به نام پروردگار مهربان

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

(پلی تکنیک تهران)

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد علوم کامپیوتر

بررسی مسائل جانمایی رقابتی تسهیلات

نگارش

محمد معین ایازی فر

استاد راهنما

دکتر علی محدث خراسانی

استاد مشاور

دکتر محمد ابراهیم شیری

دیماه ۱۳۸۵

بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی امیر کبیر
معاونت پژوهشی

فرم اطلاعات پایان نامه
کارشناسی ارشد و دکترا
(پلی تکنیک تهران)

تاریخ :
پیوست :

نام و نام خانوادگی : محمد معین ایازی فر **دانشجوی آزا د** ■ **بورسیه** ☐ **معادل** ☐

شمارهٔ دانشجوئی : **۸۳۱۱۳۱۶۳** **دانشکده :** ریاضی و علوم کامپیوتر **رشتهٔ تحصیلی :** علوم کامپیوتر

نام و نام خانوادگی استاد راهنما : دکتر علی محدث خراسانی

عنوان پایان نامه به فارسی: **بررسی مسائل جانمایی رقابتی تسهیلات**

عنوان پایان نامه به انگلیسی: **Study of Competitive Facility Location Problems**

نوع پروژه : **کارشناسی ارشد :** ■ **کاربردی** ■ **بنیادی** ☐ **توسعه ای** ☐ **نظری** ☐
دکتـــــری ☐

تاریخ شروع : ۱۳۸۳ **تاریخ خاتمه :۱۳۸۵** **تعداد واحد : ۳۲**

سازمان تأمین کننده اعتبار :

واژه های کلیدی به فارسی: هندسه محاسباتی، جانمایی رقابتی تسهیلات، بازی ورونوی، کوچکترین دایره محاط.

واژه های کلیدی به انگلیسی :. Competitive Facility Location, omnidirectional, Aerial, Voronoi Game

نظرها و پیشنهادها به منظور بهبود فعالیتهای پژوهشی دانشگاه :

استاد راهنما : دکتر علی محدث خراسانی

دانشجو : محمد معین ایازی فر

امضاء استاد راهنما : **تاریخ :**

نسخهٔ ۱ : معاونت پژوهشی
نسخهٔ ۲: کتابخانه و به انضمام دوجلد پایان نامه به منظور تسویه حساب با کتابخانه و مرکز اسناد و مدارک علمی

با تشکر و قدردانی از استاد راهنمای این پروژه جناب آقای دکتر علی محدث خراسانی که با راهنمایی ها و جهت دهی های ارزنده خود ، مرا در انجام این تحقیق یاری دادند.

با تشکر فراوان از آقایان امیر همایون اشرف زاده و دکتر بهرام صادقی که با همفکری مرا در نگارش این پروژه یاری دادند.

تقدیم به پدر و مادر خوبم که بی شک هر آنچه هستم از زحمات شبانه روزی آنهاست و تقدیم به همسر مهربانم که بدون حمایت و پشتیبانی های بی دریغ او این تحقیق ممکن نبود .

محمد معین ایازی فر

دیماه ۱۳۸۵

چکیده

در مسئله کلاسیک جانمایی تسهیلات[۱] ، یک مجموعه n نقطه‌ای در صفحه C درنظر میگیریم که بیانگر مشتریان مثلا مدارس، سوپرمارکت‌ها، ایستگاه پلیس یا مراکز توزیع هستند. هدف تعیین مکان نقطه x (نقطه دیگری در صفحه C) است که تسهیل (سرویس دهنده) باید در آنجا قرار بگیرد تا فاصله اقلیدسی دورترین مشتری از آن کمینه شود. این مسئله نهایتاً منجر به مسئله کوچکترین دیسک محاط[۲] خواهد شد. این معیار کمینه بیشینه[۳] به ویژه در جانمایی تسهیلات اضطراری نظیر ایستگاههای آتش‌نشانی، پلیس و بیمارستان‌ها که مینیمم کردن "بدترین زمان پاسخ" مطلوب است، کاربرد خواهد داشت.

