بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه گیلان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

(گرایش کاربردی)

تبدیل لاپلاس N بعدی و معادلات دیفرانسیل جزیی مرتبه دوم با ضرایب ثابت

از:

مریم غلامی بجارگفشه

استاد راهنما:

دکتر آرمان عقیلی

(شهریور ۸۹)

تقدیم به پدر و مادرم

همه ی آنچه را که از نتایج تحقیق در عرصه این پایان نامه بدست آورده ام ،

پیشکش نگاه های محبت آمیز مادر و نفس همیشه گرم پدرم می کنم ، نگاه و نفسی که به یقین پل پیشرفتم بود.

تقدیر و تشکر...

سپاس بیکران خداوند را، که به این بنده یاری داد تا با استعانت از لطف بی پایانش، بتوانم توانایی خود را بکار گرفته و با بهره مندی از الطاف و محبت آنهایی که دائما مشوق و پشتیبانم بودند و در این راه از تجارب و رهنمودهایشان نصیب برده و می برم، گامی دیگر بردارم.

از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر عقیلی، که سالهای عمر شریف و پرثمر خود را صرف تعلیم و تربیت شاگردان خود نمودند و بنده حقیر نیز از محضر ایشان بهره مند بودم، کمال تشکر و قدردانی را دارم که در هموار نمودن راه پرفراز و نشیب این تحقیق صادقانه راهنماییم کردند.

از اساتید بزرگوار جناب آقای دکتر کتابچی و جناب آقای دکتر کیانپور که به عنوان داور زحمت بازخوانی پایان نامه را بر عهده داشته و نظرات ارزنده ای در هرچه بهتر شدن آن ارائه نمودند، سپاسگزارم. امید که همه ی این بزرگواران در پناه خداوند متعال سلامت و موفق باشند.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فهرست اشکال .... چ

چکیده فارسی .... ح

چکیده انگلیسی .... خ

پیشگفتار ۱

فصل اول- تبدیل لاپلاس تک بعدی

۱-۱. مقدمه ۲

۱-۲. تبدیل لاپلاس تابع $f\ (t)$ ۲

۱-۳. وجود تبدیل لاپلاس ۲

۱-۴. تبدیل لاپلاس برخی توابع مقدماتی ۳

۱-۵. برخی خواص مهم تبدیل لاپلاس توابع ۳

۱-۶. ویژگی منحصر به فرد بودن تبدیل لاپلاس ۶

۱-۷. تبدیل معکوس لاپلاس تابع $f\ (t)$ ۱۱

۱-۸. تلفیق ۱۳

۱-۹. قضیه افروز و کاربردهای آن ۱۶

۱-۱۰. محاسبه معکوس تبدیلات لاپلاس ۱۸

فصل دوم- چند جمله ای های لاگر

۲-۱. مقدمه ۲۷

۲-۲. چند جمله ای لاگر ۲۷

۲-۳. بررسی تعامد چند جمله ای های لاگر دربازه $[0,\infty)$ ۲۹

۲-۴. اتحاد پارسوال بسط تابع لاگر........ ۳۱

۲-۵. چند جمله ای های تعمیم یافته لاگر........ ۳۶

۲-۶. بررسی تعامد چند جمله ای های تعمیم یافته لاگر در بازه $[0,\infty)$........ ۳۷

۲-۷. تبدیلات لاگر ۳۸

۲-۸. ویژگی های اساسی تبدیلات لاگر........ ۴۳

۲-۹. کاربرد تبدیلات لاگر........ ۴۷

فصل سوم- تبدیل لاپلاس دوبعدی

۳-۱. مقدمه ۵۲

۳-۲. تبدیل لاپلاس دوبعدی ۵۲

۳-۳. همگرایی مطلق تبدیل لاپلاس دوبعدی........ ۵۲

۳-۴. خواص مقدماتی تبدیل لاپلاس دوبعدی........ ۵۳

۳-۵. تبدیل معکوس لاپلاس دوبعدی........ ۶۰

۳-۶. حل معادله موج با استفاده از تبدیل لاپلاس دوبعدی........ ۶۷

فصل چهارم- تبدیل لاپلاس n- بعدی و معادلات دیفرانسیل جزیی خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت

