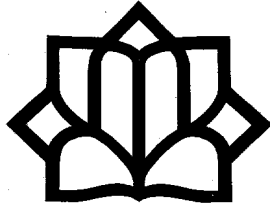


الحمد لله
البرحمين
البرحمين



دانشگاه کاشان
دانشکده فیزیک
گروه لیزر و فوتونیک

پایان نامه جهت اخذ مدرک دکترای فیزیک اتمی مولکولی

گرایش پلاسما

عنوان:

**پلاسماهای کروی فشرده و کشیده شده (پلاسماهای ابلیتی و پرولیتی)
و پراکندگی امواج الکترومغناطیسی از این سیستم ها در حالت کلی**

استاد راهنما :

دکتر بهرام جزی

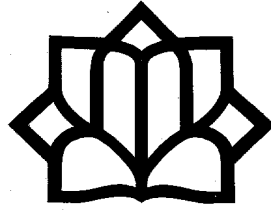
استاد مشاور :

دکتر عباس عبدلی آرانی

توسط :

یدالله احمدی زاده

دی ماه 1392



دانشگاه کاشان
دانشکده فیزیک
گروه لیزر و فوتونیک

پایان نامه جهت اخذ مدرک دکترای فیزیک اتمی مولکولی

گرایش پلاسما

عنوان:

**پلاسماهای کروی فشرده و کشیده شده (پلاسماهای ابلیتی و پرولیتی) و
پراکندگی امواج الکترومغناطیسی از این سیستم ها در حالت کلی**

استاد راهنما:

دکتر بهرام جزی

استاد مشاور:

دکتر عباس عبدلی آرانی

توسط:

یدالله احمدی زاده

دی ماه 1392

تقدیم به:

خانواده عزیزم

و

تمامی پویندگان طریقت علم

ومعرفت

تشکر و قدردانی

حمد و سپاس خداوند بزرگ را که توفیق کسب علم و معرفت را به ما عطا فرمود. در اینجا بر خود لازم می‌دانم از تمامی اساتید بزرگوار که در طول سالیان گذشته مرا در تحصیل علم و معرفت و فضائل اخلاقی یاری نموده‌اند تقدیر و تشکر نمایم.

از استاد گرامی و بزرگوار جناب آقای **دکتر بهرام جزی** که راهنمایی اینجانب را در انجام تحقیق، پژوهش و نگارش این پایان نامه تقبل نموده‌اند نهایت تشکر و سپاسگزاری را دارم. توفیق ایشان را در تمامی مراحل زندگی از خداوند منان خواستارم.

از جناب آقای **دکتر عباس عبدلی آرانی** بعنوان مشاور که با راهنمایی‌های خود مرا مورد لطف قرار داده‌اند کمال تشکر را دارم.

همچنین از تشریک مساعی آقایان **دکتر حمیدرضا زنگنه** و **دکتر محمد ترکیها** بعنوان اساتید داور داخل دانشگاه و **پروفسور بابک شکری** بعنوان داور مدعو خارج از دانشگاه که این پایان نامه را مورد مطالعه قرار داده و در جلسه دفاعیه شرکت نموده‌اند تشکر و قدردانی می‌نمایم.

در پایان از جناب آقای **دکتر احمد اکبری** که بعنوان نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه قبول زحمت نموده‌اند سپاسگزاری می‌نمایم.

چکیده:

