بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه یزد

دانشکده فنی و مهندسی

گروه مکانیک

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

مهندسی مکانیک- طراحی کاربردی

بررسی کمانش دینامیکی ستون‌ها تحت بار ضربه‌ای

استاد راهنما : دکتر علی‌رضا فتوحی

استاد مشاور: دکتر علی‌رضا شفیعی

پژوهش و نگارش: احمد گلزار

مهرماه ۱۳۹۰

چکیده

کمانش یکی از مهمترین پدیده‌ها در مکانیک جامدات است. این پدیده سازه‌هایی را تهدید می‌کند که بسیار نازک بوده و تحت نیروی فشاری هستند. ساختارهای باریک و بلند تحمل کننده‌ی بار محوری در همه جای طبیعت، از استخوان بدن جانداران گرفته تا قسمت‌های مختلف هواپیما و زیردریایی و غیره یافت می‌شوند و از این رو بررسی پایداری این اعضا از اهمیت خاصی برخوردار است.

در این پژوهش کمانش دینامیکی ستون تحت بار ضربه‌ای بررسی شده است. شرایط ضربه به‌صورت برخورد جسمی در حال سقوط با انتهای آزاد ستون ایجاد شده است. با فرض مدل تیر تیموشنکو معادلات حاکم و شرایط مرزی حاکم بر مسأله، با استفاده از اصل همیلتون استخراج شده است. معادلات حاکم به‌صورت یک مسأله مقدار ویژه بوده و با استفاده از روش عددی درون‌یابی مشتق تعمیم‌یافته حل معادلات انجام پذیرفته است. اولین زمانی که در آن مقادیر ویژه سیستم عددی مختلط با قسمت موهومی منفی باشند به عنوان زمان کمانش سیستم شناخته می‌شود. در ادامه به بررسی پارامترهای مؤثر در زمان وقوع کمانش پرداخته شده و نتایج بدست آمده با نتایج کارهای گذشته مقایسه شده‌اند.

مشاهده می‌شود که جرم و سرعت برخوردکننده از پارامترهای مهم بر این پدیده هستند و با افزایش این پارامترها زمان کمانش کاهش می‌یابد. همچنین سرعت برخوردکننده تأثیری بر زمان تماس ندارد اما زمان تماس با افزایش جرم برخوردکننده، افزایش می‌یابد. زمانی که طول میله به اندازه‌ی کافی بلند باشد، با افزایش طول میله، زمان کمانش تغییری نخواهد کرد.

کلیدواژگان : کمانش دینامیکی، بار ضربه‌ای، تیر تیموشنکو

فهرست عناوین

عنوان	صفحه
فصل اول: پیشگفتار	**۱**
۱-۱ مقدمه	۲
۱-۲ تاریخچه	۵
فصل دوم: اصول پایداری	**۱۱**
۲-۱ پایداری تعادل	۱۲
۲-۲ کمانش دینامیکی و مودهای ناپایدار کمانش	۱۷
فصل سوم: استخراج معادلات	**۲۵**
۳-۱ تعریف مساله	۲۶
۳-۲ استخراج معادلات	۲۷
فصل چهارم: حل معادلات	**۳۷**
۴-۱ حل معادله موج	۳۸
۴-۲ روش درونیابی مشتق تعمیم‌یافته (GDQ)	۴۳
فصل پنجم: نتایج	**۵۲**
۵-۱ زمان تماس	۵۴
۵-۲ زمان کمانش	۵۷
۵-۳ مودهای ناپایدار و شکل مود کمانش	۶۲
نتیجه‌گیری	**۷۱**
پیشنهادات	**۷۱**
مراجع	**۷۲**