۴-۱. مقدمه........ ۷۰

۴-۲. تبدیل لاپلاس n بعدی و کاربرد آنها........ ۷۰

۴-۳. قضایای اصلی ۷۱

۴-۴. کاربرد تبدیلات لاپلاس دوبعدی در محاسبه برخی سری ها........ ۸۰

۴-۵. حل معادلات دیفرانسیل جزیی مرتبه دوم خطی با ضرایب ثابت........ ۸۴

فصل پنجم-معادلات دیفرانسیل جزیی خطی مرتبه چهارم با ضرایب ثابت

۵-۱.مقدمه ۹۰

۵-۲.حل معادلات دیفرانسیل جزیی مرتبه چهارم خطی با ضرایب ثابت ۹۰

فصل ششم-معادله دیفیوژن کسری زمان

۶-۱.مقدمه ۱۰۰

۶-۲ . حل معادله دیفیوژن کسری زمان با استفاده تبدیل لاپلاس تک بعدی ۱۰۰

نتیجه گیری **۱۰۸**

پیشنهادات برای ادامه کار **۱۰۹**

منابع و ماخذ **۱۱۰**

واژه نامه انگلیسی به فارسی **۱۱۱**

فهرست شکل‌ها

عنوان

صفحه

شکل ۱–۱ .... ۲۵

چکیده

تبدیل لاپلاس N بعدی و معادلات دیفرانسیل جزیی مرتبه دوم با ضرایب ثابت

مریم غلامی بجارگفشه

در این پایان نامه تبدیل لاگر و ویژگیهای اساسی آن را تعریف کردیم .در آن نشان داده شده است که تبدیل لاگر می توانند بطور موثری برای حل مساله رسانش گرمایی در یک سیم نیم متناهی با جریان گرمایی متغیر در حضور یک منبع گرمایی در حالت تعادل استفاده می شود.

در این پایان نامه ، قضایایی از تبدیل لاپلاس چند بعدی و تعمیم آنها و بعضی از کاربردهای آنها را بیان و اثبات می شوند. همچنین کاربرد تبدیل لاپلاس دوبعدی در حل مسائل مربوط به چند جمله ای های لاگر را نشان دادیم . تبدیل لاپلاس دوبعدی در حل معادلات دیفرانسیل جزیی مفید است .

کلید واژه :تبدیل لاپلاس دوبعدی، معادلات دیفرانسیل جزیی غیر همگن خطی مرتبه دوم، چند جمله ای های لاگر.

Abstract

Laplace transform pairs of N-dimensions and second order linear partial differential equations with constant coefficients

Maryam Gholami

In this dissertation,we define Laguerre transform and its basic properties.it is shown that the Laguerre transform can be used effectively to solve the heat conduction problem in a semi-infinite medium with variable thermal conductivity in the presence of a heat source within the medium.

we will prove certain theorems and corollary on multi dimensional Laplace transformations and also develope some applications based on this results. Application of two dimensional Laplace transform in the examples related to Laguerre polynomials are also provided. The two–dimensional Laplace transformation is useful in the solution of partial differential equations

Keywords: Two-dimensional Laplace transform, second- order linear non homogenous partial differential equations, Laguerre polynomials.

پیشگفتار

امروزه تبدیلات لاپلاس در علومی همچون ریاضی و مهندسی کاربرد فراوانی دارند. از این تبدیلات برای حل معادلات دیفرانسیل و معادلات انتگرال استفاده می شود. آنچه که امروزه بیشتر مورد توجه است بدست آوردن تبدیلات لاپلاس دوبعدی، سه بعدی و چند بعدی است که بتوان با استفاده از کاربردهای آنها در علوم مختلف، مسائل را سریعتر حل کرد.