در این پایان نامه ضمن بررسی آنالیز ریاضی حاکم بر کره‌وارهای کشیده و پخت، پراکندگی امواج الکترومغناطیسی با طول موج بلند از این نوع اجسام مطالعه شده است. با محاسبه پتانسیل الکتریکی در داخل و خارج پلاسمای سرد کره‌وار کشیده و پخت، فرکانس رزونانس این اجسام در دو حالت متفاوت قطبش میدان الکتریکی فرودی بدست آمده است. عوامل تاثیر گذار در این پدیده مورد بررسی و شناسایی قرار گرفته‌اند. با قراردادن پوشش دی‌الکتریک در اطراف پلاسمای کره‌وار، رفتار فرکانس رزونانس به ازای هندسه شکل و ضریب دی‌الکتریک عایق بررسی شده است. با اعمال میدان مغناطیسی خارجی بر پلاسمای کره‌وار سرد و غیر برخوردار، تانسور گذردهی الکتریکی و پتانسیل الکتریکی داخل و خارج پلاسمای با جزئیات کامل محاسبه شده و نقش میدان مغناطیسی خارجی بر فرکانس رزونانس مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته است. با محاسبه میدان الکتریکی داخل پلاسمای کره‌وار، دامنه پراکندگی امواج در نواحی دور از پلاسمای و سطح مقطع راداری و سطح مقطع پراکندگی را برای این شکل از پلاسمای بدست آورده و عوامل گوناگونی که می‌تواند بر این کمیت‌ها اثر گذار باشند را مورد لحاظ قرار داده‌ایم. با اضافه کردن ویژگی حرکتی برای کره‌وار، نقش سرعت چرخشی پلاسمای را بر فرکانس رزونانس و سطح مقطع پراکندگی نشان داده شده است. این محاسبات می‌تواند به طرح‌هایی در زمینه کاهش سطح مقطع پراکندگی اجسام پرنده نظامی به وسیله پوشش پلاسمای، کمک نموده و راهگشای پژوهشگران در حوزه علوم و مهندسی باشد. همچنین با حل معادله موج اسکالر در مختصات کره‌وار و محاسبه توابع موج فضایی و زاویه‌ای در این دستگاه مختصات، اثر تغییرات دمای الکترونهای پلاسمای بر فرکانس رزونانس این شکل از پلاسمای مورد تحلیل قرار گرفته است. مطالعات صورت گرفته در این رساله منجر به مدلسازی پراکندگی امواج الکترومغناطیسی با طول موج بلند از پلاسماهای کره‌وار در حالت کلی خواهد شد.

کلمات کلیدی: پلاسمای کره‌وار - فرکانس رزونانس - تانسور گذردهی الکتریکی - پراکندگی

امواج الکترومغناطیسی - سطح مقطع پراکندگی

فهرست مطالب

عنوان

صفحه

فصل اول : دیدگاه ریاضی حاکم بر کره وار کشیده و کره وار پخت

- 1-1-مقدمه.....2
- 1-2-دستگاه مختصات کشیده.....3
- 1-2-1-ضرایب مقیاس.....6
- 1-3-جوابهای کلی معادله لاپلاس در دستگاه مختصات کره وار.....8
- 1-4-دستگاه مختصات کره وار پخت.....10
- 1-5-حل معادله لاپلاس در مختصات کره وار پخت.....12
- 1-6-توابع موج کره وار-حل معادله عددی موج در دستگاه مختصات کره وار.....14
- 1-6-1-جداسازی متغیرهای معادله موج عددی در دستگاه مختصات کره وار.....15
- 1-6-2-محاسبه مقادیر ویژه λ_{mn} و ضرایب بسط توابع شعاعی و زاویه‌ای معادله موج (a_r^{mn})18

فصل دوم : مدل پراکندگی امواج الکترومغناطیسی از اجسام محدود

- 1-2-پراکندگی و اهمیت آن.....24
- 2-2-پراکندگی امواج الکترومغناطیسی از محیط‌های پلاسمای محدود.....26
- 2-3-پراکندگی امواج الکترومغناطیسی با طول موج بلند از ستون پلاسمای سرد.....28

- 2-4- محاسبه فرکانس رزونانس کره همگن پلاسمای سرد در بر همکنش با امواج الکترو مغناطیسی با طول موج بلند.....34
- 2-5- پراکندگی امواج الکترومغناطیس با طول موج بلند از ستون پلاسمای گرم.....36

فصل سوم : محاسبه فرکانس رزونانس کره وار سرد و غیر مغناطیده

- 3-1- پراکندگی امواج الکترومغناطیس با طول موج بلند از کره وار کشیده.....46
- 3-2- پراکندگی امواج الکترومغناطیس با طول موج بلند از کره وار پخت.....53
- 3-3- بررسی اثر دی الکتریک بر فرکانس رزونانس کره وار کشیده پلاسمایی.....57
- 3-4- پراکندگی امواج الکترومغناطیس از کره وار پخت پوشیده شده توسط دی - الکتریک.....62

فصل چهارم : بررسی و تحلیل پراکندگی امواج الکترومغناطیس از کره وار سرد و مغناطیده پلاسمایی و محاسبه سطح مقطع پراکندگی از آن

