیه‌ی ۷.۳ از [۱۴] رجوع شود. □

تعریف ۱۷.۳.۱ فرض کنیم n یک عدد صحیح نامنفی باشد. دراین‌صورت زوج (X,A) را n− همبند [۳۵] گوییم هرگاه برای $0 \leq k \leq n$ هر نگاشت $\alpha : (D^k, S^{k-1}) \longrightarrow (X,A)$ با یک نگاشت از D^k به A هموتوپی نسبی نسبت به S^{k-1} باشد.

قضیه ۱۸.۳.۱ زوج $(D^n_{\frac{1}{2}}, \dot{D}^n_{\frac{1}{2}})$ یک فضای n− همبند است.

برهان . به نتیجه‌ی ۴.۲.۷ از [۱۶] رجوع شود. □

تعریف ۱۹.۳.۱ فرض کنیم n یک عدد طبیعی باشد. دراین‌صورت یک نگاشت پیوسته $f : X \longrightarrow Y$ را n− *هم‌ارزی*[۳۶] گوییم هرگاه f یک تناظر یک‌به‌یک بین مولفه‌های مسیری X و مولفه‌های مسیری[۳۷] Y القا کند و برای هر $x \in X$ و $0 < q < n$، $f_* : \pi_q(X,x) \longrightarrow \pi_q(Y,f(x))$ یکریختی و برای $q = n$ برووریختی باشد.
نگاشت $f : X \longrightarrow Y$ را *هم‌ارز هموتوپی ضعیف* [۳۸] گوییم هرگاه f برای هر $n \geq 1$ یک n− هم‌ارزی باشد.

تعریف ۲۰.۳.۱ فرض کنیم $f : X \longrightarrow Y$ یک نگاشت پیوسته باشد، یک رابطه‌ی هم‌ارزی به صورت زیر روی X تعریف می‌کنیم و آن را با $ker f$ نشان می‌دهیم؛
$x_1, x_2 \in X$ هم‌ارزند اگر و تنها اگر $f(x_1) = f(x_2)$.

[۳۵] n-connected
[۳۶] n-equivalence
[۳۷] path component
[۳۸] weak homotopy equivalence

قضیه ۲۱.۳.۱ فرض کنیم $f : X \longrightarrow Y$ یک نگاشت پیوسته باشد. دراین‌صورت f یک همسانی[۳۹] است اگر و تنها اگر برای هر فضای Z و هر نگاشت $g : Y \longrightarrow Z$، داشته باشیم g پیوسته است اگر و تنها اگر $g \circ f$ پیوسته باشد.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g\circ f} & Z \\ f \searrow & & \nearrow g \\ & Y & \end{array}$$

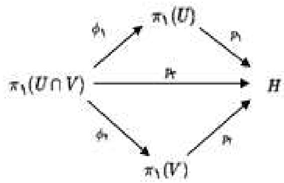
برهان . به قضیه‌ی ۸.۱ از [۱۴] رجوع شود. □

قضیه ۲۲.۳.۱ فرض کنیم $f : X \longrightarrow Y$ یک همسانی باشد، دراین‌صورت $\bar{f} : X/kerf \longrightarrow Y$ با ضابطه‌ی $\bar{f}([x]) = f(x)$ یک همسانریختی است.

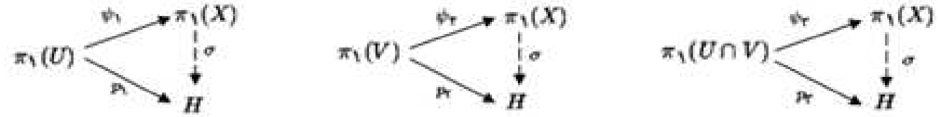
برهان . به نتیجه‌ی ۱۰.۱ از [۱۴] رجوع شود. □

اکنون قضیه ون– کمپن[۴۰] را بیان می‌کنیم.

قضیه ۲۳.۳.۱ فرض کنیم U و V دو زیرمجموعه‌ی باز از X باشند به طوری که $U \cap V$ همبند مسیری باشد و $X = U \cup V$. همچنین فرض کنیم H گروهی دلخواه و p_1, p_2, p_3 همریختی‌هایی باشند به‌طوری که نمودار زیر جابه‌جایی باشد.



دراین صورت همریختی منحصربه فرد $\sigma : \pi_1(X) \longrightarrow H$ وجود دارد به‌طوری که سه نمودار زیر جابه‌جایی باشند.



---

[۳۹] identification

[۴۰] Van- kampen theorem

که در آن ϕ_i و ψ_i همریختی‌های القاشده توسط نگاشت‌های شمولی هستند.

برهان . به نتیجه‌ی ۱۰.۱ از [۱۴] رجوع شود. □

اکنون فضای $CW-$ همبافت را معرفی می‌کنیم و برخی از ویژگی‌های این فضا را بیان می‌کنیم. برای معرفی $CW-$ همبافت نیاز به چند تعریف است.

