دانشگاه لرستان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

عنوان

نامساوی های نوع استروسکی و چبیشف وزن دار جدید

نگارش

زیبا پورقبادی

استاد راهنما

دکتر علی ثامری پور

استاد مشاور

دکتر محمود شکوری

پایان نامه جهت دریافت درجه ی کارشناسی ارشد

در رشته **ریاضی محض**

شهریور ۱۳۹۲

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

همسر مهربانم

و

فرزند دلبندم ویانا

تقدیر و تشکر

((من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق))

خداوند متعال را شکر گزارم که توفیق گام نهادن در وادی علم و دانش و لذت چشیدن ذرهای از آن بیکران را بر من ارزانی داشت.هم او که در این راه مرا از نعمت وجود اساتید فرهیخته و گرانمایه ای بهره مند گردانید که هر یک مهر تابنده ای در ظلمات ندانسته هایم بودند.

بر خود فرض می دانم که از تک تک این بزرگان خاضعانه تقدیر و تشکر نمایم.مخصوصا از اساتید راهنما و مشاور جناب آقای دکتر علی ثامری و جناب آقای دکتر محمود شکوری که همواره از رهنمودهای مفیدشان در زندگی علمی و اجتماعی ام بهره برده ام صمیمانه سپاسگزارم و نیز از جناب آقای دکتر ناصر عباسی که قبول زحمت فرموده و داوری این پایان نامه را بر عهده گرفته اند و همواره از تجارب مفیدشان استفاده کرده ام کمال امتنان و تقدیر را دارم.زحمات معلمان و اساتید از دبستان تا مقطع کارشناسی ارشد را ارج نهاده و بر ایشان از درگاه خداوند متعال طلب سعادت می نمایم.درپایان برخود واجب می دانم که از زحمات مادر عزیزم و خانواده ام که در تمام مراحل زندگی پشتیبانم بوده اند و آرامش و آسایش فکری را برایم فراهم نمودند تشکر کنم و از خداوند متعال آرزوی سلامتی و عاقبت به خیری برایشان دارم.

چکیده

نام خانوادگی: پورقبادی نام: زیبا

عنوان مقاله: نامساوی های نوع استروسکی و چبیشف وزن دار جدید

استاد راهنما: دکتر علی ثامری پور

استاد مشاور: دکتر محمود شکوری

درجه تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته تحصیلی: ریاضی محض، آنالیز

محل تحصیل: دانشگاه لرستان دانشکده: علوم پایه

تاریخ فارغ التحصیلی: شهریور ۱۳۹۲ تعداد صفحه: ۹۰

کلید واژه ها: نامساوی استروسکی،نامساوی های چبیشف،نامساوی های انتگرال.

چکیده:در این پایان نامه،پس از بیان مقدمه ای کوتاه در مورد نامساوی های مشهور استروسکی و چبیشف قصد داریم نامساوی های نوع استروسکی و چبیشف وزن دار جدید را بررسی کنیم.برای این منظور،ابتدا به تعاریف و قضایای مقدماتی نیاز داریم که در فصل اول به آن ها پرداخته ایم.سپس در ادامه اتحاد مونتگمری وزن را بیان می کنیم.پس از این مقدمات، نامساوی وزن دار استروسکی را برای توابع پیوسته مطلق، توابع با تغییر کراندار و توابع لیپ شیتز بکار می بریم و مثال های برای نامساوی وزن دار استروسکی ارائه می دهیم.در ادامه به بیان نامساوی های انتگرال وزن دار از نوع استروسکی برای تابع بردار -مقدار در فضای هیلبرت می پردازیم.هم چنین تعمیمی از نامساوی چبیشف را معرفی می نماییم.در نهایت، در این کار نامساوی های نوع استروسکی و چبیشف وزن دار جدید شامل دو تابع را به دست می آوریم.