- 4-1- محاسبه تانسور ثابت گذردهی الکتریکی در یک کره وار سرد، غیربرخوردی و مغناطیده پلاسمایی.....67
- 4-2- محاسبه پتانسیل الکتریکی در داخل و خارج کره وار کشیده و محاسبه میدان الکتریکی در داخل آن.....71
- 4-3- رزونانس کره وار سرد پلاسمایی مغناطیده.....75
- 4-4- سطح مقطع پراکندگی کره وار کشیده مغناطیده پلاسمایی.....76

- 4-5- محاسبه تانسور گذردهی الکتریکی در یک کره‌وار کشیده سرد، غیربرخوردی ،
مغناطیده و دوّار پلاسمایی.....85
- 4-6- محاسبه فرکانس رزونانس کره‌وار کشیده مغناطیده دوّار.....91
- 4-7- محاسبه سطح مقطع پراکندگی و سطح مقطع راداری کره‌وار کشیده پلاسمایی سرد
و مغناطیده دوّار.....92

فصل پنجم : مطالعه و تحلیل پراکندگی امواج الکترومغناطیس با طول موج

بلند از کره‌وارهای پلاسمای گرم

- 5-1- پراکندگی امواج الکترومغناطیس با طول موج بلند از کره‌وار پلاسمای گرم.....97
- 5-2- توابع موج عددی در مختصات کره‌وار کشیده.....100
- 5-3- محاسبه عددی مقادیر ویژه و ضرایب بسط توابع موج فضایی و شعاعی برای
پلاسمای کره‌وار کشیده.....101
- 5-4- توصیف پتانسیل الکتریکی داخل و خارج کره‌وار پلاسمایی.....101
- جمع بندی و نتیجه گیری.....112
- منابع و مأخذ.....115

فهرست شکل‌ها

صفحه	عنوان
4.....	شکل 1-1-1- دستگاه مختصات کره‌وار کشیده.....
5.....	شکل 1-2- موقعیت کانون‌های کره‌وار.....
7.....	شکل 1-3- مختصات زاویه‌ای کره‌وار کشیده.....
11.....	شکل 1-4- دستگاه مختصات کره‌وار پخت.....
25.....	شکل 1-2- فرآیند پراکندگی موج الکترومغناطیسی.....
29.....	شکل 2-2- سطح مقطع یک ستون پلاسمای سرد در پراکندگی امواج الکترومغناطیسی با طول موج بلند.....
30.....	شکل 2-3- انتخاب مسیر فرضی برای اثبات غیر گردشی بودن میدان الکتریکی.....
34.....	شکل 2-4- برهم کنش امواج الکترومغناطیس با کره پلاسمای سرد.....
41.....	شکل 2-5- نمای امان سطحی در مرز پلاسمای-خلاء.....
47.....	شکل 3-1- یک کره وار کشیده پلاسمایی در دستگاه مختصات مربوطه.....
47.....	شکل 3-2- یک کره وار کشیده پلاسمایی و موقعیت موج تابشی به آن.....
52.....	شکل 3-3- نمودار تغییرات فرکانس رزونانس کره‌وار کشیده بر حسب ابعاد آن.....
54.....	شکل 3-4- موقعیت میدان تابشی نسبت به کره‌وار پخت.....
57.....	شکل 3-5- تغییرات فرکانس رزونانس نرمالیزه شده نسبت به ضخامت کره‌وار پخت.....

- شکل 3-6- کرهوار پلاسمایی در محاصره دی الکتریک.....58
- شکل 3-7- تغییرات فرکانس نرمالیزه شده کرهوار کشیده در محاصره دی الکتریک با ضریب دی- الکتریک متفاوت.....62
- شکل 3-8- مقایسه تغییرات فرکانس نرمالیزه شده کرهوار کشیده در محاصره دی الکتریک نازک و ضخیم.....62
- شکل 3-9- کرهوار پخت پلاسمایی در پوشش دی الکتریک.....63
- شکل 3-10: تغییرات فرکانس رزونانس نرمالیزه علیه ضخامت کره وار پخت در دی الکتریکهای متفاوت.....64
- شکل 4-1- کرهوار کشیده و موقعیت میدانهای الکتریکی و مغناطیسی.....69
- شکل 4-2- تغییرات فرکانس رزونانس نرمالیزه شده کرهوار مغناطیده سرد بر حسب فرکانس سیکلوترونی.....78
- شکل 4-3- تغییرات فرکانس رزونانس نرمالیزه شده کرهوار مغناطیده سرد بر حسب میدان فرکانس پلاسمای.....79
- شکل 4-4- تغییرات سطح مقطع پراکندگی کره وار بر حسب قطبیدگی موج فرودی.....82
- شکل 4-5- تغییرات سطح مقطع پراکندگی و بازگشتی بر حسب فرکانس موج فرودی.....83
- شکل 4-6- تغییرات سطح مقطع پراکندگی بر حسب فرکانس پلاسمای در دو فرکانس مختلف موج فرودی.....84
- شکل 4-7- تغییرات سطح مقطع پراکندگی بر حسب تغییرات فرکانس سیکلوترونی.....85
- شکل 4-8- کرهوار کشیده به همراه موقعیت میدانهای مغناطیسی محوی و توروئیدی.....86

