بسم الله الرحمن الرحیم

باسمه تعالی

دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی

تعهدنامه اصالت اثر

اینجانب سحر مازندرانیان متعهد می‌شوم کــــه مطالب منــــدرج در ایــن پایان‌نامه/رساله حاصل کار پژوهشی اینجانب است و دستــاوردهای پژوهشی دیگــران که در این پژوهش از آن‌ها استفاده شده است، مطابق مقــررات، ارجاع و در فهرست منـــابع و مآخذ ذکر گردیده است. این پایان‌نامه/رساله قبلاً برای احراز هیچ مـدرک هم سطـح یا بالاتر ارایه نشده است. در صورت اثبات تخلف (در هر زمان) مدرک تحصیلی صادر شده توسط دانشگاه از اعتبار ساقط خواهد شد.

نام و نام خانوادگی دانشجو

امضاء

سحر مازندرانیان

دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی کاربردی

حل معادله انتگرال همرشتاین تابعی با استفاده از درون‌یابی متوالی

نگارنده:
سحر مازندرانیان

استاد راهنما:
دکتر رضا ملاپور اصل

استاد مشاور:
دکتر حمید صفدری

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
در رشته ریاضی کاربردی

آبان‌ماه ۱۳۹۲

شماره: ۵۹۲/۱۴
تاریخ: ۹۲/۱۱/۱۴
پیوست:

دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی

بسمه تعالی

صورتجلسه دفاع پایان‌نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی ارشد خانم سحر مازندرانیان رشته ریاضی کاربردی تحت عنوان «حل معادله انتگرال همرشتاین تابعی با استفاده از درون یابی متوالی» در تاریخ ۱۳۹۲/۰۸/۰۴ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی برگزار گردید و نتیجه به شرح ذیل می‌باشد.

قبول (با درجه بسیار خوب امتیاز ۱۸/۲۵) دفاع مجدد مردود

هیجده و بیست و پنج صدم

۱. عالی (۲۰-۱۹)

۲. بسیار خوب (۱۸،۹۹-۱۸)

۳. خوب (۱۷،۹۹-۱۶)

۴. قابل قبول (۱۵،۹۹-۱۴)

۵. غیرقابل قبول (کمتر از ۱۴)

اعضاء	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
استاد راهنما	دکتر رضا ملاپور	استادیار	
استاد مشاور	دکتر حمید صفدری	استادیار	
داور داخلی	دکتر حمید مسگرانی	دانشیار	
داور خارجی	دکتر محسن شاهرضایی	استادیار	
نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه	دکتر حمید مسگرانی	دانشیار	

دکتر ایوب اسماعیل پور
رئیس دانشکده علوم پایه

از طرف مهدی سواری

تهران، لویزان، کد پستی: ۱۶۷۸۸-۱۵۸۱۱
صندوق پستی: ۱۶۳-۱۶۷۸۵
تلفن: ۹-۲۲۹۷۰۰۶۰ فکس: ۲۲۹۷۰۰۳۳
Email:sru@sru.ac.ir
www.srttu.edu

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

و

همسر مهربانم

بر خود لازم می دانم نهایت تشکر و قدردانی را از استاد گرانقدر جناب دکتر رضا ملاپور اصل به عنوان استاد راهنما که تمام مراحل اجرا و تدوین این پایان نامه با راهنمایی های فنی و ارزشمند خود مرا یاری نمودند، ابراز دارم و همچنین از دکتر حمید صفدری به عنوان استاد مشاور کمال تشکر را دارم. امید است که همواره وجود پر فروغ این اساتید فرزانه روشنی بخش جاده ی پر فراز و نشیب علم و دانش باشد

و همچنین تشکر و قدردانی از کلیه اساتید گروه ریاضی و سایر افرادی که همکاری لازم را در تهیه این پایان نامه داشته اند قدردانی می نماییم.