جانمایی رقابتی[٤] تسهیلات به مسائلی اطلاق میشود که دو حریف قصد دارند به گونه ای سایت‌ها یا تسهیلات خود را جانمایی کنند که در یک بازار رقابتی برنده شوند. در واقع در مسائلی از این دست هر یک از حریفان میخواهند به نحوی مکان تسهیلات خود را در عرصه بازار[٥] بیابند که با احاطه بر مساحت بیشتری از بازار نسبت به حریف دیگر بتوانند سود بیشتری از آن بازار ببرند.

در این پایان نامه استراتژی های مختلف برای مسئله جانمایی رقابتی تسهیلات در حالتهای یک بعدی، دو بعدی یک دوری و گرافهای k-تایی بررسی خواهد شد. همچنین یک مدل جدید که در آن مشتریان مجموعه ای از نقاط هستند، ارائه میگردد.

- **واژه های کلیدی**

هندسه محاسباتی، جانمایی رقابتی تسهیلات، بازی ورونوی، کوچکترین دایره محاط.

---

[۱] Facility Location

[۲] Minimal Enclosing Circle

[۳] Minimax

[٤] Competitive

[٥] Market Area

فهرست مطالب

۱- **فصل اول مقدمه**..... ۱

۱-۱- مقدمه ۱

۱-۲- ساختار پایان نامه..... ۳

۲- **فصل دوم تعاریف اولیه و مفاهیم مرتبط**..... ٤

۲-۱- دیاگرام ورونوي ٤

۲-۱-۱- مقدمه ٤

۲-۱-۲- چند مثال از کاربردها..... ٥

۲-۱-۳- تعاریف و ویژگي هاي اساسي..... ۸

۲-۲- مفاهیم اولیه جانمایي تسهیلات ۱٤

۲-۲-۱- مقدمه..... ۱٤

۲-۲-۲- انواع فواصل در مسائل جانمایي تسهیلات..... ۱٥

۲-۲-۳- انواع مسائل جانمایي تسهیلات... ..... ۱٥

۲-۲-٤- کوچکترین دایره محاط ۱٦

۲-۲-٥- مسئله بزرگترین دایره تهي..... ۲۷

۲-۲-٦- مسئله بزرگترین حلقه تهي ۲۸

۳- **فصل سوم جانمایي رفابتي تسهیلات در حالت یک بعدي**..... ۳۰

۳-۱- مقدمه ۳۰

۳-۲- معرفي بازي ۳۲
۳-۲-۱- استراتژي نقاط كليدي ۳۵
۳-۳- بازي در حالت دايره ۳۷
۳-۳-۱- استراتژي برد روي دايره ۳۸
۳-٤- بازي در حالت پاره خط ٤۰
۳-٤-۱- استراتژي برد روي خط ٤۱
۳-۵- دفاع سفيد ٤٤
۳-٦- نتيجه گيري ٤۵
٤- **فصل چهارم جانمايي رقابتي تسهيلات در حالت دو بعدي تك دوري** ٤۷
٤-۱- مقدمه ٤۷
٤-۲- پيش زمينه ۵۰
٤-۳- كاهش مسأله به شبكه نقاط شطرنجي ۵۱
٤-٤- نسبتهاي بحراني سطح ۵٤
٤-۵- نتيجة پيچيدگي ٦٤
٤-٦- نتيجه گيري ٦۹
۵- **فصل پنجم جانمايي رقابتي تسهيلات در گراف و پيچيدگي آن** ۷۱
۵-۱- مقدمه ۷۱
۵-۲- شرح مسأله ۷۳
۵-۳- بازي ورونوي گسسته روي يك درخت كامل K- تايي ۷۵
۵-۳-۱- بازي ورونوي گسسته روي درخت كاملk تايي فرد بزرگ ۷٦
۵-۳-۲- بازي گسسته ورونوي روي يك درخت كامل بزرگ k-تايي زوج ۸۳
۵-٤- $NP\text{-}hard$ بودن براي گراف‌هاي عمومي ۸٤
٦- **فصل ششم جانمايي رقابتي آنتن** ۸۸
٦-۱- مقدمه ۸۸
٦-۲- جانمايي رقابتي آنتن در حالت يک بعدي... ..... ۸۹
٦-۲-۱- طرح مسئله ۸۹
٦-۲-۲- حل مساله ۸۹