فهرست اشکال

شکل **صفحه**

شکل۲-۱ حالت‌های تعادل. ۱۲
شکل۲-۲ سطح پایداری. ۱۳
شکل۲-۳ مسیرهای تعادلی ستونی با شکل اولیه مستقیم. ۱۴
شکل۲-۴ مسیر تعادلی ستون اندکی خمیده. ۱۵
شکل۲-۵ کمانش ارتعاشی و کمانش لحظه‌ای. ۱۷
شکل۲-۶ انتشار موج در نوار آلومینیوم که در قسمت پایین تکیه‌گاه ثابت است. ۱۹
شکل۲-۷ ستون با تکیه‌گاه ساده. ۲۰
شکل۲-۸-الف شکل مود اول کمانش ستون با تکیه‌گاه ساده. ۲۱
شکل۲-۸-ب شکل مود دوم کمانش ستون با تکیه‌گاه ساده. ۲۱
شکل۲-۸-پ شکل مود سوم کمانش ستون با تکیه‌گاه ساده. ۲۲
شکل۲-۸-ت شکل مود چهارم کمانش ستون با تکیه‌گاه ساده. ۲۲
شکل۲-۹ کمانش دینامیکی وکمانش استاتیکی. ۲۴
شکل۳-۱ برخورد جسم در حال سقوط با انتهای ستون یک‌سرگیردار. ۲۶
شکل۳-۲-الف ستون در حالت بدون بارگذاری. ۲۸
شکل۳-۲-ب تغییرشکل عرضی ستون تنها در اثر برش. ۲۸
شکل۳-۲- پ تغییرشکل عرضی ستون تنها در اثر خمش. ۲۸
شکل۳-۲-ت تغییرشکل کلی ستون تحت هر دو اثر خمش و برش. ۲۹
شکل۳-۳-الف ستون تحت بارگذاری محوری خارجی. ۳۱
شکل۳-۳-ب نیروها و گشتاور وارد بر المان کوچکی از ستون. ۳۲
شکل۳-۳-پ تغییرمکان‌ها المان کوچکی از ستون. ۳۲
شکل۴-۱ تغییرات تنش در طول تیر پس از وقوع ضربه و انتشار موج تنش. ۳۸
شکل۴-۲ موقعیت گره‌ها در طول یک دامنه‌ی یک‌بعدی. ۴۳
شکل ۵-۱ تغییرات تنش در نقطه برخورد. ۵۵
شکل ۵-۲ زمان تماس جرم برخوردکننده و میله بر حسب تغییرات جرم برخوردکننده. ۵۶
شکل۵-۳ زمان تماس جسم و میله بر حسب سرعت برخوردکننده. ۵۶
شکل۵-۴ زمان کمانش بر حسب تغییرات جرم برخوردکننده. ۵۷
شکل۵-۵ زمان کمانش بر حسب تغییرات سرعت برخوردکننده. ۵۸
شکل ۵-۶ مقایسه منحنی حالت $M/m=0.25$ با منحنی سهمی تقریب زده شده. ۵۹
شکل ۵-۷ مقایسه منحنی حالت $M/m=0.1$ با منحنی سهمی تقریب زده شده. ۵۹
شکل۵-۸ زمان کمانش مواد مختلف برحسب سرعت جرم برخوردکننده. ۶۰
شکل۵-۹ زمان کمانش برحسب تغییرات شعاع میله برای دو حالت مختلف از جرم برخوردکننده. ۶۱

شکل۵-۱۰ زمان کمانش برحسب تغییرات شعاع میله برای دو حالت مختلف از سرعت برخوردکننده. ۶۱
شکل۵-۱۱ زمان کمانش برحسب تغییرات طول میله. ۶۲
شکل۵-۱۲، نسبت بار دینامیکی ناشی از برخورد به بار کمانش استاتیکی مود اول در مواد مختلف. ۶۳
شکل۵-۱۳ نسبت بار دینامیکی ناشی از برخورد به بار کمانش استاتیکی مود اول در مواد مختلف. ۶۴
شکل۵-۱۴ شکل مود اول کمانش. ۶۶
شکل۵-۱۵ شکل مود دوم کمانش. ۶۶
شکل۵-۱۶ شکل مود سوم کمانش. ۶۷
شکل۵-۱۷ شکل مود اول کمانش. ۶۸
شکل۵-۱۸ شکل مود دوم کمانش. ۶۸
شکل۵-۱۹ شکل مود سوم کمانش. ۶۹
شکل۵-۲۰ شکل مود چهارم کمانش. ۶۹
شکل۵-۲۱ شکل مود پنجم کمانش. ۷۰

فصل اول:

پیشگفتار

۱-۱ مقدمه

کمانش یکی از پیچیده‌ترین پدیده‌ها در مکانیک جامدات است. این پدیده سازه‌هایی را تهدید می‌کند که بسیار نازک هستند و تحت تنش فشاری و یا تحت تنش‌های فشاری واقعند. سازه‌هایی مانند ستون‌ها، ورق‌ها و پوسته‌ها سازه‌های رایجی هستند که کاربردهای بسیار متنوعی در صنایع مکانیک، عمران، هوافضا، کشتی‌سازی و غیره دارند که مهمترین مود خرابی آنها، برای حالتی که تحت نیروی فشاری باشند، پدیده کمانش است.

ستون سازه‌ای است که بار محوری فشاری را تحمل می‌کند و پایداری ستون به معنی توانایی آن در تحمل باری مفروض بدون ایجاد تغییرشکل‌های خمشی بزرگ است. ستون‌های باریک در معرض نوعی رفتار که به کمانش موسوم است، قرار می‌گیرند. تا زمانی که بار روی این عضو نسباً کم است، افزایش بار فقط به کوتاه شدن در راستای محور میله منجر می‌شود ولی وقتی به یک بار بحرانی معین برسد، ناگهان عضو دچار تغییر شکل خمشی بزرگی می‌شود که همان حالت کمانش است. بنابراین باری که در آن کمانش اتفاق می‌افتد معیاری برای طراحی بر مبنای پایداری است و به بار بحرانی ستون معروف است.