تعریف ۲۴.۳.۱ فرض کنیم X و Y دو فضای توپولوژیک باشد و $A \subseteq Y$. فرض کنیم $f : A \longrightarrow X$ پیوسته باشد. دراین‌صورت فضای بدست آمده از Y به وسیله چسباندن[۴۱] X از طریق f فضای $X \sqcup Y/\sim$ است که $\sim$ رابطه‌ی هم ارزی روی X تولید شده توسط $\{(a, f(a)) \in (X \sqcup Y) \times (X \sqcup Y); a \in A\}$ است. این فضا را با $X \sqcup_f Y$ نشان می‌دهیم و نگاشت f را *نگاشت چسباندن*[۴۲] می‌نامیم.

تعریف ۲۵.۳.۱ یک تابع پیوسته $g : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ را *همسانریختی نسبی*[۴۳] گوییم هرگاه $g|_{(X-A)} : X - A \longrightarrow Y - B$ همسانریختی باشد.

تعریف ۲۶.۳.۱ یک $CW-$ *همبافت*[۴۴] یک سه‌تایی (X, E, ϕ) است که X یک فضای هاسدورف، E خانواده‌ای از حجره[۴۵]‌ها در X و $\phi = \{\phi_e; e \in E\}$ خانواده‌ای از نگاشت‌هاست به‌طوری که

۱) $X = \cup\{e; e \in E\}$ (اجتماع مجزا).

۲) برای هر $k-$ حجره‌ی $e \in E$، نگاشت $\phi_e : (D^k, S^{k-1}) \longrightarrow (e \cup X^{(k-1)}, X^{(k-1)})$ یک همسانریختی نسبی است.

۳) اگر $e \in E$، آن‌گاه $\bar{e}$ در اجتماع متناهی از حجره‌های E قرار می‌گیرد.

۴) X دارای توپولوژی ضعیف تعریف شده توسط $\{\bar{e}; e \in E\}$ است.

---

[۴۱] attaching

[۴۲] attaching map

[۴۳] relative homeomorphism

[۴۴] CW-complex

[۴۵] cell

اگر (X,E,ϕ) یک $CW-$ همبافت باشد، آن‌گاه X را *فضای* CW [۴۶]، (E,ϕ) را *تجزیه* CW [۴۷]، و $\phi_e \in \phi$ را *نگاشت مشخصه* [۴۸] E می‌نامیم.

تعریف ۲۷.۳.۱ فرض کنیم (X,E,ϕ) یک $CW-$ همبافت باشد. اگر $E' \subseteq E$ آن‌گاه $|E'| = \cup\{e; e\in E'\} \subseteq X$ و $\phi' = \{\phi_e; e\in E'\}$ را تعریف می‌کنیم و گوییم $(|E'|, E', \phi)$ یک $CW-$ *زیرهمبافت* [۴۹] است هرگاه برای هر $e\in E'$، $im\phi_e \subseteq |E'|$.

قضیه ۲۸.۳.۱ فرض کنیم (X,E) یک $CW-$ همبافت باشد و $E'\subseteq E$. دراین‌صورت $|E'|$ یک $CW-$ زیرهمبافت است اگر و تنها اگر $|E'|$ بسته باشد.

برهان . به قضیه‌ی ۲۱.۸ از [۱۴] رجوع شود. □

تعریف ۲۹.۳.۱ یک $CW-$ *همبافت نسبی* [۵۰] (X,A) عبارتست از یک فضای توپولوژیک X، یک زیر فضای A و دنباله‌ای از زیرفضاهای $(X,A)^k$ $(k\geq ۰)$ به‌طوری که

۱) $(X,A)^۰$ به وسیله‌ی چسباندن $۰-$ حجره‌ها به A بدست آمده‌است.

۲) برای $k\geq ۱$، $(X,A)^k$ به وسیله‌ی چسباندن $k-$ حجره‌ها به $(X,A)^{k-۱}$ بدست آمده‌است.

۳) $X=\cup_k (X,A)^k$

۴) X دارای توپولوژی ضعیف تعریف شده توسط $\{(X,A)^k\}_k$ است.

دراین حالت $(X,A)^k$ را $k-$ *اسکلت* [۵۱] X نسبت به A گوییم. اگر nی وجود داشته باشد که $X=(X,A)^n$ آن‌گاه $dim(X-A)\leq n$.

درحالتی که $A=\emptyset$، $CW-$ همبافت نسبی همان $CW-$ همبافت است.

[۴۶] CW space
[۴۷] CW decomposition
[۴۸] characteristic map
[۴۹] CW-subcomplex
[۵۰] relative CW-complex
[۵۱] k-skeleton