این پایان نامه شامل شش فصل است. در فصل اول برخی از قضایای مهم و کاربردی تبدیل لاپلاس تک بعدی و تبدیل لاپلاس معکوس آن بیان و اثبات شده است و در ادامه مثال های متنوعی از کاربردهای آنها بیان شده است. در فصل دوم، خواص چند جمله ای های لاگر در ارتباط با تبدیلات لاپلاس بیان شده و با استفاده از آنها سبط لاگر برخی توابع را بدست آوردیم و همچنین چند سری مربوط به چند جمله ای های لاگر را حل کردیم. در انتها تبدیلات لاگر را بررسی و چند مثال را مطرح کردیم. فصل سوم به بیان و اثبات خواص و قضایایی از تبدیل لاپلاس دو بعدی اختصاص یافته است و بعضی از کاربردهای این قضایا با ذکر مثال هایی نشان داده شده است. در فصل چهارم، به تعریف تبدیل لاپلاس $n-$ بعدی پرداختیم و قضایای کاربردی از این تبدیلات را بیان کردیم و کاربرد تبدیل لاپلاس دو بعدی در حل سری های وابسته به چند جمله ای های لاگر را نشان دادیم. همچنین کاربرد تبدیلات لاپلاس دو بعدی در حل معادلات دیفرانسیل جزیی خطی مرتبه دوم را با ذکر مثال هایی نشان دادیم. در فصل پنجم نیز معادلات دیفرانسیل جزیی خطی مرتبه چهارم را معرفی و با طرح مسائلی کاربرد آنها را نشان دادیم. در نهایت ، در فصل ششم به بررسی یک معادله دیفیوژن کسری زمان با استفاده از روشهای حل تبدیل لاپلاس تک بعدی پرداخته ایم . شایان ذکر است که این معادلات در فیزیک و علوم مهندسی کاربرد دارند ، زیرا این معادلات پدیده های فیزیکی را بهتر توجیه می کنند و جواب بدست آمده به کمک آنها دقیق تر از معادلات موج وگرما یی است که به روش کسری حل نشده اند.

فصل اول

تبدیل لاپلاس تک بعدی

۱ـ۱. مقدمه

در این فصل به تعریف تبدیل لاپلاس تک بعدی و معرفی ویژگی های آن به همراه اثبات قضایا پرداخته و همچنین تبدیل لاپلاس معکوس تک بعدی تعریف شده و مثال های زیادی در هر بخش مطرح شده است. لازم به ذکر است که تبدیلات لاپلاس تک بعدی علاوه بر ریاضی در علوم مهندسی نیز کاربرد فراوانی دارند. روش های تبدیلات لاپلاس به عنوان روش هایی برای حل راحت تر مسائل به کار می روند.

۱ـ۲. تبدیل لاپلاس[1] تابع $f(t)$.

تعریف ۱-۲-۱. فرض کنیم $f:[0,\infty)\to C\ ,\ s\in C$ آنگاه تبدیل لاپلاس $f(t)$ را با $L\{f(t)\}=F(s)$ نشان می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم [۱]:

$$L\{f(t);t\to s\}=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt=F(s) \qquad (۱-۱)$$

تعریف ۱ـ۲ـ۲. تابع $f:[0,\infty)\to C$ از مرتبه نمایی است اگر ثابت های حقیقی ومثبت a,T,M موجود باشند به طوری که به ازای $T\le t$ داشته باشیم[۱]:

$$\left|e^{-at}f(t)\right|\le M \qquad \text{یا} \qquad \left|f(t)\right|\le Me^{at}$$

به عنوان مثال تابع $f(t)=t^2$ نمایی از مرتبه ۳ است زیرا به ازای $t>0$ ، $\left|t^2\right|=t^2<e^{3t}$.

همچنین توابع کراندار مانند $cos(at),sin(at)$ از مرتبه نمایی هستند.

۱ـ۳. وجود تبدیل لاپلاس

اگر $f(t)$ به ازای هر $b>0$ روی فاصله $[0,b]$ قطعه به قطعه پیوسته باشد و از مرتبه نمایی هم باشد آنگاه تبدیل لاپلاس تابع $f:[0,\infty)\to C$ وجود دارد اگر و فقط اگر $\mathrm{Re}\,s>a$ [۱].