ساختارهای باریک و بلند تحمل کننده‌ی بار محوری در همه جای طبیعت از استخوان بدن جانداران گرفته تا قسمتهای مختلف هواپیما، زیردریایی و بازوی ربات‌ها و غیره یافت می‌شوند. از این رو بررسی پایداری این اعضا از اهمیت بالایی برخوردار است.

مفهوم پایداری، مسأله‌ای مهم در مکانیک جامدات است که امنیت سازه را در برابر ریزش و فروریختن آن بیان می‌کند. فروریختن سازه در اثر کمانش از گذشته مورد توجه قرار داشته است (هرچند کمانش سازه در اثر بارهای نوسانی و ضربه‌ای نسبت به کمانش استاتیکی کمتر مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است). شاید مهمترین مثال، ریزش پل تاکوما[1] در سال ۱۹۴۰ باشد که ناپایداری دینامیکی علت این حادثه بیان شد. موارد زیادی از این قبیل می‌توان ذکر کرد که عدم توجه به پایداری دینامیکی و لحاظ نشدن آن در طراحی موجب وقوع حوادثی مشابه پل تاکوما شده است [۱].

با توجه به نوع بارگذاری روی عضو، کمانش به دو دسته‌ی کمانش استاتیکی و کمانش دینامیکی تقسیم می‌شود. کمانش استاتیکی در اثر بارهای استاتیکی و کمانش دینامیکی در

1.Tacoma bridge

اثر بارهای دینامیکی (نوسانی و ضربه‌ای) رخ می‌دهد. پایداری استاتیکی امنیت سازه را در اثر بارهای استاتیکی و پایداری دینامیکی امنیت آن را در اثر بارهای دینامیکی بررسی می‌کند.

در کمانش استاتیکی فقط یک پارامتر باید مشخص شود که بار بحرانی P_{cr} نام دارد اما در کمانش دینامیکی دو پارامتر باید محاسبه شوند که عبارتند از بار بحرانی و زمان بحرانی t_{cr}. اگر زمان وقوع برخورد $t=0$ در نظر گرفته شود، زمانی که تغییرشکل جانبی میله (کمانش) رخ می‌دهد به عنوان زمان بحرانی تعریف می‌شود و در این لحظه قسمتی از طول میله که موج را حس کرده است طول بحرانی L_{cr} نامیده می‌شود که با توجه به سرعت موج طولی C، عبارت است از:

$$L_{cr} = C.t_{cr}$$

مسأله‌ی کمانش را می‌توان به دو صورت مسأله خطی و مسأله غیرخطی در نظر گرفت. نوع خطی بیشتر در اواخر قرن نوزدهم بررسی شده است. در قرن بیستم تئوری غیرخطی بسیار گسترش یافت و مسأله‌ی پایداری دینامیکی در نیمه دوم قرن بیستم اهمیت ویژه‌ای یافت (که در بخش بعدی مفصل‌تر ذکر خواهد شد). به طور کلی رفتار غیرخطی به دو علت عمده ظاهر می‌شود.

۱- بروز تغییرشکلهای بزرگ.
۲- درنظر گرفتن روابط ساختاری[1] به صورت غیرخطی.

از آنجا که ماهیت کمانش عبارتست از: افزایش نامتناسب تغییرمکان‌ها به علت افزایش کوچک بار، در نتیجه تحلیل کمانش بیشتر در قالب مکانیک غیرخطی می‌گنجد تا مکانیک خطی. اساساً تحلیل کمانش، یکی از زیربخش‌های مکانیک غیرخطی به شمار می‌رود. نامتناسب بودن نسبی معادلات دیفرانسیل غیرخطی، طی سال‌ها، منجر به توسعه سودمند روش‌های تحلیل خطی بر اساس تقریبات نامعین شده است.

از دیگر پارامترهای مهم در تحلیل کمانش دینامیکی میله باریک، مودهای کمانشی هستند که با توجه به جواب‌های متعدد معادلات حاکم در لحظه کمانش تعریف می‌شوند. در حالت ایده‌آل مود کمانشی یک مود، است اما در مسأله کمانش دینامیکی، با در نظر گرفتن اثر انتشار موج، با مسأله‌ی مشکل‌تری مواجه هستیم و مود کمانشی در مسأله‌ی کمانش دینامیکی به صورت ترکیبی از چند مود ناپایدار است.

1. Constitutive laws

از فرضیات استفاده شده در کمانش دینامیکی (ستون الاستیک) می‌توان به موارد زیر اشاره کرد.