- شکل 4-9- تغییرات فرکانس رزونانس نرمالیزه شده نسبت به فرکانس پلاسما در $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$
- 91..... بر حسب فرکانس نرمالیزه شده سیلکوترونی الکترون.....
- شکل 4-10- تغییرات سطح مقطع راداری بر حسب فرکانس فرودی.....
- 93.....
- شکل 4-11- تغییرات سطح مقطع پراکندگی کره وار مغناطیده دوار بر حسب فرکانس
- 94..... سیکلوترونی.....
- شکل 4-11- تغییرات سطح مقطع پراکندگی نسبت به تغییرات فرکانس پلاسما.....
- 94.....
- شکل 5-1- نمایی از کره وار پلاسما گرم در میدان فرودی الکتريکی موازی با محور چرخش آن
- 97.....
- شکل 5-2- نمودار تغییرات فرکانس رزونانس بر علیه دمای الکترونها.....
- 108.....
- شکل 3-5- تغییرات مجذور فرکانس رزونانس بر علیه طول دبای.....
- 108.....
- شکل 5-4- تغییرات پتانسیل داخل پلاسما گرم بر حسب مجذور فرکانس رزونانس.....
- 110.....

فصل اول

دیدگاه ریاضی حاکم بر کره وار

کشیده و کره وار پخت

1-1 مقدمه

دستگاه مختصات دکارتی برای حل بسیاری از مسائل فیزیکی مناسب نیست مثلاً، اگر یک نیروی مرکزگرا مثل نیروی گرانش یا الکترواستاتیکی داشته باشیم، دستگاه مختصات دکارتی بیش از حد نامناسب است. بهترین دستگاه مختصاتی که در این گونه مسائل بکار می‌آید، دستگاهی است که فاصله شعاعی، یکی از مختصات آن باشد یعنی دستگاه مختصات کروی. نکته این است که در هر مسئله باید چنان دستگاه مختصاتی را انتخاب کرد که با آن جور باشد و هر قید یا تقارن موجود در آن مسئله را مورد استفاده قرار دهد و به احتمال زیاد، در این حالت مسئله بهتر قابل حل خواهد بود تا اینکه آن را به قالب دستگاه دکارتی درآوریم. منظور این است که یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی خواهیم داشت که می‌توان آن را در دستگاه مختصات جدید به چند معادله دیفرانسیل معمولی تجزیه کرد که غالباً استاندارد هستند. دستگاه‌های مختصات سه بعدی معمول عبارتند از:

قائم¹، استوانه‌ای دوار²، استوانه‌ای بیضوی³، استوانه‌ای سه‌وی⁴، کروی⁵، سه‌وی⁶، مخروطی⁷، کره‌وار کشیده⁸، کره‌وار پخت⁹، دو قطبی¹⁰، دو کروی¹¹، چنبره‌ای¹²، بیضیوار همکانون¹³ و سه‌یوار همکانون¹⁴.

