بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایاننامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته

ریاضی محض گرایش جبر

عنوان

زیرگروههای T- بلند گروههای آبلی با رتبهٔ بی‌تاب یک

استاد راهنما

دکتر احد مهدی زاده اقدم

استاد مشاور

دکتر حسن مهتدی فر

پژوهشگر

سمیه ناصر

بهمن ۱۳۸۸

تقدیم به :

برادر بزرگم فریدون

بزرگترین حامی زندگی ام

تقدیم به:

مادر مهربانم و خواهرانم و برادرانم

و تقدیم به:

همسر عزیزم

تقدیر و تشکر

در طول دوران تحصیلاتم اساتید بسیاری بوده‌اند که هر یک نقش بسزایی در پیشرفت اینجانب داشته‌اند. در این میان اساتیدی نیز هستند که همچون ستاره‌ای تابناک در آسمان علم و دانش و انسانیت درخشیده‌اند و گوشه‌ای از تاریکی جهل مرا به نور علم خود مزین کرده‌اند.

بر خود لازم می‌دانم از بابت راهنمایی‌های استاد گرانقدرم جناب آقای دکتر احد مهدی‌زاده اقدم تشکر نموده و از زحمات جناب آقای دکتر حسن مهتدی‌فر که استاد مشاور من بوده‌اند و همینطور از داور جلسه دفاعیه خودم، جناب آقای دکتر محمد شهریاری سپاسگزارم.

در پایان از زحمات جناب آقای دکتر نجف‌زاده و خانم کریمی و از همه دوستانی که بنحوی مرا در تدوین این پایان‌نامه یاری رساندند کمال تشکر را دارم.

نام خانوادگی دانشجو: ناصر نام: سمیه

عنوان: زیرگروههای T- بلند گروههای آبلی با رتبهٔ بی‌تاب یک

استاد راهنما : دکتر احد مهدی زاده اقدم

استاد مشاور: دکتر حسن مهتدی فر

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: جبر دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی تاریخ فارغ‌التحصیلی: بهمن ۱۳۸۸ تعداد صفحه: ۶۱

کلید واژه‌ها: گروه تابدار، زیرگروه ماکسیمال، گروه بخش پذیر، گروه‌آبلی.

چکیده

فرض کنیم G یک گروه آبلی دلخواه و T زیرگروه تابدار از G باشد. اگر A نسبت به خاصیت مجزا بودن از T ماکسیمال باشد، آنگاه A یک زیرگروه T- بلند از G خوانده می‌شود. در این پایان‌نامه ابتدا نشان می‌دهیم که زیرگروه T- بلند L از گروه آبلی G از رتبه بی‌تاب یک وجود دارد بطوریکه برای هر زیرگروه T- بلند A از G داشته باشیم $type(L) \leq type(A)$. در مرحلهٔ بعد گروههای آبلی از رتبه بی‌تاب یک که همهٔ زیرگروههای T- بلندشان ایزومورف باشند را مشخص می‌کنیم.

فهرست مطالب

مقدمه

این پایان‌نامه بر اساس مقالهٔ زیر تنظیم شده است:

[1] T. Okuyama, *T-high subgroups of abelian groups of torsion-free rank* 1, Communications in Algebra, 5941-5953, (2002).

در این پایان‌نامه ابتدا به تعریف زیرگروههای T- بلند می‌پردازیم سپس وجود زیرگروههای T- بلند را بوسیله لم زورن ثابت می‌کنیم.

فرض کنیم G یک گروه آبلی دلخواه و A و T زیرگروههایی از G باشند. اگر A نسبت به خاصیت مجزا بودن از T ماکسیمال باشد، آنگاه A یک زیرگروه T- بلند از G خوانده می‌شود.

وجود زیرگروههای T- بلند بوسیله لم زورن تضمین می‌شود. زیرا که مجموعه $\Sigma = \{B \leq G \mid B \cap T = 0\}$ با رابطهٔ $\subseteq$ بطور جزئی مرتب است و هر زنجیر از آن دارای کران بالا در Σ می‌باشد. بنابراین بنابه لم زورن Σ دارای عضو ماکسیمالی چون A می‌باشد.
به نظر می‌رسد مطالعهٔ زیرگروههای T- بلند از گروههای آبلی دلخواه با مرجع‌های [۱۲] و [۱۴] به طور مستقل شروع شده است.
ایروین[1] در مرجع [۱۳] مسأله‌های زیر را مطرح می‌کند.
برای کدام زیرگروههای T از گروه آبلی G موارد زیر درست است؟
۱) همهٔ زیرگروههای T- بلند خالص هستند (زیرگروه خالص در بخش ۱—۴ فصل اول ارائه

Irwin[1]

شده است)،

۲) همهٔ زیرگروههای T- بلند ایزومورف هستند،

۳) همهٔ زیرگروههای T- بلند تصویر اندومورفیسم از G هستند.