۱-فرضیه‌ی انتشار موج یک‌بعدی[1] در میله برقرار است.

۲-طول میله به اندازه‌ی کافی بلند است.

۳-در طی بارگذاری (اعمال ضربه) میله در حالت الاستیک باقی می‌ماند.

۴-کمانش در مرحله اول انتشار موج رخ می‌دهد.

۵-ماده‌ی ستون از قانون هوک پیروی می‌کند.

بررسی مسأله‌ی کمانش دینامیکی ستون باریک به سه روش انجام‌پذیر است که تقریباً تمامی فعالیت‌های صورت گرفته در این سه قالب می‌گنجند.

۱-حل تحلیلی

۲-حل عددی

۳-روش‌های آزمایشگاهی

با توجه به نوع معادلات حاکم، (معادله تیر اویلر و یا استفاده از مدل‌های بالاتر تیر) حل تحلیلی کامل برای مسأله وجود نداشته و با ترکیب روش‌های عددی می‌توان به جوابهای نیمه تحلیلی مناسبی رسید. حل‌های عددی صورت گرفته عمدتاً بر اساس روش المان محدود[2] و تفاضل محدود[3] هستند. روش‌های آزمایشگاهی که لازمه‌ی آن صرف هزینه‌های زیاد و تجهیزات پیشرفته است همواره ملاکی برای صحت جواب‌های نیمه تحلیلی و عددی بوده‌اند.

1. Longitudinal wave propagation
2. Finite element method
3. Finite difference method

۱-۲ تاریخچه

قدیمی‌ترین تحقیقات و مطالعات در زمینه پایداری، کارهای معروف اویلر[1] است که به بررسی کمانش یک میله نازک تحت بارگذاری محوری (و فشاری) پرداخته است. بارگذاری در این حالت به صورت آرام و در انتهای آزاد یک میله‌ی یک‌سر گیردار است. اویلر روابطی را برای محاسبه‌ی بار بحرانی ستون در حالت‌های مختلف تکیه‌گاهی ارائه داد [۲].

در ادامه یانگ[2] نشان داد که عواملی نظیر تغییرشکل اولیه،گشتاور خمشی اولیه و غیره (همان شرایط اولیه و شرایط مرزی) نقش مهمی در کمانش ستون تحت بارگذاری محوری دارند. او روابطی برای کمانش ستون در اثر این عوامل ارائه داد [۳]. کیرشهف[3] مسأله را به صورت غیرخطی و با در نظر گرفتن تغییرشکل‌های بزرگ در نظر گرفت و منحنی‌های الاستیکا[4] را استخراج کرد[۴].

در ستون‌هایی که سختی برشی کمی دارند، تأثیر برش از اهمیت بالایی برخوردار است، انجسر[5] به بررسی این حالت پرداخت[۵]. استفاده از ماتریس نرمی[6] برای محاسبه بار بحرانی توسط فون‌مایز[7] صورت گرفت [۶] و همان مسأله را جیمز[8] با استفاده از ماتریس سختی[9] انجام انجام داد[۷].

بررسی کمانش دینامیکی تیر تاریخچه‌ای نسبتاً طولانی دارد و ابتدا توسط کانینگ[10] و تاب[11] در سال ۱۹۳۴ صورت گرفت. نتایج آنها حاکی از این بود که جابه جایی عرضی حاصل از بارگذاری محوری که به صورت ضربه‌ای اعمال می‌شود، تابعی از ضربه وارده است[۸]. میر[12] در سال ۱۹۴۵ نشان داد ستونی که تحت بارگذاری ناگهانی قرار می‌گیرد، تنش فشاری بیشتری را نسبت به حالت استاتیکی تحمل می‌کند و تنش بحرانی حالت ناگهانی از تنش بحرانی در حالت استاتیکی بیشتر است[۹].

---

1. Euler
2. Young
3. Kirchhoff
4. Elastica
5. Engesser
6. Flexibility matrix
7. Von Mises
8. James
9. Stiffness matrix
10. Koning
11. Taub
12. Meier

از جمله تألیفات ارزشمند در زمینه پایداری دینامیکی که به عنوان مرجع در بسیاری از مقالات معرفی می‌شوند، می‌توان به تألیفات بازانت[1] و بولوتین[2] اشاره کرد[۱۱و۱۰] .

هاف[3] ستونی با تکیه‌گاه ساده در نظر گرفت و فرض کرد تغییرشکل اولیه (خیز) ستون به صورت نیمه‌سینوسی[4] باشد و از اثر اینرسی محوری صرفنظر کرد. با توجه به این فرضیات به یک معادله غیر خطی رسید و جواب‌هایی به صورت سری توانی برای آنها ارائه کرد[۱۲]. پس از او محققانی از جمله داویدسون[5] کارهایی مشابه فرضیات و روندی که هاف معرفی کرده بود، انجام دادند[۱۳].