معمولاً هر ذره‌ای که در طبیعت با آن سروکار داریم، مثل بلورینخ، قطرات باران، ذرات گرد و غبار و... دارای شکل کروی منظم نیستند، بنابراین توسعه مدل‌های مناسب

-
- 1 Rectangular
 - 2 Circular Cylinder
 - 3 Elliptic cylinder
 - 4 Parabolic cylinder
 - 5 Spherical
 - 6 Parabolic
 - 7 Conical
 - 8 Prolate Spheroidal
 - 9 Oblate spheroidal
 - 10 Bipolar
 - 11 Bispherical
 - 12 Toroidal
 - 13 Ellipsoidal
 - 14 Parabolical

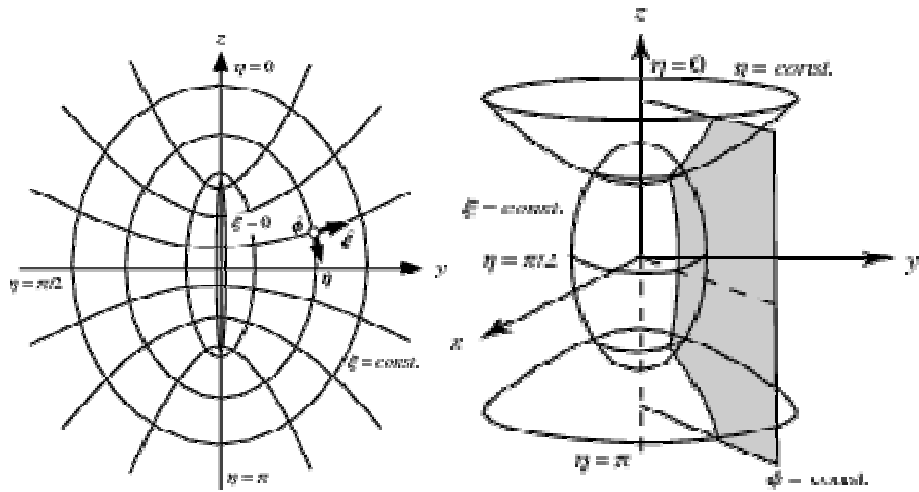
ذرات غیر کروی علاقه‌مندی بسیاری را در تحلیل دقیق مسائل در مختصات کره‌وار (کشیده و پخت) بوجود آورده است، زیرا هندسه بسیاری از اجسام را در حوزه‌های عملی می‌توان به صورت‌های کره‌وار تقریب زد.

اکنون حوزه‌های زیادی وجود دارند که در آنها حل معادلات دیفرانسیل مختلف مانند معادله لاپلاس، معادله موج، معادلات ماکسول و... در مختصات کره‌وار در صدر تحقیقات قرار دارند. برخی از این حوزه‌ها عبارتند از: پراکندگی امواج الکترومغناطیسی از ذرات همگن کره‌وار [1]، بررسی پراکندگی از دی الکتریک‌های اتلافی کره‌وار [2] محاسبه میدان الکترومغناطیسی در داخل یا سطح کره‌وارها در برهم کنش امواج الکترومغناطیسی و پرتوهای لیزرکانونی شده [3-7] پراکندگی نور در اپتیک [8-10] مدل‌های هسته‌ای [11]، پردازش سیگنال و تئوری ارتباطات [12]، مدل‌های الکترومغناطیسی [13] و... اصولاً دستگاه‌های کره‌وار کشیده در فیزیک به این علت اهمیت دارد که در بررسی مسائل ((دو مرکزی)) مانند یون مولکول هیدروژن که لازم است معادله شرودینگر را برای آن حل کنیم بکار می‌آید یا همچنین برای حل معادله الکتریکی تولید شده توسط دو الکتروود کوچک نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد [14]. دستگاه کره‌وار پخت نیز می‌تواند تقریب خوبی برای سطح سیارات باشد و از این دستگاه مختصات می‌توان در توصیف میدان گرانشی زمین استفاده کرد.

1-2 - دستگاه مختصات کره‌وار کشیده¹

دستگاه مختصات کره‌وار کشیده یک دستگاه مختصات سه بعدی متعامد است که از چرخش دستگاه دو بعدی بیضوی حول محور کانون بیضی یعنی محور تقارن که کانون‌ها روی آن قرار دارند بوجود می‌آید. دستگاه مختصات کره‌وار کشیده را می‌توان حالت حدی دستگاه مختصات بیضیوار همکانون فرض کرد که دو محور کوچکتر آن با هم برابرند.