٦-٣- جانمايي رقابتي آنتن در حالت دو بعدي ٩٥
٦-٣-١- طرح مسئله..... ٩٥
٦-٣-٢- حل مسئله..... ٩٥
٦-٤- جانمايي كمينه آنتن هاي پوشا در حالت يک بعدي... .....١٠١
٦-٥- جانمايي كمينه آنتن هاي پوشا در حالت دو بعدي.....١٠٢
٦-٥-١- مسئله k-گروه بندي كمينه ١٠٣
٦-٥-٢- مسئله پوشش ديسک هندسي كمينه.....١٠٤
٧- **فصل هفتم نتيجه گيري**.....١٠٥
٨- **واژه نامه**..... ١٠٧
٩- **منابع و مراجع** ١١٥

فهرست اشکال

شکل ۲-۱ x به B نزدیکتر است تا A ٦

شکل ۲-۲ دو سایت: $|p_1x|=|p_2x|$ ۹

شکل ۲-۳ عمود منصف ها در مرکز با هم تقاطع میکنند ۱۰

شکل ۲-٤ دیاگرام ورونوي چهار نقطه که روي محیط یک دایره قرار میگیرند ۱۱

شکل ۲-۵ دیاگرام ورونوي چهار نقطه که روي محیط یک دایره قرار نمیگیرند ۱۲

شکل ۲-٦ دیاگرام ورونوي براي ۲۰ نقطه ۱۲

شکل ۲-۷ مثلث سازي دلونوي براي نقاط موجود در شکل قبل ۱۳

شکل ۲-۸ نمونه اي از کوچکترین دایره محاط ۱۷

شکل ۲-۹ یافتن کوچکترین دایره محاط از طریق رویه محدب نقاط ۱۸

شکل ۲-۱۰ مرحله اول الگوریتم الزینگا ۱۹

شکل ۲-۱۱ مرحله دوم الگوریتم الزینگا ۲۰

شکل ۲-۱۲ مرحله سوم الگوریتم الزینگا ۲۰

شکل ۲-۱۳ مرحله چهارم a الگوریتم الزینگا ۲۱

شکل ۲-۱٤ مرحله چهارم b الگوریتم الزینگا ۲۲

شکل ۲-۱۵ اولین مرحله الگوریتم مگیدو ۲۳

شکل ۲-۱٦ دومین مرحله الگوریتم مگیدو ۲٤

شکل ۲-۱۷ سومین مرحله الگوریتم مگیدو ۲۵

شکل ۲-۱۸ چهارمین مرحله الگوریتم مگیدو ۲۵
شکل ۲-۱۹ پنجمین مرحله الگوریتم مگیدو..... ۲۶
شکل ۲-۲۰ بزرگترین دایره تهي..... ۲۸
شکل ۲-۲۱ بزرگترین حلقه تهي ۲۹
شکل ۳-۱ وقتي $n=4$ است چهار نقطه کلیدي وجود دارد..... ۳۷
شکل ۳-۲ چهار نقطه براي بازي سیاه و سفید ۳۸
شکل ۳-۳ چهار نقطه براي بازي سیاه و سفید وجود دارد، شماره گذاري به ترتیب وقوع..... ۴۱
شکل ٤-۱ ناحیه بازي با دو نوار ۵۴
شکل ٤-۲ بازیکن سیاه بیش از یک ربع *(a)* بیش از یک هشتم *(b)* سطح بازي راگرفته است ... ۵۷
شکل ٤-۳ بازیکن سفید حداقل سه نقطه را روي یک خط قرار داده است. ۵۹
شکل٤-٤ نمایش هندسي گراف $G1$ براي نمونه $3SAT$ *Planar*..... ۶۶
شکل ٤-۵ یک تصویر سمبلیک از نمایش کلي ۶۷
شکل ٤-۶ اجزاء ناحیه (چپ) اجزاء عبارت (راست). ۶۸
شکل ۵-۱ یک نمونه از بازي ورونوي در حالت $VG(G,3)$ ۷۴
شکل ۵-۲ نشانه گذاري در میدان بازي ۷۷