در سال ۱۹۶۰ سوین[6] با استفاده از مدل تفاضل محدود که شامل تغییرشکل و اینرسی محوری بود، مسأله‌ی کمانش دینامیکی ستون را تحلیل کرد و با بررسی پارامترهای مختلف به این نتیجه رسید که در مسایل کمانش دینامیکی می‌توان از اثر اینرسی محوری صرفنظر کرد[۱۴]. هاچینسون[7] و بودیانسکی[8] به این نتیجه رسیدند که کمانش در مودهای بالا در انتهای برخورد و در صورتی که سرعت برخوردکننده بالا باشد، اتفاق می‌افتد[۱۵].

هایاشی[9] و سانو[10] گزارشات خود را در دو حالت سرعت برخورد بالا و سرعت برخورد کم ارائه کردند. آنها اثر اینرسی محوری را در محاسبات خود اعمال کردند و به معادله انتگرالی غیرخطی برای کمانش میله باریک رسیدند [۱۷و۱۶]. با حل عددی این معادلات به نتایج جدیدی رسیدند که بطور خلاصه عبارتند از:

الف. در سرعت‌های برخورد بالا، کمانش دینامیکی در نزدیکی نقطه برخورد رخ می‌دهد.

ب. با افزایش سرعت برخورد، طول موج‌های کمانشی کوتاهتر می‌شوند.

ج. در سرعت‌های برخورد بالا می‌توان از اثر اینرسی محوری صرفنظر کرد.

---

1. Bazant
2.Bolotin
3.Hoff
4. Half sine wave
5. Davidson
6. Sevin
7. Hutchinson
8. Budiansky
9. Hayashi
10. Sano

در سال ۱۹۸۱ لی[۱] روش شبه انشعابی[۲] را برای تحلیل کمانش دینامیکی ارائه کرد [۱۸] و پس از او هوانگ[۳] و هونگ[۴] پایداری دینامیکی ستون با تکیه‌گاه ساده تحت بارگذاری متناوب و و محوری را به کمک روش میانگین[۵] و بر اساس معیار راث[۶] تحلیل کردند[۱۹].

ولر[۷] و همکارانش با استفاده از روش‌های آزمایشگاهی، ستونی که تحت ضربه‌ی محوری قرار داشت را مورد مطالعه قرار دادند. نمونه‌های مورد آزمایش دارای تکیه‌گاه ثابت و از جنس فلزات مختلف و مواد مرکب بودند. آنها از مدل تیر رایلی استفاده کردند و به بررسی تأثیر شکل هندسی، خرابی و نقایص ستون بر کمانش ستون پرداختند. نتایج آنها نشان می‌داد که شکل اولیه، خرابی و نسبت لاغری ستون از اهمیت بالایی در بار و زمان کمانش دارند حال آنکه جنس میله در مرحله بعد اهمیت قرار دارد[۲۰].

لیندبرگ[۸] از جمله افرادی است که هم در زمینه تئوری و هم در زمینه آزمایشگاهی مسأله را بررسی کرده است. لیندبرگ نشان داد در حالتی که سرعت برخورد بالا بوده و طول میله به اندازه کافی بلند باشد، در مرحله‌ی اول انتشار موج ناشی از وقوع ضربه، کمانش در نزدیکی انتهای برخورد رخ می‌دهد. بر طبق نتایج آزمایشگاهی او، لازم است در تحلیل کمانش لحظه-ای اثر انتشار موج و پیچیدگی‌های ناشی از انتشار موج لحاظ شوند[۲۱].

مروری بر کارهای گذشته (تحقیقات مهم انجام شده در زمینه پایداری دینامیکی تا سال ۱۹۸۳) در سال ۱۹۸۷ توسط سیمیتسس[۹] انجام گرفته است[۲۲] .

در سال ۱۹۹۴ تانگ[۱۰] و ژو[۱۱] با بررسی ستون دو سر گیردار، روابطی بین زمان بحرانی کمانش و ضربه محوری اعمال شده استخراج کردند و به نتایجی سازگار با نتایج آزمایشگاهی رسیدند. روابطی که آنها ارائه کردند برای مود اول کمانش برقرار بود. نتایج آزمایشگاهی آنها نشان می‌داد که تأثیر انتشار موج در کمانش دینامیکی از اهمیت بالایی برخوردار است و باید در محاسبات لحاظ شود[۲۳] .