¹ Prolate Spheroidal Coordinates



شکل 1-1- دستگاه مختصات کرهوار کشیده

به بیان دیگر دستگاه مختصات کرهوار کشیده با چرخش دستگاه مختصات بیضوی حول محور بزرگ بیضی حاصل می‌شود که با معرفی ϕ به عنوان زاویه سمتی دستگاه سه بعدی بوجود می‌آید [14]. با فرض اینکه کانون‌های کرهوار کشیده مانند شکل (2-1) در نقاط $(x = 0, y = 0, z = \pm \frac{1}{2}a)$ واقع شده باشند، فاصله نقطه دلخواه (x, y, z) از کانون‌های کرهوار برابر است با:

$$r_2 = \sqrt{(z - 1)^2 + x^2 + y^2} \quad \text{و} \quad r_1 = \sqrt{\left(z + \frac{1}{2}a\right)^2 + x^2 + y^2} \quad (1-1)$$

و می‌توان مختصات دستگاه کرهوار کشیده (ξ, η, ϕ) را به صورت زیر تعریف کرد [15]:

$$x = \frac{r_1 + r_2}{a}, \quad h = \frac{r_1 - r_2}{a}, \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \quad (2-1)$$

و رابطه‌ی آنها برحسب مختصات دکارتی چنین است:

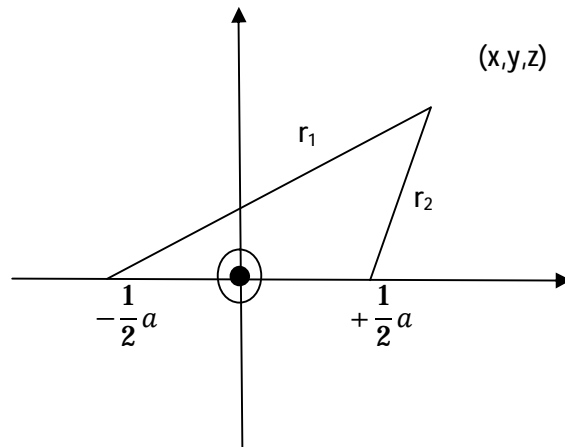
$$x = \frac{1}{2}a \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \cos\phi \quad (3-1)$$

$$y = \frac{1}{2} a \sqrt{(x^2 - 1)(1 - h^2)} \sin \phi \quad (4-1)$$

$$z = \frac{1}{2} axh \quad (5-1)$$

و ناحیه تغییرات این مختصات در بازه‌ی : $1 \leq \xi \leq \infty$, $-1 \leq \eta \leq 1$ و $0 \leq \phi \leq 2\pi$

می باشد .



شکل 1-2- موقعیت کانون‌های کره‌وار

دستگاه مختصات کره‌وار کشیده را با سطوح مختصات زیر به دست می‌آوریم :

ثابت $\xi =$ ، کره‌وارهای کشیده با فاصله بین دو کانون برابر با a ، محور بزرگ آن

برابر $\frac{1}{2} xa$ و محور کوچکتر آن $\frac{1}{2} a \sqrt{x^2 - 1}$.

ثابت $\eta =$ ، هذلولی‌وارهای دو پارچه با کانونهایی در $Z = \frac{1}{2} a$ و $Z = -\frac{1}{2} a$

ثابت $\phi =$ ، نیم صفحه‌هایی هستند که از محور Z می‌گذرد و زاویه ϕ را با صفحه Z -

X می‌سازند .

مختصه ξ را مختصه شعاعی ، η را مختصه زاویه‌ای و ϕ را زاویه سمتی دستگاه می‌نامند زیرا در حد $a \rightarrow 0$ این دو به متغیرهای کروی نزدیک می‌شوند . لازم به ذکر است که محور تقارن دورانی را محور Z در نظر بگیریم .

1-2-1 ضرایب مقیاس¹

باتوجه به تعریف روابط تبدیل ضرایب مقیاس به صورت زیر [16] :

$$h_x^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \quad (6-1)$$

$$h_h^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial h}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial h}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial h}\right)^2 \quad (7-1)$$

$$h_\phi^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right)^2 \quad (8-1)$$

می‌توان به دست آورد :

$$h_x = \frac{1}{2} a \sqrt{\frac{x^2 - h^2}{x^2 - 1}} , \quad h_h = \frac{1}{2} a \sqrt{\frac{x^2 - h^2}{1 - h^2}} , \quad h_\phi = \frac{1}{2} a \sqrt{(x^2 - 1)(1 - h^2)} \quad (9-1)$$