شکل ۵-۳ الگوریتم ۲: استراتژي سطح کلیدي ۷۷
شکل ۵-٤ بازیکن سیاه در سطحي بزرگتر از h بازي میکند ۸۰
شکل ۵-۵ نشانه گذاري در حالت *(a)* در استراتژي سطح کلیدي ۸۱
شکل ۵-۶ نشانه گذاري در حالت *(b)* در استراتژي سطح کلیدي ۸۳
شکل ۵-۷ کاهش از $F=(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)$ ۸۶
شکل ۶-۱ جانمایي آنتن و نقاط تحت پوشش..... ۹۰
شکل ۶-۲ دایره اي با یک نقطه روي محیط سمت چپ مرکزش..... ۹۱
شکل ۶-۳ چهار ناحیه تفکیک شده روي خط ۹۳
شکل ۶-٤ آنتنهایي که حذف و بروز میشوند..... ۹۴
شکل ۶-۵ دایره اي با دو نقطه روي محیطش ۹۶
شکل ۶-۶ دایره هایي به شعاع R که از دو نقطه میگذرند. ۹۶
شکل ۶-۷ دایره هایي به شعاع R ، $2R$ ، $3R$ و به مرکز A_i ۹۸

شکل ٦-٨ پوشش $R_2 \cup R_1$ با ١٥ دايره به شعاع R ٩٩
شکل ٦-٩ روش حريصانه در حالت يک بعدي ١٠٠
شکل ٦-١٠ روش حريصانه در حالت دو بعدي ١٠٠
شکل ٦- ١١ جانمايي کمينه آنتن در حالت يک بعدي ١٠١
شکل ٦-١٢ سه نقطه به فاصله R ١٠٣

فصل اول

۱- مقدمه

۱-۱- مقدمه

يكي از موارد بسيار مهم براي تعيين موفقيت يا شكست يك سازمان، مكان ميباشد. بطوريكه تصميم گيري درست در باره آن ميتواند باعث پيروزي شده و انتخاب نادرست آن باعث شكست سازمان شود، به مسائلي كه هدفشان يافتن مكاني براي جانمايي يک تسهيل براي سرويس دادن است مسائل جانمايي تسهيلات[۱] گفته ميشود. معمولا اين تسهيلات به شكلهاي مختلف قصد سرويس دادن به مجموعه اي از نقاط و يا يک ناحيه[۲] را دارند.

عاديترين روش تعيين ارزش يك مكان معين براي يك تسهيل فاصلة آن از منطقه و محل مشتريان ميباشد. سناريوهاي متعدد هندسي در اين زمينه بررسي شده اند.

مسأله كلاسيك جانمايي تسهيلات[۱] به دنبال مكان بهينه براي يك موجوديت جديد (ايستگاه پليس، سوپرماركت، بيمارستان، جايگاه توزيع و ...) با توجه به مجموعهاي معين از مشتريان ميگردد. معمولاً تابعي كه بايد بهينه شود ماكزيمم فاصله تسهيل جديد از مشتريان است كه نهايتاً منجر به مسأله

---

[۱] *Facility Location*

[۲] از اين به بعد به مجموعه سرويس گيرنده، مجموعه مشتريان گفته ميشود

كوچكترين ديسك محاط خواهد شد. اين مسئله توسط مگيدو[1] [۲]، ول[2] [۳] ، آرونو[3] [٤] و همكاران مطالعه شده است و در فصل آينده بيشتر بررسي خواهد شد.