---

1. Lee
2. Quasi-bifurcation method
3. Huang
4. Hung
5. Averaging method
6. Routh-Hurwitz
7. Weller
8. Lindberg
9. Simitses
10. Tang
11. Zhu

نتایج آزمایشگاهی مشابهی که توسط هایاشی و سانو، لیندبرگ و تانگ و ژو انجام شده بود حاکی از این بود که در فرایند کمانش دینامیکی (کمانش لحظه‌ای) اثر انتشار موج حائز اهمیت ویژه‌ای است و باید آن را لحاظ کرد. در ادامه افرادی نظیر گاراگیوزاوا[1] و جونز[2] و لپیک[3] به بررسی تأثیر انتشار موج تنش در کمانش دینامیکی ستون الاستیک-پلاستیک پرداختند [۲۶-۲۴ و ۲۹-۲۸] .

کاراگیوزاوا و جونز مفهوم جامعی از کمانش دینامیکی خصوصاً در حالت پلاستیک ارائه دادند و به بررسی فاکتورهای مؤثر در کمانش دینامیکی از جمله انرژی برخورد، نسبت جرم برخوردکننده به جرم ستون، مشخصات هندسی و فیزیکی ستون و تأثیر انتشار موج پرداختند[۲۶-۲۴].

پلگرینو[4] و همکارانش با استفاده از روش اجزاء محدود پایداری ستون را بررسی کرده و با رسم نمودارهای مربوطه نواحی پایداری ستون را مشخص کردند. آنها به این نتیجه رسیدند که این نواحی به صورت تابعی از بارگذاری و فرکانس ارتعاشی سیستم است[۲۷].

آزمایش‌های لپیک شامل چهار حالت بارگذاری بود [۲۹-۲۸].

-اندازه بارگذاری ثابت و مدت اعمال بارگذاری محدود باشد.

-اندازه بارگذاری ثابت و مدت اعمال بارگذاری نامحدود باشد.

-اندازه بارگذاری متغیر و با گذشت زمان، بارگذاری به صورت نمایی کاهش یابد.

-انتهای بارگذاری با سرعت محوری ثابت حرکت کند.

حالات دوم و سوم بسیار شبیه بارگذاری ضربه‌ای و انتشار موج تنش در طول فرایند بودند.

از جمله حل‌های عددی که اخیراً صورت گرفته می‌توان به کارهای کنی[5] و فرید طاهری اشاره اشاره کرد که مقالات متعددی در این زمینه به انتشار رسانیده‌اند [۳۲-۳۰] . عمده فعالیت‌های آنها با استفاده از روش المان محدود و به کمک نرم افزارهای مختلف از جمله Ansys , Adina

1. Karagiozova
2. Jones
3. Lepic
4. Pellegrino
5. Kenny

Nisa , بوده و جواب‌های حاصله از نرم‌افزارهای ذکر شده را با نتایج آزمایشگاهی خود مقایسه کرده‌اند.

در سال ۲۰۰۱ وانگ[۱] و تیان[۲] کمانش دینامیکی ستون را بر پایه‌ی قوانین بقا و تبدیلات انرژی تحلیل کرده و با استخراج معادله کمکی مربوط به جبهه موج دو مجهول مسائل کمانش دینامیکی که عبارتند از بار و زمان بحرانی کمانش را استخراج کردند. آنها با ادامه همین روند جواب‌هایی را برای شرایط مختلف تکیه‌گاهی به دست آوردند. نتایج آنها حاکی از آن بود که کوتاهترین زمان کمانش مربوط به مود اول است و شروع کمانش از مود اول خواهد بود [۳۳] .

از جدیدترین نتایج آزمایشگاهی می‌توان به نتایج سینجر[۳] در سال ۲۰۰۲ [۳۴] و گلدن[۴] در سال ۲۰۰۵ اشاره نمود [۳۵]. گلدن با استفاده از روش‌های آزمایشگاهی کمانش دینامیکی میله‌های ترد در اثر برخورد با جسم در حال سقوط را مورد مطالعه قرار داد. او اظهار داشت که مواد ترد با رشد تغییرشکل ناشی از کمانش دچار شکست خواهند شد. گلدن با تغییر پارامترهای مختلف از جمله سرعت برخورد، جنس، طول، ضخامت میله‌ها و غیره و مقایسه نتایج، به رابطه‌ای تجربی برای طول موج شکست رسید.

پایداری دینامیکی ستون در هر دو حالت مدل تیر اویلر-برنولی و مدل تیر تیموشنکو با استفاده از روش اجزاء محدود توسط ویکوفسکی[۵] و گلوبیوسکی[۶] در سال ۲۰۰۷ انجام شده است [۳۶].