گاهی لازم است که برای مختصات کره‌وار کشیده از متغیرهای مثلثاتی استفاده کنیم ، در اینصورت مختصات کره‌وار کشیده را می‌توان به صورت زیر هم تعریف کرد [14]:

$$x = \frac{1}{2} a \sin hm \sin u \cos \phi \quad (10-1)$$

$$y = \frac{1}{2} a \sin m \sin u \sin \phi \quad (11-1)$$

¹ Metric Coefficients

$$z = \frac{1}{2} a \cos h\mu \cos u \quad (12-1)$$

به طوری که بازه تغییرات آن‌ها برابر است با ، $0 \leq \phi \leq 2\pi$ ، $0 \leq \nu \leq \pi$ و $0 \leq \mu \leq \infty$ ،
 شکل (3-1) ضرایب مقیاس متناظر این نوع تعریف چنین است :

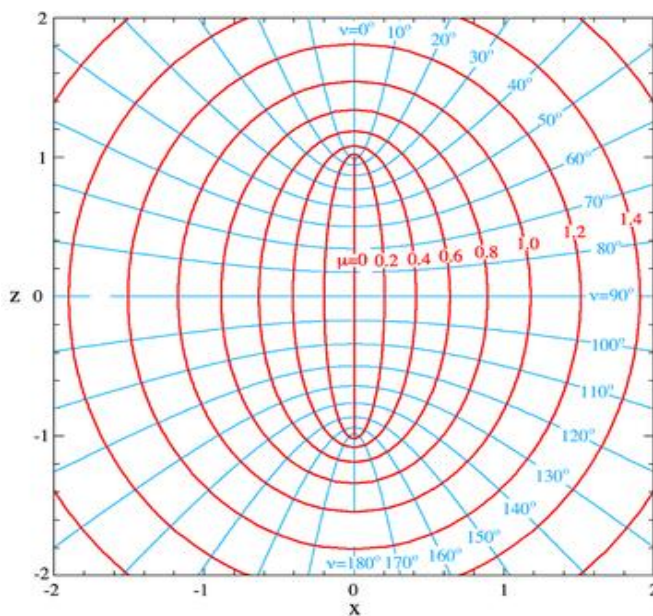
$$h_\mu = h_u = \frac{1}{2} a \sqrt{\sin h^2 \mu + \sin^2 u} = \frac{1}{2} a \sqrt{\cos h^2 \mu - \cos^2 u} , h_\phi = \frac{1}{2} a \sin h\mu \sin u \quad (13-1)$$

و المان حجم به صورت زیر نوشته می شود :

$$dv = d^3 \sin h\mu \sin u (\sin h^2 \mu + \sin^2 u) d\mu du d\phi \quad (14-1)$$

و یا :

$$dv = a^3 (x^2 - h^2) d\eta d\xi d\phi \quad (15-1)$$



شکل 3-1-مختصات زاویه‌ای کره وار کشیده

1 - 3 - جوابهای کلی معادله لاپلاس در دستگاه مختصات کرهوار

کشیده

در حل بسیاری از مسائل الکترواستاتیک لازم است که معادله لاپلاس را در دستگاه مختصات مورد نظر حل کنیم. با توجه به تعریف عملگر لاپلاسیان در دستگاه مختصات کرهوار کشیده به قرار زیر:

$$\nabla^2 = \frac{1}{h_x h_h h_f} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h_\phi h_h}{h_x} \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h_x h_\phi}{h_h} \frac{\partial}{\partial h} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{h_x h_h}{h_\phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \quad (16-1)$$

می‌توان معادله لاپلاس را در دستگاه مختصات کرهوار کشیده با استفاده از روش جداسازی متغیرها حل کرد:

$$\nabla^2 \psi = \frac{4}{a^2(x^2 - h^2)} \left[\frac{\partial}{\partial x} (x^2 - 1) \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial h} (1 - h^2) \frac{\partial \psi}{\partial h} + \frac{x^2 - h^2}{(x^2 - 1)(1 - h^2)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right] = 0 \quad (17-1)$$

بافرض اینکه:

$$\psi(x, h, \phi) = X(x)H(h)\Phi(\phi) \quad (18-1)$$

با جایگذاری معادله فوق در (17-1) به سه معادله تفکیک شده زیر می‌رسیم:

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -m^2 \Phi \quad (19-1)$$

$$\frac{d}{dh} \left[(1 - h^2) \frac{dH}{dh} \right] + n(n + 1)H - \frac{m^2}{1 - h^2} H = 0 \quad (20-1)$$