اثبات. با توجه به تعریف تبدیل لاپلاس و شرایط بیان شده خواهیم داشت:

$$\left|L\{f(t)\}\right|\le\int_0^T\left|e^{-st}f(t)\right|dt+M\int_T^\infty\left|e^{-(s-a)t}\right|dt \qquad (۲-۱)$$

1 -Laplace

واضح است که انتگرال اول متناهی است و انتگرال دوم قابل تبدیل به $\int_T^\infty e^{-(\mathrm{Re}\,s-a)t}\,dt$ است.(زیرا $\left|e^{-i\,\mathrm{Im}\,s}\right|=1$). بنابراین

واضح است که این انتگرال همگراست اگر و فقط اگر $\mathrm{Re}\,s>a$.

نکته (۱ـ۳ـ۱). از رابطه (۱ـ۲) خواهیم داشت که اگر تبدیل لاپلاس f با در نظر گرفتن شرایط بیان شده وجود داشته باشد، آنگاه

$\lim_{s\to\infty}F(s)=0$.

۱-٤. تبدیل لاپلاس برخی توابع مقدماتی [۱].

(۱) $$L\{t^{\nu}\}=\frac{\Gamma(\nu+1)}{s^{\nu+1}}\quad \nu>-1$$ (۳-۱)

(۲) $$L\{\sin(at)\}=\frac{a}{s^2+a^2}$$ (۴-۱)

(۳) $$L\{\cos(at)\}=\frac{s}{s^2+a^2}$$ (۵-۱)

(۴) $$L\{e^{at}\}=\frac{1}{s-a}$$ (۶-۱)

۱-۵ . برخی خواص مهم تبدیل لاپلاس توابع

(۱) خاصیت خطی تبدیل لاپلاس: اگر c_2,c_1 ثابت های دلخواه باشند، آنگاه [۱] :

$$L\{c_1 f_1(t)+c_2 f_2(t)\}=c_1 L\{f_1(t)\}+c_2 L\{f_2(t)\}$$ (۷-۱)

(۲) اگر $L\{f(t)\}=F(s)$ ، آنگاه

$$L\{e^{at} f(t)\}=F(s-a)$$ (۸-۱)

(۳) اگر $L\{f(t)\}=F(s)$ ، آنگاه

$$L\{f(at)\}=\frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$$ (۹-۱)

(۴) اگر $L\{f(t)\}=F(s)$ ، آنگاه

$$L\{f^{(n)}(t)\}=s^n F(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\ldots-s\,f^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$$ (۱۰-۱)

(۵) اگر $L\{f(t)\}=F(s)$ ، آنگاه

$$L\{t^n f(t)\}=(-1)^n F^{(n)}(s)$$ (۱۱-۱)

۶) اگر f روی $\left(0,\infty\right)$ پیوسته و $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{f\,(t)}{t}$ موجود باشد، آنگاه

$$L\left\{\frac{f\,(t)}{t}\right\}=\int_s^{\infty} f\,(u)\quad du \qquad (۱۲-۱)$$

۷) اگر $L\left\{f\,(t)\right\}=F(s)$ ، آنگاه

$$L\left\{\int_0^t f\,(u)\,d\,u\right\}=\frac{F(s)}{s} \qquad (۱۳-۱)$$

قضیه(۱-۵-۱). (قضیه مقدار آغازین[۱])

فرض کنید $f\,(t)$ قطعه به قطعه پیوسته باشد و $f\,(t)$ و $f\,(t)-\int_0^t f\,'\left(\tau\right)d\,\tau$ از مرتبه نمایی باشندو $f\,'(t)$ در نقاطی که $f\,(t)$ پیوسته است ، تعریف شده و در نقاط ناپیوستگی $f\,(t)$ صفر است و اگر $L\left\{f\,(t)\right\}=F(s)$ آنگاه

$$\lim_{t\to 0}f\,(t)=\lim_{s\to\infty}s\;F(s) \qquad (۱۴-۱)$$

اثبات. مراجعه شود به مرجع[۲] .