آنتونی[۷] و واث[۸] در سال ۲۰۰۸ با حل همزمان معادله موج و معادله تیر اویلر-برنولی اثر انتشار انتشار موج را در محاسبات خود لحاظ کردند. نتایج آنها مبین این بود که پارامتر جرم برخورد کننده تأثیر زیادی بر روی زمان تماس جسم برخوردکننده با ستون و در نتیجه زمان کمانش دارد حال آنکه سرعت برخورد تأثیر چندانی بر روی این کمیت‌ها ندارد. آنها جواب‌های خود را با نتایج آزمایشگاهی گلدن مقایسه کردند [۳۷].

در این رساله با استفاده از اصل همیلتون و با فرض مدل تیر تیموشنکو معادلات حاکم بر مسأله برخورد جسم در حال سقوط با ستون الاستیک استخراج شده و با حل معادلات حاکم

1. Wang
2. Tian
3. Singer
4. Gladden
5. Wieckowski
6. Golubiewaki
7. Anthony
8. Wass

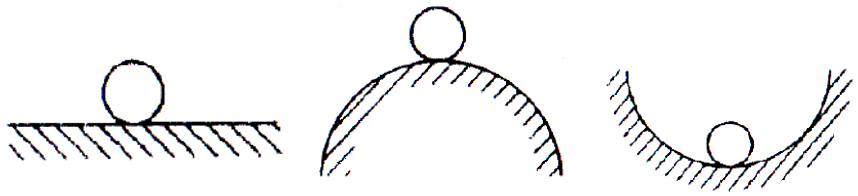
که شامل معادله موج یک‌بعدی و معادلات تیر تیموشنکو در لحظه کمانش هستند اثر انتشار موج در محاسبات لحاظ شده است. حل معادله‌ی موج به صورت تحلیلی و معادلات تیر به صورت عددی و با استفاده از روش درون‌یابی مشتق تعمیم‌یافته انجام پذیرفته است و به بررسی تأثیر پارامترهای مختلف بر زمان و بار بحرانی کمانش پرداخته شده است.

فصل دوم:

اصول پایداری

۲-۱ تعادل پایدار

مفهوم پایداری غالباً با درنظر گرفتن تعادل یک گلوله صلب در موقعیت‌های مختلف بیان می-شود، شکل (۲-۱) [۳۹ و ۳۸]. گرچه گلوله در هریک از موقیت‌های نشان داده شده در حال تعادل است، ولی یک بررسی دقیق، وجود اختلافات مهم بین سه حالت را آشکار می‌سازد.

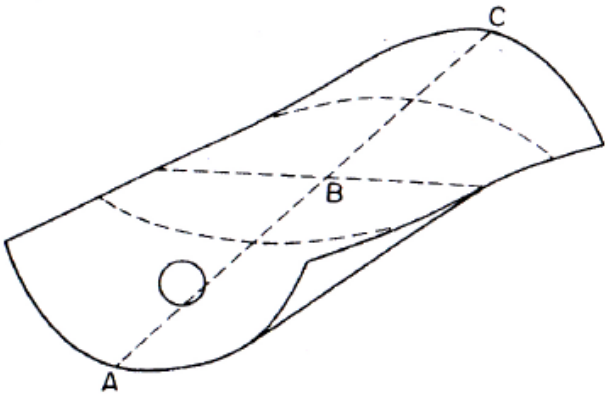


الف ب پ

شکل۲-۱ حالت‌های تعادل: الف- پایدار، ب- ناپایدار، پ- خنثی [۳۸] .

اگر گلوله در حالت الف کمی از محل تعادل اولیه خود جابجا شود، پس از حذف نیروی جابه-جا کننده، گلوله به محل اولیه خود باز خواهد گشت. تعادل جسم که بدین ترتیب صورت می-گیرد تعادل پایدار نامیده می‌شود. در حالت ب وقتی گلوله کمی از موقعیت سکون خود جابه-جا می‌شود، به حالت اولیه خود باز نمی‌گردد و از محل تعادل اولیه خود دور می‌شود. تعادل گلوله در حالت ب بسیار ناپایدار است و تعادل ناپایدار نامیده می‌شود. حالت پ نوع دیگری از تعادل را نشان می‌دهد. در اینجا گلوله بعد از جابه جایی مختصر نه به جای اولیه خود باز می-گردد و نه به دورشدن ادامه می‌دهد و در نقطه‌ای که بار جابه‌جا کننده منتقل کرده است باقی می‌ماند. این نوع تعادل را تعادل خنثی می‌گویند.

در شکل (۲-۲) گلوله در هر نقطه از امتداد خط ABC در حالت تعادل است. گلوله در ناحیه بین نقاط A و B تعادل پایدار و در ناحیه بین B و C تعادل ناپایدار دارد. در نقطه B نقطه انتقالی بین دو ناحیه، گلوله در حالت تعادل خنثی قرار دارد. رفتار ستون شباهت زیادی به رفتار گلوله در شکل (۲-۲) دارد. شکل مستقیم ستون در بارهای کم پایدار است ولی در بارهای زیاد ناپایدار می‌شود. اگر فرض کنیم که در ستون ضمن انتقال از حالت تعادل پایدار به حالت تعادل ناپایدار یک حالت تعادل خنثی وجود داشته باشد، مشابه آنچه در شکل (۲-۲) نشان داده شده است باری که تحت اثر آن شکل مستقیم ستون از حالت پایداری خارج می‌شود و در آن تعادل خنثی پدید می‌آید را بار بحرانی می‌نامند.