فهرست مطالب

مقدمه

در سال ۱۸۸۲، چبیشف [1] [۱] ثابت کرد که اگر $||g||' \in L_\infty[a,b]$ و $||f||'$ آنگاه

$$|T(f,g)| \leqslant \frac{1}{12}(b-a)^2||f||'_\infty||g||'_\infty$$

که برای دو تابع مطلقا پیوسته $f,g:[a,b]\to R$ تابعکی است بصورت

$$T(f,g)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx-(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx)(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx)$$

در ۱۹۳۴، گراس [2] [۲] نشان داد که:

$$|T(f,g)\leq \frac{1}{4}(M-m)(N-n)$$

M,m,N,n ارائه شده اعداد حقیقی هستند که در شرایط زیر صدق می کنند: $m\leq f(x)\leq M$ و

$n\leq g(x)\leq N\infty$ برای هر $x\in[a,b]$، که $T(f,g)$ در بالا تعریف شده است.

در ۱۹۳۸، استروسکی [3] نامساوی انتگرال زیر را ثابت کرد [۳]:

فرض کنید$f:I\to R$ که ؛$(I\subset R)$ یک نگاشت که در نقاط درونی I مشتق پذیر است و $a,b\in IntI$ و$a<b$

[1] $\check{C}eby\check{s}ev$

[2] $Gr\ddot{u}ss$

[3] Ostrowski

اگر $|f\prime(t)| \leqslant M$ و $\forall t \in (a,b)$ در این صورت

$$|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt| \leqslant \left[\frac{1}{4} + \frac{(x - \frac{(a+b)}{2})}{(b-a)^2}\right](b-a)^2$$

برای هر $x \in [a,b]$.

در ۲۰۰۷ ، کی بوکاریو [۴] و ای جوزین لاکود [۵] [۴] تعمیم زیر را از اتحاد مونتگمری [۶] وزنی به دست آوردند.

$$f(x) = \frac{1}{\varphi(1)}\int_a^b w(t)\varphi\prime\left(\int_a^t w(s)ds\right)f(t)dt + \frac{1}{\varphi(1)}\int_a^b P_{w,\varphi}(x,t)f\prime(t)dt$$

که $f : [a,b] \to R$ یک تابع مطلقا پیوسته و $\varphi : [0,1] \to R$ یک تابع مشتق پذیر با $\varphi(0) = 0$ و $\varphi(1) \neq 0$ و

$w : [a,b] \to [0,\infty)$ یک تابع چگالی احتمال است که هسته پئانو وزنی آن بصورت

$$P_{w,\varphi}(x,t) := \begin{cases} \varphi\left(\int_a^t w(s)ds\right) & , a \leqslant t < x, \\ \varphi\left(\int_a^t w(s)ds\right) - \varphi(1) & , x < t \leqslant b, \end{cases}$$

که برای هر $x \in [a,b]$ انتگرال پذیر است.

---

[۴] K. Boukerrioua

[۵] A. Guezane-lakoud

[۶] Montgomery identity

اگر $\varphi(t) = t$ آنگاه (۱.۵) به اتحاد مونتگمری وزنی به دست آمده توسط پیکاریک [7] در [۵] تبدیل می شود:

$$f(x) = \int_a^b w(t)f(t)dt + \int_a^b P_w(x,t)f\prime(t)dt,$$

که هسته پئانو [8] وزنی آن یعنی P_w به صورت :

$$P_w(x,t) := \begin{cases} \int_a^t w(s)ds & , a \leqslant t \leqslant x, \\ - \int_t^b w(s)ds - ۱ & , x < t \leq b. \end{cases}$$

است و در نهایت توزیع یکنواخت برای به دست آوردن اتحاد مونتگمری بکار می رود $[۲, p.۵۶۵]$:

$$f(x) = \frac{۱}{b-a}\int_a^b f(t)dt + \int_a^b P_{(x,t)}f\prime(t)dt,$$

با

$$P(x,t) := \begin{cases} \dfrac{t-a}{b-a} & \text{if} a \leqslant t \leqslant x, \\ \dfrac{t-b}{b-a} & \text{if} x < t \leqslant b. \end{cases}$$