گرچه در اصل، ایروین در [۱۳] این مسأله‌ها را برای گروههای آبلی مقدماتی مطرح کرد، اما آنها در گروههای آبلی دلخواه نیز معنی‌دار هستند. از این به بعد این مسأله‌ها را مسأله‌های زیرگروه T- بلند می‌نامیم.

اولین مسئله زیرگروه T- بلند بطور کامل در مرجع [۲۰] حل شده است. اما بقیهٔ آنها هنوز بطور کامل حل نشده‌اند.

مولفان زیادی مسأله‌های زیرگروه T- بلند را در مرجع‌های [۱۷—۱۵ و ۱۰—۱] و [۲۱] مطالعه کرده‌اند. ایروین در مرجع [۱۳] مسأله‌های زیرگروه T- بلند را برای اولین زیرگروه اولم T از گروه آبلی مقدماتی G مورد بررسی قرار داد.

باختصار این زیرگروههای T- بلند، زیرگروههای بلند از G نامیده می‌شوند.

در اینجا تعریف گروه آبلی موضعاً دوری را می آوریم.

گروه آبلی G را موضعاً دوری گوییم اگر برای هر عدد اول p، G_p دوری باشد.

در مرجع [۱۹] نشان داده شده است که اگر G گروه آبلی موضعاً دوری از رتبه بی‌تاب یک باشد، آنگاه یک زیرگروه $T(G)$- بلند L از G وجود دارد بطوریکه برای همه زیرگروههای $T(G)$- بلند A از G، $type(L) \leq type(A)$. همچنین مشخص شده است که گروههای آبلی موضعاً دوری از رتبه بی‌تاب یک، کلیه زیرگروههای $T(G)$- بلندشان ایزومورف هستند.

در فصل‌های آتی با ارائه یک مثال نشان خواهیم داد لزومی ندارد که همهٔ زیرگروههای $T(G)$- بلند از یک گروه آبلی G ایزومورف باشند.

در این پایان‌نامه همه گروههای مورد نظر آبلی هستند. در سراسر این پایان‌نامه، P نشان‌دهنده

مجموعه‌ای از اعداد اول، P و $p \in P$، G_p، $p-$ زیرگروه مقدماتی ماکسیمال و T، زیرگروه تابدار ماکسیمال از گروه تابدار G است. برای هر $g \in G$، $h_p(g)$، $p-$ ارتفاع تعمیم یافته g در G و $h_p^H(g)$، $p-$ ارتفاع تعمیم یافته g در زیرگروه H از G است. برای یک گروه G، $D(G)$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$D(G) = \{p \in P | G_p \neq pG_p\}.$$

در فصل اول پایان‌نامه ابتدا مفاهیم و تعاریف مقدماتی را مطرح کرده و سپس به بیان مفاهیم و تعاریف پایه‌ای می‌پردازیم که در فصل‌های بعدی مورد نیاز است، همچنین گزاره‌هایی را در رابطه با آن‌ها بیان می‌کنیم. به عنوان نمونه، زیرگروههای p- مرتب و مرتب را تعریف کرده و خواص آن‌ها را در قالب گزاره یا لم می‌آوریم.

در فصل دوم ، زیرگروههای T- بلند پایین از گروه G را بررسی می‌کنیم و قضیه اساسی زیر را ثابت می‌کنیم:

فرض کنیم G یک گروه از رتبه بی‌تاب یک باشد. در اینصورت یک زیرگروه T- بلند پایین از G وجود دارد. همچنین در این فصل بوسیله نتیجه زیر انواع زیرگروههای T- بلند یک گروه از رتبه بی‌تاب یک را مقایسه میکنم.

فرض کنیم G یک گروه از رتبه بی‌تاب یک باشد، A و B زیرگروههای T- بلند از G باشند، $0 \neq a \in A$ و $0 \neq b \in B$ و برای هر $p \in P$ فرض کنیم $m_p = h_p^A(a)$ و $n_p = h_p^B(a)$. در اینصورت اگر قرار دهیم $\infty - \infty = 0$، $\sum_{p \notin D(G)} |m_p - n_p|$ متناهی است .