نام دانشجو: سحر مازندرانیان

تاریخ ۱۳۹۲/۸/۱

چکیده

یکی از ابزارهای بسیار قدرتمند برای درون‌یابی و تقریب توابع مختلف، اسپلاین‌های مکعبی هستند که خود به چندین گونه تفکیک می‌شوند. ما در این پایان‌نامه به بررسی و حل عددی معادله‌ی انتگرال همرشتاین نوع دوم که به صورت زیر است، می‌پردازیم.

$$x(t) + g(t) + \int_a^b H(t,s).f(s, x(s), x(\varphi(s)))ds = g(x), \qquad x \in [a,b]$$

روشی که در اینجا مورد بررسی قرار می‌گیرد برگرفته از مرجع [۱] است که از روش درون‌یابی (با به کارگیری اسپلاین‌های مکعبی طبیعی) و همچنین کوادراتور ذوزنقه‌ای استفاده کرده و با به کارگیری یک تکنیک تکراری مسأله مورد نظر را حل می‌کند. در ادامه همگرایی و پایداری عددی این روش را مورد بررسی و آنالیز قرار داده و صحت آنها را با استفاده از نتایج عددی نشان خواهیم داد.

واژگان کلیدی: معادله انتگرال همرشتاین،درون‌یابی، اسپلاین مکعبی، آنالیز همگرایی، آنالیز پایداری عددی.

فهرست مطالب

لیست تصاویر

لیست جداول

پیش‌گفتار

یکی از مهمترین مباحث در علم ریاضیات، معادلات دیفرانسیل و معادلات انتگرال می‌باشند که از نظر کاربردی جایگاه خاصی را در علوم مختلف به خود اختصاص داده است. لذا برای به دست آوردن جواب برای این دسته از معادلات از روش‌های تقریبی استفاده می‌کنیم. در عصر ارتباطات روشی که در مدت زمان کمتر، تقریب بهتری (خطای کمتر) را برای دسته‌ای از مسائل دربر داشته باشد، دارای ارزش و اعتبار خواهد بود.

در این پایان‌نامه هدف حل عددی معادله انتگرال همرشتاین تابعی می‌باشد که در بسیاری از مسائل فیزیک مهندسی ظاهر می‌شود. همچنین با استفاده از درون‌یابی متوالی و روش تکراری، تقریبی برای جواب معادله همرشتاین را فراهم کرده و همگرایی و پایداری این روش عددی را با یکسری قضایا و مثال‌هایی مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در فصل اول مقدمه‌ای بر تاریخچه (نظریه) معادلات انتگرال ارائه می‌دهیم. در فصل دوم به معرفی درون‌یابی اسپلاین و خطای آن و ویژگی‌های آن می‌پردازیم. همچنین در فصل سوم به ارائه روش عددی بر پایه اسپلاین و اثبات همگرایی و پایداری آن می‌پردازیم و در نهایت درفصل چهارم به بیان برخی مثال‌های عددی پیرامون موضوع فوق می‌پردازیم.

فصل ۱

مفاهیم و تعاریف

در این فصل که هدف آن معرفی تعاریف اساسی و بیان مفاهیم اولیه موضوع مورد بحث است، پس از مطالعه‌ی مختصری از تاریخچه معادلات انتگرال و معرفی انواع متداول این دسته از معادلات، به مسأله عمومی درون‌یابی و مفاهیم اساسی روش‌های تکراری می‌پردازیم.

۱.۱ تعاریف مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱. [۵] الگوریتم[۱]، مجموعه‌ی محدودی از دستورالعمل‌هاست که اگر دنبال شوند موجب انجام کار خاصی می‌گردد بعلاوه اینکه دارای معیارهای ورودی، خروجی، قطعیت، محدودیت و کارایی است.

مفهوم الگوریتم اساس برنامه‌های کامپیوتری است و برآورد دقیق زمان لازم و میزان حافظه مصرفی برای الگوریتم‌ها بسیار مشکل است. یک برآورد تقریبی از زمانی که برای منظور ما کافی است را می‌توان به سادگی با شمردن تعداد عملیات حسابی که باید انجام گیرد و همچنین با ضرب آنها در یک شاخص زمانی اجرا برای ماشین به کار رفته، به دست آورد که معمولاً از آن به عنوان مرتبه پیچیدگی الگوریتم یاد می‌شود. دقت شود این در حالی است که هیچ تخمین زمانی برای ورود و خروج اطلاعات در نظر گرفته نشده است.