در مسائل جديدتر كه به نام جانمايي رقابتي تسهيلات معروف هستند دو حريف با هم به رقابت يا بازي مي پردازند ، هدف مشخص در نظريه جانمايي رقابتي تسهيلات بررسي و مطالعه استراتژي‌هاي برد براي دو حريف يا بازيكن است. در اين زمينه مي‌توان به مطالعات توبين[4]، فريز[5] و ميلر[6] [۵] اسلت[7] ، لاپورته[8] [٦] و اسلت ، لاپورته و تيسه[9] [۷] اشاره كرد.

غالبا رقابت بر سر احاطه بر عرصه اي وسيعتر است كه پارامتر نزديكي مشخص كننده آن است. از آنجايي كه دياگرام حاصل در اين گونه مسائل بسيار مشابه به دياگرام ورونوي[10] است اين دسته از مسائل به بازي ورونوي[11] نيز معروف هستند. يك مدل هندسي ساده براي تعيين ارزش يك مكان در بازي ورونوي استفاده شده كه در آهن[12] و همكاران [۸] (با در نظر گرفتن سناريوي دو بعدي به عنوان عادي‌ترين سناريو) ارائه شده و براي سناريوي يك بعدي حل شده است. چه اونگ[13] و همكاران [۹] براي حالت‌هاي دو بعدي و بيشتر، جواب‌هايي ارائه داده اند و همچنين فكت و ميجر حالت دو بعدي يک دوري را مورد مطالعه قرار داده اند [۱۰] .

---

[1] *Megiddo*
[2] *Wel*
[3] *Aronov*
[4] *Tobin*
[5] *Frieze*
[6] *Miller*
[7] *Eeselt*
[8] *Laporte*
[9] *Thisse*
[10] *Voronoi Diagram*
[11] *Voronoi Game*
[12] *Ahn*
[13] *Cheong*

۱-۲- ساختار پايان نامه

در اين پايان نامه قصد داريم كارهايي كه اخيرا در زمينه جانمايي رقابتي تسهيلات انجام شده است را بررسي كرده و در پايان نوع خاصي از اين مسائل را معرفي كرده و سپس آنرا مورد تجزيه و تحليل قرار دهيم.

در فصل آينده به تعاريف اوليه و مفاهيم مرتبط ميپردازيم كه عبارتند از مطالعه بيشتر مسئله كلاسيک كوچكترين دايره محاط و ارائه چندين الگوريتم براي يافتن اين دايره و همچنين تعاريف مربوط به دياگرام ورونوي كه موضوع بحث فصلهاي آينده خواهد بود.

در فصل سوم جانمايي رقابتي در حالت يک بعدي روي خط و دايره معرفي شده و يک استراتژي برد براي بازيكن دوم ارائه ميشود، پيروي از اين استراتژي تضمين ميكند بازيكني كه ابتدا بازي را شروع نكرده برنده ميشود [۸] .

فصل چهارم همين مسئله را در حالت دو بعدي مورد كنكاش قرار ميدهد اما با اعمال اين محدوديت كه بازي تنها در يک دور[۱] انجام شود، يعني ابتدا بازيكن اول تمامي تسهيلاتش را جانمايي ميكند و سپس بازيكن دوم بازي ميكند ، در اين حالت نيز استراتژي برد براي بازيكن دوم بررسي شده است [۱۰].

فصل پنجم در نگاهي متفاوت مسئله جانمايي رقابتي تسهيلات را روي گرافهاي K-تايي بررسي نموده، ولي اين بار يک استراتژي برد براي بازيكن شروع كننده ارائه كرده است [۱۱].

در فصل ششم جانمايي رقابتي تسهيلات را با مدلي متفاوت بررسي كرده ايم، در اين مدل مشتريان نقاط گسسته اي هستند كه در مكانهاي مختلف قرار گرفته اند و بازيكنان قصد دارند تا با جانمايي آنتن هايي از نوع چندسويه[۲] مشتريان بيشتري را تحت پوشش قرار دهند، بنابراين در پايان حريفي كه مشتريان بيشتري را پوشش داده است برنده بازي خواهد بود.

فصل ششم نيز نتيجه گيري و كارهاي آتي و مسائل بازي كه در اين زمينه وجود دارند را معرفي كرده است.