قضیه(۱-۵-۲). (قضیه مقدار نهایی[۲])

فرض کنید $f\,(t)$ قطعه به قطعه پیوسته و از مرتبه نمایی باشد و $f\,'(t)$ مشابه قضیه قبل تعریف شده باشدفرض کنید $\int_0^{\infty} f\,'\left(t\right)dt$ وجود دارد و فرض کنید $\sum_{k=1}^{\infty}\left|\beta_k\right|$ همگرا باشد و آنرا بصورت زیر تعریف می کنیم :

$$f\,(t)-\int_0^t f\,'\left(\tau\right)d\,\tau=\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k\,u\left(t-T_k\right)$$

T_k نقاط ناپیوستگی $f\,(t)$ است و اگر $L\left\{f\,(t)\right\}=F(s)$ آنگاه

$$\lim_{t\to\infty}f\,(t)=\lim_{s\to 0}s\;F(s) \qquad (۱۵-۱)$$

اثبات.مراجعه شود به مرجع[۲].

---

1 - Initial – Value Theorem

2 - Final – Value Theorem

تعریف (۱-۵-۱) . (تابع واحد هویساید[1] یا تابع پلکانی واحد)

این تابع بصورت زیر تعریف و نشان داده می شود [۱]:

$$H(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t\geq 0\end{cases} \qquad (۱-۱۶)$$

قضیه (۱-۵-۳) . (قضیه انتقال)

با در نظر گرفتن شرایط وجود تبدیل لاپلاس و $a\in\mathbb{R}^+$ آنگاه [۱]:

$$L\{H(t-a)f(t-a)\}=e^{-as}F(s) \qquad (۱-۱۷)$$

در حالت خاص به ازای $f(t)=1$ بدست می آید :

$$L\{H(t-a)\}=\frac{e^{-as}}{s} \qquad (۱-۱۸)$$

مثال(۱-۵-۱). مطلوبست محاسبه $L\left\{\frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right\}$ [۱] .

حل. فرض می کنیم $f(t)=\sin\sqrt{t}$ در این صورت $f'(t)=\frac{\cos\sqrt{t}}{2\sqrt{t}}$

$$\sin\sqrt{t}=\sqrt{t}-\frac{(\sqrt{t})^3}{3!}+\frac{(\sqrt{t})^5}{5!}-\ldots=t^{\frac{1}{2}}-\frac{t^{\frac{3}{2}}}{3!}+\frac{t^{\frac{5}{2}}}{5!}-\ldots$$

با توجه به اینکه $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)\quad,\quad\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ ، داریم:

$$L\{\sin\sqrt{t}\}=\frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{s^{\frac{3}{2}}}-\frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{s^{\frac{5}{2}}}+\frac{\Gamma(\frac{7}{2})}{s^{\frac{7}{2}}}-\ldots$$

$$L\{\sin\sqrt{t}\}=\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}\left[1-(\frac{1}{4s})+\frac{(\frac{1}{4s})^2}{2!}-\frac{(\frac{1}{4s})^3}{3!}+\ldots\right]=\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}\,e^{-\frac{1}{4s}}$$

$$L\{f'(t)\}=\frac{1}{2}L\left\{\frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right\}=sF(s)-f(0)$$

1.Heaviside's unit function

چون $f(0)=0$, $F(s)=\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}\ e^{-\frac{1}{4s}}$ ، بنابراین خواهیم داشت:

$$L\left\{\frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right\}=\sqrt{\frac{\pi}{s}}\,e^{-\frac{1}{4s}}$$

مثال(۱-۵-۲).فرض کنید اگر $f(t)=ln\,(at)$

الف . مطلوبست $F(s)$ **ب**.مطلوبست $L\left\{t^{-\frac{1}{2}}\,ln\left(at\right)\right\}$

حل الف.

$$\int_0^{\infty}e^{-st}\,t^{\nu}\,dt=\frac{\Gamma\left(\nu+1\right)}{s^{\nu+1}}$$

اگر از طرفین نسبت به ν مشتق بگیریم ،داریم:

$$\int_0^{\infty}e^{-st}\,t^{\nu}\ln t\,dt=\frac{\Gamma'\left(\nu+1\right)+\Gamma\left(\nu+1\right)\ln s}{s^{(\nu+1)}}$$