تعریف ۲.۱.۱ (O بزرگ و o کوچک). فرض کنید f یک تابع و k یک عدد حقیقی مثبت باشد و

[۱] Algorithm

داشته باشیم
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h^k}=C\neq 0.$$
در این‌صورت گوییم $f(h)$ متناسب با h^k (از مرتبه‌ی h^k) است. همچنین این مفهوم را با نماد O نشان می‌دهیم و می‌نویسیم
$$f(h)=O(h^k)$$

و اگر داشته باشیم
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h^k}=0.$$
این مفهوم را با نماد o نشان می‌دهیم و می‌نویسیم $f(h)=o(h^k)$. یعنی وقتی $h\to 0$، $f(h)$ سریع‌تر از h^k به صفر میل می‌کند.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنیم $n\in\mathbb{N}$ و $1\leq p$ در این صورت

۱. $C\,[a,b]$ فضای همه توابع $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ به طوریکه تابع f روی بازه $[a,b]$ پیوسته است.

۲. $C^n\,[a,b]$ فضای همه توابع $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ به طوریکه مشتق مرتبه nام تابع f روی بازه $[a,b]$ پیوسته است.

تعریف ۴.۱.۱. [۱۰] فرض کنیم X یک فضای خطی و a اسکالری حقیقی و دلخواه باشد. همچنین اگر تابع $\|.\|:X\to\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ به ازای هر $x,y\in X$ دارای خواص زیر باشد

۱. $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$

۲. $\|ax\|=|a|\,\|x\|$

۳. $\|x\|\geq 0$

۴. $\|x\|=0\Leftrightarrow x=0$

در این صورت تابع $\|.\|$ را نرم[۲] فضای خطی X گوییم و X را فضای نرم‌دار خطی می‌نامیم. در ضمن تابع $|.|:X\to\mathbb{R}$ را شبه نرم[۳] گوییم اگر در سه شرط اول صدق کند.

---
[۲] Norm

[۳] Semi norm

از جمله نرم‌های برداری مرسوم می‌توان به نرم‌های زیر به‌ازای بردار $\mathbf{x} = (x_۱, \dots, x_n)^T$ اشاره کرد

$$\|\mathbf{x}\|_۱ = \sum_{i=۱}^{n} |x_i| \qquad \text{(نرم-۱)}$$
$$\|\mathbf{x}\|_۲ = \left(\sum_{i=۱}^{n} x_i^۲\right)^{\frac{۱}{۲}} \qquad \text{(نرم-۲)}$$
$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|x_i| : i = ۱, \dots, n\} \qquad \text{(ماکزیمم-نرم)}$$

نرم‌های مشابه‌ای برای فضاهای تابعی وجود دارد. به عبارتی برای $f \in C^k[a, b]$ داریم

$$\|\mathbf{f}\|_۱ = \int_a^b |f(x)| dx, \qquad \text{(نرم-۱)}$$
$$\|\mathbf{f}\|_۲ = \left[\int_a^b f^۲(x) dx\right]^{\frac{۱}{۲}} \qquad \text{(نرم-۲)}$$
$$\|\mathbf{f}\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| \qquad \text{(ماکزیمم-نرم)}$$

لم ۵.۱.۱. [۷] فرض کنیم X یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ باشد.

۱. هر نرم $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ پیوسته یکنواخت است.

۲. در حالت خاص $X = \mathbb{R}^n$، هر نرم $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ نسبت به نرم اقلیدسی $\|\cdot\|_۲$ پیوسته یکنواخت است.

تعریف ۶.۱.۱ (معادلات خطی)**.** به معادلاتی که در نهایت به حل دستگاه خطی $Ax = b$ منجر شود، معادلات خطی گویند که در آن $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ و $x, b \in \mathbb{R}^n$.