در فصل سوم با بکارگیری قضیه اساسی فصل دوم، گروههای از رتبه بی‌تاب یک را که همهٔ زیرگروههای T- بلندشان ایزومورف هستند، مشخص می‌کنیم. برای انجام اینکار ابتدا لم زیر را ثابت می‌کنیم:

فرض کنیم G یک گروه از رتبه بی‌تاب یک باشد و $0 \neq a \in G \setminus T$. فرض کنیم که G_p بخش‌پذیر

نباشد. اگر همه زیرگرههای T- بلند از G ایزومورف باشند، آنگاه هیچ درایه‌ای از p- شاخص ماتریس ارتفاع، ∞ نیست.

لازم به ذکر است که تعریف ماتریس ارتفاع در بخش ۱—۵ فصل اول ارائه شده است. در ادامه فصل سوم قضیه زیر را اثبات خواهیم کرد.

فرض کنیم G یک گروه از رتبه بی‌تاب یک باشد و برای هر $p \in D(G)$ فرض کنیم t_p کوچکترین عدد صحیحی باشد بطوریکه پایای اولم کاپلانسکی $f_{t_p}(G_p) \neq 0$. در اینصورت همهٔ زیرگروههای T- بلند از G ایزومورف هستند اگر و فقط اگر $a \in G \setminus T$ وجود داشته باشد بطوری که

۱) برای هر $p \in D(G)$، هیچ درایه‌ای از p- شاخص ماتریس ارتفاع، ∞ نباشد، و

۲) برای هر $p \in D(G)$

$$h_p(a) \leq t_p + 1.$$

تعریف پایای اولم کاپلانسکی در بخش ۱—۵ فصل اول آمده است.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ گروههای تابدار و بی‌تاب

تعریف ۱.۱.۱ گروه G را تابدار گوییم، هرگاه برای هر $g \in G$ عدد صحیح مثبت n ای موجود باشد بطوریکه $ng = 0$.

تعریف ۲.۱.۱ گروه G را بی‌تاب گوییم، هرگاه برای هر $g \in G$ و هر عدد صحیح مثبت n داشته باشیم $ng \neq 0$.

تعریف ۳.۱.۱ گروه G را آمیخته گوییم، هرگاه عضوهای ناصفری از مرتبهٔ متناهی و همچنین عضوهای ناصفری از مرتبهٔ نامتناهی را داشته باشد.

تعریف ۴.۱.۱ گروه G را یک گروه مقدماتی گوییم، هرگاه مرتبه هر $a \in G$ بصورت حاصلضربی از اعداد اول با توان یک باشد.

تعریف ۵.۱.۱ گروه A را p-گروه گوییم، اگر مرتبهٔ هر عضو آن توانی از عدد اول p باشد.

تعریف ٦.۱.۱ فرض کنیم G یک گروه آبلی تابدار و p یک عدد اول باشد. در اینصورت G_p را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$G_p = \{g \in G \mid o(g) = p^n \text{ ،}n \text{ برای برخی } \}.$$

تعریف ۷.۱.۱ فرض کنیم $T = \{g \in G \mid o(g) < \infty\}$. در اینصورت T یک زیرگروه از G می‌باشد که آن را زیر گروه تابدار G گوییم و با علامت G_t نشان می‌دهیم. بدیهی است که $\frac{G}{T}$ یک گروه آبلی بی‌تاب می‌باشد.

تعریف ۸.۱.۱ خواصی از گروه G را پایا گوییم، هرگاه H گروهی باشد بطوریکه اگر $H \cong G$، آنگاه H نیز همان خواص را داشته باشد.

۲.۱ استقلال خطی و رتبه

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنیم A یک گروه آبلی باشد. مجموعه $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ از اعضای ناصفر A را مستقل خطی می‌نامند هرگاه از رابطه

$$n_1a_1 + n_2a_2 + \ldots + n_ka_k = 0$$

نتیجه شود $n_1a_1 = n_2a_2 = \ldots = n_ka_k = 0$ که در آن $n_1, n_2, \ldots, n_k$ اعداد صحیح دلخواه می‌باشند و این بدان معنی است که $n_i = 0$ هرگاه $o(a_i) = \infty$ و $o(a_i)|n_i$ هرگاه $o(a_i)$ متناهی باشد. یک مجموعه نامتناهی از اعضای A را مستقل نامند هرگاه هر زیرمجموعه متناهی از آن مستقل باشد. همچنین یک مجموعه از اعضای A را وابسته می‌نامند هرگاه مستقل نباشد.