اگر $\Gamma'\left(1\right)=-\gamma$, $\nu=0$ ، γ ثابت اویلر[1] است ، دراینصورت:

$$L\left\{\,ln\,t;s\,\right\}=-\frac{\gamma+lns}{s}$$

حال با استفاده از رابطه(۱-۹)داریم:

$$F(s)=L\left\{\,ln\,(at);s\,\right\}=-\frac{1}{a}\,\frac{\gamma+ln\,\frac{s}{a}}{\frac{s}{a}}=\frac{1}{s}\,(ln\,\frac{a}{s}-\gamma)$$

ب.اگر در قسمت الف بجای $\nu=-\frac{1}{2}$ جایگذاری کنیم،داریم:

$$L\left\{t^{-\frac{1}{2}}\,lnt\,\right\}=\frac{\Gamma'(\frac{1}{2})-\Gamma(\frac{1}{2})\,lns}{\sqrt{s}}$$

دراینصورت

$$L\left\{t^{\frac{-1}{2}}\,ln(at)\right\}=L\left\{t^{\frac{-1}{2}}\left(lna+lnt\right)\right\}=L\left\{t^{\frac{-1}{2}}\,lna\right\}+L\left\{t^{\frac{-1}{2}}\,lnt\,\right\}$$

---

1 - Euler’s constant

$$= \sqrt{\frac{\pi}{s}}\, lna \; - \sqrt{\frac{\pi}{s}}\, \ln s + \frac{1}{\sqrt{s}}\, \Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}\, \ln\left(\frac{a}{s}\right) + \Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{s}}$$

۱-۶. ویژگی منحصر به فرد بودن تبدیل لاپلاس.

لم (۱-۶-۱). فرض می کنیم $\psi(x)$ تابعی پیوسته بر بازه $[0,1]$ باشد و قرار می دهیم[۲]:

$$\int_0^1 x^{n-1}\psi(x)\, dx = 0 \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{۱-۱۹}$$

در این صورت

$$\psi(x) = 0 \qquad 0 \le x \le 1 \tag{۱-۲۰}$$

اثبات. اگر $\psi(x)$ در بازه بسته $[0,1]$ مساوی صفر نباشد آنگاه باید در یک زیر بازه بسته (a,b) ای که $0<a<b<1$، $\psi(x)$ همواره یک تابع مثبت (یا همواره یک تابع منفی) باشد. در اولین تناوب، می بینیم که اگر

$$c = \max\left[ab, (1-a)(1-b)\right]$$

آنگاه

$$1 + \frac{1}{c}(b-x)(x-a) > 1 \qquad a < x < b$$

و

$$0 < 1 + \frac{1}{c}(b-x)(x-a) < 1 \qquad 0 < x < a \;,\; b < x < 1$$

بنابراین تابع $p(x) = \left\{1 + \frac{1}{c}\,(b-x)(x-a)\right\}^r$ با انتخاب مناسب r می توان به اندازه ای بزرگ ساخته شود که $a<x<b$ و به اندازه ای کوچک باشد که $b<x<1 \;,\; 0<x<a$ باشد. با توجه به اینکه $p(x)$ یک چند جمله ای از x است و با توجه به فرض که

$$\int_0^1 x^{n-1}\psi(x)\, dx = 0 \qquad n = 1, 2, \ldots$$

بنابراین برای هر عدد صحیح مثبت r باید داشته باشیم:

$$\int_0^1 p(x)\,\psi(x)\,dx = 0$$

ولی با انتخاب r به اندازه ی کافی بزرگ به صورت نامساوی

$$\int_0^1 p(x)\,\psi(x)\,dx > 0$$

صدق می کند. که در اولین تناوب تناقض را نتیجه می دهد. به طور مشابه اگر $\psi(x) < 0$ در (a,b) باشد نیز صدق می کند.

بنابراین $\psi(x) = 0$ در $[0,1]$.

قضیه(۱-٦-۱). (قضیه لرچ[1]).

اگر

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt \qquad s > \gamma \tag{۱-۲۱}$$

که $f(t)$ یک تابع پیوسته است، هیچ تابع پیوسته ی دیگری که در معادله (۱-۲۱) صدق کند، وجود ندارد [۲] .