[7] $Pe\check{c}ari\check{c}$

[8] Peano kernel

همچنین در [۴] تعمیم تابع چبیشف بصورت زیر معرفی شده است ،

$$T(w,f,g,\varphi\prime) := \int_a^b w(x)\varphi\prime\left(\int_a^x w(t)dt\right) f(x)g(x)dx - \frac{1}{\varphi(1)}\left[\int_a^b w(x)\varphi\prime\left(\int_a^x w(t)dt\right) f(x)\right]$$
$$\times \left[\int_a^b w(x)\varphi\prime\left(\int_a^x w(t)dt\right) g(x)dx\right],$$

نویسندگان مقاله نمایش زیر را به دست آوردند:

$$T(w,f,g,\varphi\prime) = \frac{1}{\varphi^2(1)}\int_a^b \left[w(x)\varphi\prime\left(\int_a^x w(t)dt\right)\right.$$
$$\times \left(\int_a^b P_{w,\varphi}(x,t)f\prime(t)dt\right)\left(\int_a^b P_{w,\varphi}(x,t)g\prime(t)dt\right)]dx,$$

و از آن برای به دست آوردن کران بالا ی قدر مطلق تابع چبیشف در حالتی که $g\prime \in L_\infty[a,b]$ و $f\prime$ استفاده می شود. این کران می تواند به صورت زیر بیان شود:

$$|T(w,f,g,\varphi\prime)| \leqslant \frac{1}{\varphi^2(1)}||f\prime||_\infty||g\prime||_\infty||\varphi\prime||_\infty \int_a^b w(x)H^2(x)dx,$$

که

$H(x) := \int_a^b |P_{w,\varphi}(x,t)|dt.$

نامساوی بالا یک تعمیم از نتایج به دست آمده توسط پیکاریک در [۲۳] را فراهم می کند.

هدف اصلی در این پایان نامه به دست آوردن برخی نامساوی های نوع استروسکی و چبیشف وزن دار جدید شامل دو تابع می باشد. این پایان نامه شامل پنج فصل است و مطالب هر فصل را به طور خلاصه بیان می کنیم.فصل

اول به تعاریف مقدماتی مورد نیاز در سراسر پایان نامه اختصاص یافته است.در فصل دوم نامساوی وزن دار استروسکی بیان می شود. در این فصل نامساوی های وزن دار نوع استروسکی برای به دست آوردن کران های بالای مختلف برای انحراف $f(x)$، $x \in [a,b]$، از میانگین انتگرال

$$\frac{۱}{\varphi(۱)} \int_a^b w(t)\varphi\prime \left(\int_a^t w(s)ds\right) f(t)dt$$

زمانی که f یک تابع مطلقا پیوسته،با تغییر کراندار یا لیپ شیتز روی بازه $[a,b]$ باشد. در فصل سوم به بیان نامساوی چبیشف و تعمیم آن می پردازیم.در فصل چهارم نامساوی های انتگرال وزن دار از نوع استروسکی را برای توابع بردار -مقدار و انتگرال بوخنر در فضای هیلبرت بیان می کنیم.هم چنین به کاربردهای برای قوانین انتگرال گیری در فضای هیلبرت اشاره می کنیم.درفصل پنجم که فصل آخر پایان نامه می باشد، نامساوی های نوع استروسکی و چبیشف وزن دار جدید بیان می شوند.

این پایان نامه تفصیل مقاله

"*Farooq Ahmad, N.S.Barnett, S.S.Dragomir, New weighted Ostrowski and Čebyšev type inequalities Nonlinear Analysis* ۷۱(۲۰۰۹)*e*۱۴۰۸ − *e*۱۴۱۲."

می باشد.