تعریف ۷.۱.۱ (عدد حالت)**.** عدد حالت ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ وابسته به نرم القا شده‌ی $\|\ .\ \|$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\operatorname{cond}(A) = \| A \| \| A^{-۱} \| .$$

می‌توان گفت حتی دستگاهی با ابعاد کوچک می‌تواند دارای عدد حالت بزرگی باشد که در این صورت گوییم دستگاه بد حالت است. در واقع دستگاهی را خوش حالت گوییم که عدد حالت آن به عدد ۱ نزدیک باشد.

۲.۱ تاریخچه معادلات انتگرال

به طور کلی به معادلاتی که در آنها تابع مجهول تحت یک انتگرال ظاهر می‌شود، معادلات انتگرال گفته می‌شود. بویس ریموند[۴] اولین کسی بود که نام معادلات انتگرالی را بر روی این گونه معادلات نهاد، اما در عمل لاپلاس[۵] اولین کسی بود که در سال ۱۷۸۲ برای حل معادلات دیفرانسیل معادله انتگرال را مطرح نمود و به دنبال آن فوریه[۶] برای حل مسائل حرارت، تبدیلات سینوسی و کسینوسی فوریه و همچنین آبل [۷] در حل مسائل مکانیکی، معادله آبل را مطرح کردند که هر یک به نوعی به معادله‌های انتگرالی منجر می‌شدند. افراد دیگری نیز در سیر تکامل معادلات انتگرالی موثر بوده‌اند، بعضی از این افراد عبارتند از:

- ★ پواسون[۸] در تئوری مغناطیس (۱۸۲۶)
- ★ لیوویل[۹] در حل برخی معادلات دیفرانسیل به کمک معادلات انتگرالی (۱۸۳۲)
- ★ نیومن [۱۰] مسأله دیریکله را تبدیل به یک معادله نمود (۱۸۷۰)
- ★ ولترا[۱۱] برای اولین بار نظریه عمومی معادلات انتگرالی را ارائه نمود (۱۸۹۶)

نظریه معادلات انتگرال یکی از مهمترین شاخه‌های علم ریاضیات است اصولاً اهمیت آن از لحاظ مسائل مقدار مرزی در تئوری معادلات با مشتق جزئی است. معادلات انتگرال در علوم فیزیک، شیمی، ریاضیات، علوم فنی و غیره و ... کاربردهای فراوانی دارد. به طور مثال می‌توان به معادلات پیچیده گرما و موج اشاره کرد که از جمله معادلات انتگرال در علم فیزیک می‌باشند.
لیکن در حقیقت توسعه نظریه معادلات انتگرال تنها در اواخر قرن ۱۹ شروع شد در حدود سال‌های ۱۹۰۰-۱۹۰۳ بود که یک ریاضیدان ایتالیایی به نام ولترا روی آن کارکرد و همچنین یک ریاضیدان