تعریف ۲.۲.۱ مجموعه مستقل X از گروه آبلی A را مستقل ماکسیمال گوییم، هرگاه هیچ مجموعه مستقلی از A اکیداً شامل X نباشد. به عبارت دیگر اگر $0 \neq g \in A$، آنگاه $X \cup \{g\}$

مستقل نباشد.

تعریف ۳.۲.۱ اگر A یک گروه آبلی دلخواه باشد، آنگاه کاردینال مجموعه مستقل خطی ماکسیمال مانند M از آن را رتبه A نامیده و با نماد $r(A)$ نشان می‌دهیم. همچنین کاردینال زیرمجموعه‌ای از M، شامل تمام عناصر از مرتبهٔ بینهایت را با $r_0(A)$ و کاردینال زیر مجموعه‌ای از M شامل تمام عناصر از مرتبهٔ توانی از عدد اول p را با $r_p(A)$ نشان می‌دهیم و آنها را به ترتیب رتبه بی‌تاب و p رتبه گروه A می‌نامیم.

قضیه ۴.۲.۱ رتبه‌های $r(A)$، $r_0(A)$ و $r_p(A)$ برای هرگروه آبلی A پایا هستند.

برهان . رجوع شود به صفحه ۸۵ جلد اول مرجع [۱۱]. □

۳.۱ بخش‌پذیری

تعریف ۱.۳.۱ فرض کنیم G یک گروه آبلی باشد. فرض کنیم $p \in P$ و $x \in G$. ارتفاع x در نقطه p را با $h_p^G(x)$ نشان داده و به این صورت تعریف می‌کنیم که اگر $x \in p^nG$ و $x \notin p^{n+1}G$، آنگاه $h_p^G(x) = n$ و اگر چنین n ای موجود نباشد، آنگاه گوییم x از ارتفاع نامتناهی است و آن را با $h_p^G(x) = \infty$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲.۳.۱ فرض کنیم p یک عدد اول باشد. گروه آبلی A را p- بخش‌پذیر نامیم، هرگاه برای هر عدد صحیح مثبت n داشته باشیم $p^nA = A$. همچنین آن را بخش‌پذیر نامیم، هرگاه برای هر

عدد صحیح مثبت n داشته باشیم $nA = A$.

تعریف ۳.۳.۱ گروه آبلی A را تحویل یافته نامیم، هرگاه A زیرگروه بخش‌پذیر نداشته باشد.

لم ۴.۳.۱ فرض کنیم A یک گروه آبلی باشد. در اینصورت داریم:

۱) اگر D یک زیرگروه بخش‌پذیر A باشد، آنگاه D جمعوند مستقیم A می‌باشد،

۲) A بصورت جمع مستقیم یک گروه بخش‌پذیر D و یک گروه تحویل یافته C نوشته می‌شود.
به عبارت دیگر

$$A = D \oplus C$$

که گروه D توسط A بطور یکتا تعیین می‌شود و گروه C نیز تحت ایزومورفیسم یکتاست.

برهان . رجوع شود به قضایای ۲.۲۱ و ۳.۲۱ جلد اول مرجع [۱۱]. □

مثال ۵.۳.۱ ساده‌ترین مثال برای گروههای بخش‌پذیر، $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Z}_p^{\infty}$ می‌باشد.
قضیه بعد بیان می‌کند که گروههای بخش‌پذیر بصورت جمع مستقیمی از این دو نوع گروه هستند.

قضیه ۶.۳.۱ فرض کنیم A یک گروه آبلی بخش‌پذیر باشد. در اینصورت

$$A \cong \bigoplus_{r_0(p)} \mathbb{Q} \oplus \bigoplus_{p} [\bigoplus_{r_p(A)} {\mathbb{Z}_p}^{\infty}].$$

برهان . رجوع شود به قضیه ۱.۲۳ جلد اول مرجع [۱۱]. □

قضیه بعد برخی از خاصیت‌های مهم بخش‌پذیری را بیان می‌کند.

قضیه ۷.۳.۱ فرض کنیم D یک گروه آبلی باشد. در اینصورت

۱) گروه D بخش‌پذیر است اگر و فقط اگر بر هر عدد اولی بخش‌پذیر باشد،

۲) گروه D، p- گروهی بخش‌پذیر است اگر و فقط اگر p- بخش‌پذیر باشد،

۳) گروه D بخش‌پذیر است اگر و فقط اگر ارتفاع هر عضو D به ازای هر عدد اول p نامتناهی باشد،

۴) هر تصویر هومومورفیسم یک گروه بخش‌پذیر، بخش‌پذیر است،

۵) اگر $\{D_i\}_{i\in I}$ بخش‌پذیر باشد، آنگاه $\sum\limits_{i\in I} D_i$ بخش‌پذیر است.