در آخر،واژه نامه ی انگلیسی به فارسی و کتاب نامه ی استفاده شده در این رساله درج شده است.

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

مقدمه: در این فصل به بیان برخی از تعاریف و قضایای مقدماتی که در فصل های آینده مورد نیازند،می پردازیم. این فصل شامل هشت بخش است که در آن به تعریف توابع با تغییر کراندار، توابع مطلقا پیوسته، توابع لیپ شیتز، انتگرال ریمان اشتلیس، خاصیت های خطی انتگرال، اتحاد مونتگمری، فضاهای باناخ، فضای هیلبرت، عملگرهای خطی، فضاهای L_p و قضایای مربوط می پردازیم.اکثر مطالب این فصل از [۲۷] انتخاب شده اند.

۱.۱ تابع های با تغییر کراندار

تعریف ۱.۱.۱. بازه بسته و فشرده $[a,b]$ را در نظر بگیرید. مجموعه $P\{x_0,x_1,...,x_n\}$ را که در آن $a=x_0<$ $x_{1<...<x_{n-1}<x_n=b}$ است را یک افراز $[a,b]$ می نامیم و مجموعه تمام افرازه های $[a,b]$ را با $P[a,b]$ نمایش می دهیم.

تعریف ۲.۱.۱. تابع f بر بازه بسته [a،b] را با تغییر کراندار گوییم هرگاه به ازای هر افرازدلخواه $P=\{x_k\}_{k=0}^{n}$ عدد مثبتی مانند M موجود باشد به طوری که $\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|\leqslant M$

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنیم f بر بازه $[a,b]$ با تغییر کراندار باشد آنگاه متناظر با افراز $P=\{x_0,x_1,...,x_n\}$ از $[a,b]$ قرار می دهیم $\sum P=\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|$

حال تعریف می کنیم : $V_f[a,b]=sup\{\sum p|p\in P[a,b]\}$ و آن را تغییر کل f بر بازه $[a,b]$ می نامیم.

قضیه ۱.۱.۱. هر گاه تابع f بر $[a,b]$ یکنوا باشد،آنگاه تابع f بر $[a,b]$ با تغییر کراندار است.

اثبات. فرض کنیم f صعودی باشد،در این صورت برای هر افراز دلخواه $[a,b]$، با توجه به این که $f(x_k)-f(x_{k-1})\geq 0$ داریم:

$$\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|=\sum_{k=1)^n(f(x_k)-f(x_{k-1}))=f(b)-f(a)}$$

(برای حالت نزولی $-f$ را در نظر می گیریم).

مثال ۱.۱.۱.

توابع $\sqrt{x}$ و $2x+1$ بر بازه $[0,1]$ با تغییر کراندار هستند.(با توجه به قضیه بالا و اینکه توابع مزبور بر بازه $[0,1]$ صعودی اند.)

قضیه ۲.۱.۱. اگر تابع f بر بازه ی بسته $[a,b]$ پیوسته باشد و $f\prime$ بر بازه باز (a,b) موجود و کراندار باشد یعنی عدد مثبتی مانند M موجود باشد به طوری که برای هر $x \in (a,b)$، $|f\prime(x)| \leq M$ آنگاه f بر بازه $[a,b]$ با تغییر کراندار است.

اثبات. فرض کنیم $P = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ یک افراز دلخواه از $[a,b]$ باشد.بنابر قضیه مقدار میانگین عدد حقیقی $u_k \in (x_k, x_{k-1})$ موجود است به طوری که:

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f\prime(u_k)(x_k - x_{k-1})$$

بنابر این داریم:

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} |f\prime(u_k)(x_k - x_{k-1})| \leq M \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = M(b-a)$$

یعنی f بر $[a,b]$ با تغییر کراندار است.