---

[۱] *Round*

[۲] *omnidirectional*

فصل دوم

۲- تعاريف اوليه و مفاهيم مرتبط

۲-۱- دياگرام ورونوي

۲-۱-۱- مقدمه

در اين فصل، يک ساختار هندسي که دياگرام ورونوي نام دارد را مورد بررسي و مطالعه قرار خواهيم داد. در واقع دياگرام ورونوي تمام مسائل مربوط به همجواري مجموعه‌اي از نقاط را در خود جاي مي‌دهد. قصد داريم جزئيات بيشتري درباره همجواري نقاط بدانيم.

مثلاً چند نقطه به چه نقطه‌اي از همه نزديك تر است، کدام دورترين است و مسائلي از اين دست. اين مفاهيم بيش از صد سال عمر دارند و در سال ۱۸۵۰ توسط ديريچلت[۱] و در سال ۱۹۰۸ در مقاله‌اي توسط ورونوي مطرح شده‌اند[۱۲].

براي مطرح کردن موضوع ابتدا بحث را با تعدادي مثال شروع مي‌کنيم و سپس به جزئيات ساختار کامل و غني دياگرام ورونوي مي‌پردازيم. آشنائي با اين جزئيات پيش از مطرح کردن الگوريتم‌ها و

---

[۱] *Dirichlet*

استراتژي هايي كه در فصلهاي آينده آمده اند ضروري است. نهايتاً، ارتباط زيباي بين دياگرامهاي ورونوي و چند وجهي‌هاي محدب را نشان خواهيم داد.

۲-۱-۲- چند مثال از كاربردها

۲-۱-۲-۱- برج‌هاي مراقبت آتش‌نشاني

جنگلي بزرگ را در نظر بگيريد كه تعدادي برج مراقبت آتش‌نشاني را در خود جاي داده است. هر جنگلبان مسوول شناسايي بخشهايي از آتش است كه به برج او نزديكتر از برجهاي ديگر است. مجموعه تمام درخت‌هايي كه يك جنگل بان مشخص مسوول آنها ميباشد يك «چندضلعي ورونوي[۱]» مربوط به آن برج را تشكيل مي‌دهند. دياگرام ورونوي خطوط بين مناطق مسووليت جنگل بانان را ترسيم مي‌كند، البته نقاطي در جنگل وجود دارند كه نسبت به دو يا تعداد بيشتري از برج‌ها داراي فاصله يكساني هستند، (شكل ۲-٦ به درك حالت كمك مي‌كند).

۲-۱-۲-۲- برج‌ها در آتش

موقعيت قبلي را در نظر بگيريد به طوريكه همزمان تمام برج‌هاي جنگل بانان آتش مي‌گيرد و جنگل با آهنگي يكنواخت مي‌سوزد. آتش به صورت دايره‌هايي به مراكز هر برج پخش مي‌شود. نقاطي كه در آنها آتش به دليل رسيدن به مناطقي كه درختانش قبلاً سوخته‌اند فرونشانده مي‌شود، دقيقاً نقاط روي دياگرام ورونوي هستند.

۲-۱-۲-۳- دسته‌بندي نزديك‌ترين همسايه[۲]

تكنيكي كه غالباً در موضوع شناسايي الگو[۳] مورد استفاده قرار مي‌گيرد، تصوير كردن مجموعه اي از اشياء هدف به يك فضاي خصيصه[٤] از طريق كاهش اشيا به نقاطي است كه وابستگي ها و مختصاتش،