شکل۲-۲ سطح پایداری [۳۸] .

برای تعیین بار بحرانی ستون باید باری را پیدا کنیم که عضو تحت اثر آن می‌تواند در هر دو شکل مستقیم و کمی خم شده در حالت تعادل باشد. روشی که این معیار را برای ارزیابی بارهای بحرانی به کار می‌برد روش تعادل خنثی نامیده می‌شود[۳۸].

در مطالعات مربوط به کمانش سازه، نمودارهای بار-تغییرمکان نظیر شکل‌های (۲-۳) و (۲-۴) مسیرهای تعادلی[1] نامیده می‌شوند. هر نقطه روی مسیر نشان دهنده‌ی هیئت تعادلی سازه است. مسیر تعادلی از مفاهیم محوری مبحث رفتار کمانش سازه است. در این نمودارها تغییرات بار اعمالی P برحسب تغییرمکان محوری ستون (Δ) نشان داده شده است.

برای ستونی ایده‌آل با شرایط تکیه‌گاهی ساده بار بحرانی کمانش به صورت زیر خواهد بود[۲].

$$P_n = n^2 \frac{\pi^2 EI}{L^2} \qquad (۲-۱)$$

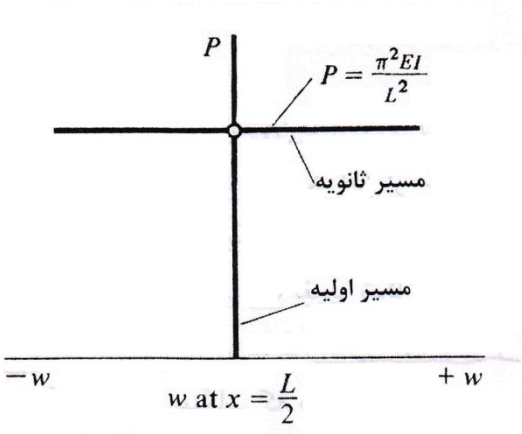
کوچکترین مقدار ویژه به ازای n=1 حاصل می‌شود. بنابراین:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \qquad (۲-۲)$$

1. Equilibrium paths

مسیرهای تعادل ستون‌های دارای شرایط مرزی ساده از ترسیم نمودار بار P بر حسب تغییرشکل نقطه میانی ستون (یعنی w در نقطه x=L/2) به دست می‌آیند. این نمودار به ازای n=1 در شکل (۲-۳) نشان داده شده است. نقاط روی مسیر تعادل اولیه (مسیر عمودی) بیانگر حالتی است که ستون تحت فشار است ولی شکل آن مستقیم باقی مانده است و آن نقاطی که روی مسیر ثانویه (مسیر افقی) هستند نشانگر هیئت تعادل خمیده (حالت کمانش) هستند. شایان ذکر است که روی مسیر اولیه‌ی تغییر مکان $u = \frac{Px}{AE}$ است. در شکل (۲-۳) مسیر تعادلی اصلی (اولیه) به وسیله مسیر ثانویه قطع شده است. گاهی مسیر ثانویه در نقطه تقاطع بر مسیر اولیه عمود می‌شود.

تقارن نمودار به سادگی مبین این است که ستون می‌تواند در هر جهت تغییرشکل داشته باشد. دلیل اینکه مسیر تعادلی ثانویه افقی است این است که بار اعمالی P تابعی از w (تغییرشکل نقطه میانی ستون) نیست. مسیرهای ثانویه از هر دو طرف چپ و راست تا بی-نهایت کشیده می‌شوند اما زمانی که دامنه‌ی تغییرشکل خیلی بزرگ شود نتایج اهمیت خود را از دست می‌دهند.



شکل۲-۳ مسیرهای تعادلی ستونی با شکل اولیه مستقیم [۴۰].

در این مثال نقاطی که مسیرهای تعادل همدیگر را قطع کنند نقاط انشعاب[1] نامیده می‌شوند. این نقاط با دایره‌ی توخالی نشان داده شده‌اند. معادلات تعادل در این نقاط دارای جواب‌های چندگانه هستند که هر جواب متناسب با یک شاخه‌ی خاص است. نقاط انشعاب از دیگر مفاهیم محوری تحلیل کمانش محسوب می‌شوند.

1. Bifurcation point