قضیه ۳.۱.۱. فرض کنیم دو تابع f و g بر بازه بسته ی $[a,b]$ با تغییر کراندار باشند.در این صورت مجموع تفاضل و حاصل ضرب آنها نیز با تغییر کراندارند و داریم :

$$V_{f.g} \leq AV_f + BV_g \quad \text{و} \quad V_{f\pm g} \leq V_f \pm V_g$$

قضیه ۴.۱.۱. f بر بازه $[a,b]$ با تغییر کراندار است اگر و تنها اگر f بر $[a,c]$ و $[c,b]$ با تغییر کراندار باشد که در آن $c \in (a,b)$.

نکته ۱.۱.۱. اگر f بر $[a,b]$ با تغییر کراندار باشد و $c \in (a,b)$ در این صورت:

$$V_f[a,b] = V_f[a,c] + V_f[c,b]$$

و اگر $\alpha \in R$ آنگاه αf نیز با تغییر کراندار است و

$V_{\alpha f}[a,b] = |\alpha| V_f[a,b].$

نکته ۲.۱.۱. هرگاه f بر $[a,b]$ با تغییر کراندار باشد،آنگاه $|f|$ نیز بر $[a,b]$ با تغییر کراندار است ولی عکس نکته بالا برقرار نیست. به عنوان مثال تابع

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ گویا} \\ -1 & x \text{ گنگ} \end{cases}$$

با تغییر کراندار نیست ولی $|f(x)| = 1$ با تغییر کراندار است چون تابع ثابت است.

۲.۱ تابع های پیوسته مطلق

تعریف ۱.۲.۱. تابع حقیقی f را بر بازه $[a,b]$ پیوسته مطلق می نامیم در صورتی که برای هر $\epsilon > 0$، δ مثبتی موجود باشد به طوری که برای هر n زیر بازه ی باز از هم جدای $[a,b]$ باشیم، $\sum_{k=1}^{n} |b_k - a_k| < \delta$ آنگاه:

$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k| < \epsilon$

قضیه ۱.۲.۱. هر تابع پیوسته مطلق بر $[a,b]$ بر این بازه،پیوسته و با تغییر کراندار است.

اثبات. اولا پیوستگی آن به وضوح برقرار است زیرا به ازای x و y های مرتبط به δ ی نظیر ϵ می توان بازه (x,y) را در نظر گرفت.از طرفی با توجه به تعریف پیوستگی مطلق δ را متناظر با $\epsilon = 1$ اختیار می کنیم.در این صورت هر تقسیم جزیی $[a,b]$ را می توان به K دسته مجزا از فاصله ها بخش کرد(در صورت لزوم با افزودن نقاط جدید) که طول کلی هر یک،از δ کوچکتر باشد که در آن $K = \left[\frac{b-a}{\delta}\right] + 1$ است.پس:

$\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n}{}_1|f(x_i)-f(x_{i-1})|+...+\sum_{i=1}^{n}{}_k|f(x_i)-f(x_{i-1})| \leq 1+...+1 = K$

نکته ۱.۲.۱. تابعی که پیوسته و با تغییر کراندار باشد لزوما پیوسته مطلق نیست.

تعریف ۲.۲.۱. تابع f روی یک فاصله در شرط لیپ شیتس [1] (از مرتبه یک) صدق می کند هر گاه عدد ثابت M موجود باشد به طوری که برای همه ی مقدارهای x, y از این فاصله داشته باشیم:

$$|f(y)-f(x)| \leq M|x-y|$$

قضیه ۲.۲.۱. هر تابع که در شرط لیپ شیتز صدق کند پیوسته مطلق است.

نتیجه ۱.۲.۱. هر تابع که در شرط لیپ شیتز صدق کند با تغییر کراندار است.

نکته ۲.۲.۱. عکس نتیجه بالا الزاما برقرار نیست.