برهان . رجوع شود به صفحه ۹۸ جلد اول مرجع [۱۱]. □

۴.۱ زیرگروههای خالص

تعریف ۱.۴.۱ فرض کنیم p یک عدد اول و B یک زیرگروه از گروه آبلی A باشد. در اینصورت B را p- خالص[1] نامیم، هرگاه برای هر عدد صحیح مثبت n داشته باشیم $p^nB = B \cap p^nA$ همچنین آن را زیرگروه خالص نامند، هرگاه به ازای هر عدد صحیح مثبت n داشته باشیم $nB = B \cap nA$.

لم ۲.۴.۱ فرض کنیم A یک گروه آبلی باشد. در اینصورت

۱) هر جمعوند مستقیم A یک زیرگروه خالص است،

Pure[1]

۲) اگر A یک p- گروه باشد و B زیرگروهی از A باشد چنانچه عناصر از مرتبه p در B همان ارتفاع را در B داشته باشند که در A دارند، آنگاه B در A خالص است،

۳) در هر گروه آبلی بی‌تاب، اشتراک تمام زیرگروههای خالص دوباره یک زیرگروه خالص است. بنابراین برای هر زیرمجموعه S از یک گروه آبلی بی‌تاب زیرگروه خالص مینیمال شامل S موجود است که در واقع اشتراک تمام زیرگروههای خالص شامل S می‌باشد این زیرگروه را با نماد $<S>^*$ نشان داده و زیرگروه خالص تولید شده توسط S می‌نامند.

برهان . رجوع شود به صفحه ۱۱۴ جلد اول مرجع [۱۱]. □

لم ۳.۴.۱ فرض کنیم B و C زیرگروههایی از A باشند بطوریکه $C \leq B \leq A$. در اینصورت روابط زیر برقرارند:

۱) اگر C خالص در B و B خالص در A باشد، آنگاه C خالص در A است،

۲) اگر B خالص در A باشد، آنگاه $\frac{B}{C}$ خالص در $\frac{A}{C}$ است،

۳) اگر C خالص در A و $\frac{B}{C}$ خالص در $\frac{A}{C}$ باشد، آنگاه B خالص در A است.

برهان . رجوع شود به صفحه ۱۱۵ جلد اول مرجع [۱۱]. □

گزاره ۴.۴.۱ اگر G خالص در A باشد، آنگاه nG خالص در nA است.

برهان . از خالص بودن G در A طبق تعریف نتیجه می‌شود که برای هر $m \in \mathbb{Z}$، $mG = G \cap mA$. با ضرب n در طرفین این معادله داریم

$$n(mG) = nG \cap n(mA)$$

$$\Rightarrow \forall m \in \mathbb{Z}, m(nG) = nG \cap m(nA)$$

بنابراین nG در nA خالص است. □

مثال ۵.۴.۱ اگر T بخش تابدار از A و G خالص در A باشد، آنگاه $T+G$ خالص در A است.

برهان. به سادگی ملاحظه می‌شود که T، بخش تابدار A، در A خالص است. لذا برای هر $n \in \mathbb{Z}$، $nT = T \cap nA$. بنا به فرض G نیز در A خالص است، پس برای هر $n \in \mathbb{Z}$، $nG = G \cap nA$. در نتیجه برای هر $n \in \mathbb{Z}$، داریم

$$n(T+G) = nT + nG = (T \cap nA) + (G \cap nA) = (T+G) \cap nA$$

بنابراین $T+G$ در A خالص است. □

۵.۱ ماتریس ارتفاع

تعریف ۱.۵.۱ در حالت کلی عدد ترتیبی[2] را یک مفهوم اولیه تعریف می‌کنیم که قاعده‌های ذیل در آن صدق می‌کند:

۱) به هر مجموعه خوش‌ترتیب $(A, \leq)$ یک عدد ترتیبی، که آن را با $ord(A, \leq)$ نشان می‌دهیم، نسبت داده می‌شود و اگر α یک عدد ترتیبی باشد، یک مجموعهٔ خوش‌ترتیب $(A, \leq)$ وجود دارد که $ord(A, \leq) = \alpha$.

Ordinal number[2]