[۴] Bois Reymond

[۵] Laplace

[۶] Fourier

[۷] Abel

[۸] Poison

[۹] Liouville

[۱۰] Newman

[۱۱] Voltra

سوئدی به نام فردهلم[۱۲] در همان سال‌ها یک روش جدید جهت حل مسئله دریکله [۱۳] پیشنهاد داد و سپس یک دسته‌بندی کلی از معادلات انتگرالی خطی را انجام داد که شامل دسته‌بندی خاصی از معادلات ولترا نیز بودند. در ادامه این فرایند هیلبرت به تحقیق در مورد معادلات انتگرالی پرداخت و در حل بسیاری از مسائل ریاضی و فیزیک از آنها بهره جست. یکی از کارهای بزرگ وی فرموله کردن مسائل معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی با شرایط مرزی و اولیه به صورت یک معادله انتگرالی است که بدین ترتیب حرکتی نو در حل این گونه معادلات به وجود آورد.
از آن به بعد تا عصر حاضر معادلات انتگرال موضوع تحقیقات ریاضیدانان زیادی بوده است زیرا آنان به طور پیوسته به مسئله جدید و جالبی برخورد می‌کنند. قضایای فردهلم از قضایای بنیادی معادلات انتگرال هستند از آن جای که این قضایا ابتدا توسط فردهلم برای هسته‌های پیوسته ارائه شده‌اند لیکن بعداً توسط پژوهشگران دیگری برای هسته‌های کلی‌تری تعمیم یافته‌اند لذا لازم است از تحقیقات کارلمن که در این راه نقش عدیده‌ای داشته است یاد نمود . یکی از مسائل خوش وضع، معادلات انتگرال نوع دوم می‌باشند که به صورت تحلیلی توسط فردهلم حل شده است و با روش‌های عددی نظریه نیستروم، بسط کمترین مربعات، گالرکین، تجزیه ادومیان، الگوریتم مکانیکی و توابع شعاعی پایه می‌توان این دسته از مسائل را حل نمود. معادلات نوع اول که از مسائل بدوضع هستند به سادگی قابل حل نبوده و گاهی اوقات این نوع مسائل جواب نداشته و یا اینکه جواب منحصر به فرد ندارند. این نوع مسائل را می‌توان با یکی از روش‌های بسط، توابع ویژه، منظم‌سازی، تکراری و افزوده گالرکین حل کرد.
امروزه اکثر مسائل علوم مهندسی را با توجه به پیچیدگی مدل مربوطه با روش‌های عددی حل می‌کنند و تقریب تابع یکی از مهمترین مسائل در زمینه‌ی ریاضیات کاربردی و مهندسی می‌باشد. این تقریب باید به گونه‌ای باشد که با حجم عملیات کمتری به دقت خوبی برسد لذا برای تقریب مسائل که به صورت معادله انتگرال ظاهر می‌شوند با توجه به شکل و خصوصیات این گونه معادلات روش‌های زیادی برای حل آنها وجود دارد از مهم‌ترین روش‌ها می‌توان به روش‌های طیفی اشاره کرد.

۳.۱ دسته بندی معادلات انتگرال

همچنان که گفته شد معادلات انتگرال، معادلاتی هستند که در آنها تابع مجهول تحت عملگر انتگرال ظاهر می‌شود. از منظر اینکه دامنه انتگرال‌گیری، ثابت و یا متغیر باشد معادلات انتگرال به دو دسته

[۱۲] Fredholm

[۱۳] Dirichlet

معادلات انتگرالی فردهلم و معادلات انتگرالی ولترا تقسیم می‌شوند. جهت مشاهده دسته‌بندی کامل معادلات انتگرال، خواننده می‌تواند به مرجع [۸] مراجعه کند.

۱.۳.۱ معادلات انتگرال فردهلم

در تمام این معادلات، انتگرال‌گیری بر بازه‌ای مانند $[a, b]$ صورت می‌پذیرد و این یعنی حدود بالایی و پایینی انتگرال به ترتیب a و b می‌باشند و باید در نظر داشت که b ثابت است و شکل کلی آن به صورت زیر است

$$h(s)f(s) = g(s) + \lambda \int_a^b k(s,t)f(t)dt,$$

که در آن معادله انتگرال فردهلم نوع سوم می‌گوییم. اما اگر $h(s) = ۰$ باشد در این صورت معادله انتگرال فردهلم نوع اول را داریم.

$$g(s) = \lambda \int_a^b k(s,t)f(t)dt,$$

اگر $h(s) = ۱$ در این صورت معادله انتگرال فردهلم نوع دوم را داریم:

$$f(s) = g(s) + \lambda \int_a^b k(s,t)f(t)dt,$$

و اگر $h(s) = ۱$ و $g(s) = ۰$ باشد معادله انتگرال فردهلم همگن را خواهیم داشت.

$$f(s) = \lambda \int_a^b k(s,t)f(t)dt,$$

۲.۳.۱ معادلات انتگرال ولترا

در این گروه از معادلات، انتگرال‌گیری بر بازه‌ای مانند $[a, s]$ انجام می‌شود. به عبارتی حد بالایی انتگرال به جای مقدار ثابت b، متغیر s است. صورت کلی معادلات انتگرال ولترای نوع اول و دوم و سوم و همگن مانند بالا تعریف می‌شوند با این تفاوت که به جای حد بالای b متغیر s را خواهیم داشت یعنی

$$h(s)f(s) = g(s) + \lambda \int_a^s k(s,t)f(t)dt,$$