مثال ۱.۲.۱. تابع

$$f(x)=\begin{cases} 2x & x\geq 1 \\ x^2 & x<1 \end{cases}$$

در بازه $[-2, 2]$ با تغییر کراندار است چون در بازه های $[-2, 1]$ و $[1, 2]$ دارای مشتق کراندار است.ولی چون $f(x)$ در نقطه $x=1$ پیوسته نیست در شرط لیپ شیتز صدق نمی کند.

[1] Lipschitzian

۳.۱ انتگرال ریمان اشتیل یس

تعریف ۱.۳.۱. به ازای افراز $P = \{x_0, x_1...x_n\}$ از بازه $[a,b]$ مجموع ریمان اشتیل یس [۲] تابع f بر حسب α به صورت زیر تعریف می شود: $S(p,f,\alpha) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \vartriangle \alpha_k$ که در آن $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ و

$\vartriangle\alpha_k = \alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})$

تعریف ۲.۳.۱. با مفروضات تعریف بالا گوییم f بر حسب α بر بازه $[a,b]$ انتگرال ریمان دارد اگر عددی مانند A وجود داشته باشد به طوری که: به ازای هر $\epsilon > 0$ یک افراز $[a,b]$ مانند p_ϵ موجود باشد به قسمی که برای هر تظریف p_ϵ مانند p و هر انتخاب نقطه های t_k در $[x_{k-1}, x_k]$ داشته باشیم:

$$|S(p,f,\alpha) - A| < \epsilon$$

در این صورت می نویسیم $f \in R(\alpha)$ بر $[a,b]$. عدد A در صورت وجود یکتاست و آن را با نماد $\int_a^b f d\alpha = A$ نمایش می دهیم.

نکته ۱.۳.۱. هرگاه $f \in R(\alpha)$ بر $[a,b]$ آنگاه $f \in R(\alpha)$ بر هر زیر بازه ی $[a,b]$.

۴.۱ خاصیت های خطی انتگرال

۱) هرگاه $f_1 \in R(\alpha)$ و $f_2 \in R(\alpha)$ بر $[a,b]$ و c_1 و c_2 اعداد حقیقی باشند آنگاه:

$$R(\alpha) \in c_1 f_1 + c_2 f_2$$

و داریم:

[۲] Riemann-Stieltjes integral

$\int_a^b (c_1 f_1 + c_2 f_2) d\alpha = c_1 \int_a^b f_1 d\alpha + c_2 \int_a^b f_2 d\alpha$

۲) هرگاه $f \in R(\alpha_1)$ و $f \in R(\alpha_2)$ بر $[a,b]$ و c_1 و c_2 اعداد حقیقی باشند آنگاه:

$f \in R(c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2)$

و داریم:

$\int_a^b f d(c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2) = c_1 \int_a^b f d\alpha_1 + c_2 \int_a^b f d\alpha_2$

۳) هرگاه $f_1 \leq f_2$ بر $[a,b]$ و α بر $[a,b]$ صعودی باشد آنگاه:

$\int_a^b f_1 d\alpha \leq \int_a^b f_2 d\alpha$

۴) هرگاه $f \in R(\alpha)$ بر $[a,b]$ و $a < c < b$ آنگاه $f \in R(\alpha)$ بر $[a,c]$ و نیز بر $[c,b]$ و داریم:

$\int_a^c f d\alpha + \int_c^b f d\alpha = \int_a^b f d\alpha$

۵) هرگاه $f \in R(\alpha)$ و α بر $[a,b]$ صعودی باشد و نیز به ازای هر x متعلق به $[a,b]$، $|f(x)| \leq M$ آنگاه:

$|\int_a^b f d\alpha| \leq M[\alpha(b) - \alpha(a)]$

۶) هرگاه $f \in R(\alpha)$ و $g \in R(\alpha)$ بر $[a,b]$ و α بر بازه مزبور صعودی باشد آنگاه،داریم: $fg \in R(\alpha)$ و نیز $|f| \in R(\alpha)$ و

$|\int_a^b f d\alpha| \leq \int_a^b |f| d\alpha$