اثبات. برای اثبات این قضیه، لم (۱-۶-۱) را به کار می بریم. فرض می کنیم $g(t)$ تابع دیگری باشد که دررابطه(۱-۲۱) صدق می کند. با تعریف $h(t) = f(t) - g(t)$ ، چون $h(t)$ تفاضل دو تابع پیوسته است، پس پیوسته است. بنابراین

$$\int_0^\infty e^{-st} h(t)\,dt = 0 \qquad \mathrm{Re}\, s \ge \gamma \tag{۱-۲۲}$$

فرض می کنیم $s = \gamma + n$ ، به طوری که n هر عدد صحیح مثبت است، بنابراین

$$\int_0^\infty e^{-(\gamma+n)\,t}\, h(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-nt}\,\left(e^{-\gamma\, t}\, h(t)\right) dt$$

در اینصورت با استفاده از روش جزء بجز انتگرال را حل می کنیم.

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-(\gamma+n)t}\, h(t)\,dt &= \left[e^{-nt}\int_0^t e^{-\gamma u}\, h(u)\,du\right]_0^\infty + n\int_0^\infty e^{-nt}\left[\int_0^t e^{-\gamma u}\, h(u)\,du\right] dt\\ &= n\int_0^\infty e^{-nt}\left[\int_0^t e^{-\gamma u}\, h(u)\,du\right] dt\end{aligned}$$

و با توجه به رابطه (۱-۲۲) به دست می آوریم:

$$\int_0^\infty e^{-nt}\,\phi(t)\,dt = 0 \tag{۱-۲۳}$$

---

1 - Lerch’s Theorem

به طوری که

$$\phi(t)=\int_0^t e^{-\gamma u}h(u)\ du \qquad (۱-۲۴)$$

در رابطه (۱-۲۳) قرار می دهیم $x=e^{-t}$, $\psi(x)=\phi\left[ln\,(\frac{1}{x})\right]$. بنا براین

$$\int_0^\infty e^{-nt}\ \phi(t)\ dt=\int_0^1 x^n\ \phi\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{x}$$
$$=\int_0^\infty x^{n-1}\ \phi\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx=\int_0^\infty x^{n-1}\ \psi\left(x\right)dx$$

$\psi(x)$در بازه $[0,1]$ پیوسته است. زیرا قرار می دهیم:

$$\psi(0)=\lim_{t\to\infty}\phi(t) \qquad , \qquad \psi(1)=\phi(0)=0$$

همچنین با استفاده از لم فوق،اگر

$$\int_0^1 x^{n-1}\ \psi(x)\ dx=0 \qquad n=1,2,\ldots$$

آنگاه

$$\psi(x)=0 \qquad 0\le x\le 1$$

در نتیجه شرایط لم قبل برقرار است و همچنین چون $\psi\left(x\right)=\phi\left(t\right)$ ، در اینصورت

$$\phi(t)=\int_0^t e^{-\gamma u}\ h(u)\ du=0 \quad ; \quad t\ge 0 \qquad (۱-۲۵)$$

زیرا $e^{-\gamma u}\ \ h(u)$ زمانی که $t\ge 0$ باشد، پیوسته است که معادل است با $t\ge 0$ $\ h(t)=0$ $e^{-\gamma t}$ و لذا $t\ge 0$

$h(t)=0$ در نهایت $t\ge 0$ ، $g(t)=f\ (t)$ می باشد و قضیه اثبات می شود.

قضیه فوق این اطمینان را می دهد که اگر از روش های دقیق برای محاسبه تبدیل لاپلاس استفاده شود، تبدیل لاپلاس $F(s)$ بطور منحصر به فردی برای $f\ (t)$ به دست می آید.

مثال(۱-٦-۱). تبدیل لاپلاس توابع زیر را به دست آورید[۳].

$$(۱)\ \ L\left\{\int_0^\infty \frac{\cos(2\sqrt{xt})}{\sqrt{\pi x}}\ f\ (t)\ dt\right\}$$

حل.