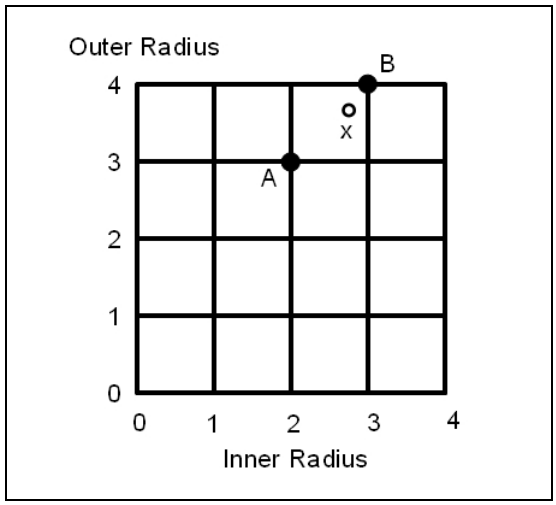
---

[۱] *Voronoi polygon*
[۲] *Nearest Neighbor Clustering*
[۳] *pattern recognition*
[٤] *Feature*

اندازه‌گيري‌هاي خصيصه هستند. هويت يك شيء كه معلوم نيست مربوط به كدام شيء هدف است، از طريق تخصيص به نزديك‌ترين شيء هدف در فضاي خصيصه تعيين مي‌شود.

يك مثال، اين بحث را واضح‌تر مي‌كند. بسته‌اي را در نظر بگيريد كه شامل ۲ نوع مهره A و B است. A داراي شعاع داخلي و خارجي به ترتيب ۲ و ۳ سانتي‌متر و B داراي شعاع داخلي و خارجي به ترتيب ۳ و ٤ سانتي‌متر است. فضاي خصيصه يك ربع دايره مثبت[1] در سطح اقليدسي دو بعدي است. A به نقطه (۳و۲) و B به نقطه (٤و۳) تصوير مي‌شود. فرض كنيد كه يك سيستم نظارتي روي يك عدد از مهره‌ها به نام x تمركز كرده و شعاع داخلي و خارجي را ۲/۸ و ۳/۷ سانتي‌متر اندازه‌گيري مي‌كند. با توجه به اينكه در اندازه‌گيري خطاهايي وجود دارد و تنها دو نوع A و B مهره در بسته وجود دارد، گمان بيشتري مي‌رود كه x متعلق به نوع B باشد. زيرا فاصله آن تا B در فضاي خصيصه ۰/۳٦ است درحاليكه فاصله آن تا A ۱/۰٦ مي‌باشد. شكل ۲-۱ را ببينيد. به كلام ديگر، نزديك‌ترين همسايه x ، B است، زيرا x در چندضلعي ورونوي B قرار گرفته است.

اگر انواع زيادي از مهره وجود داشت، عمل تعيين هويت براي x، شامل تعيين اين موضوع است كه x در چندضلعي ورونوي كدام نقطه هدف (نوع مهره) قرار مي‌گيرد.



شكل ۲-۱ x به B نزديكتر است تا A

[1] مثبت است به دليل اينكه شعاع نمي‌تواند منفي باشد

۲-۱-۲-٤- جانمايي تسهيلات

اين موضوع در پايان نامه مورد تمركز قرار خواهد گرفت. فرض كنيد كه مايليد يك فروشگاه مواد غذايي جديد، در ناحيه‌اي كه هم اكنون تعداد زيادي فروشگاه در حال رقابت وجود دارد، تأسيس كنيد. با فرض اينكه چگالي جمعيت يكنواخت است، فروشگاه جديد كجا بايد تأسيس شود كه فروش خود را بيشينه كند. يک روش طبيعي براي برآورده كردن اين محدوديت مبهم، تأسيس فروشگاه جديد در دورترين جاي ممكن نسبت به فروشگاه‌هاي موجود است. حتي اين موضوع نيز تا حدي مبهم است. به طور دقيقتر، بايد جايي را انتخاب كنيم كه فاصلة آن از نزديك ترين فروشگاه، تا حد امكان زياد باشد. اين موضوع، برابر با جاي دادن فروشگاه جديد در مركز بزرگترين دايره تهي[۱] ـ بزرگترين دايره‌اي كه داخل آن هيچ فروشگاه ديگري وجود ندارد ـ مي‌باشد. بنابراين، فاصله تا نزديك‌ترين فروشگاه، برابر شعاع اين دايره تهي است. نشان داده ميشود كه مركز بزرگترين دايره تهي روي دياگرام ورونوي قرار خواهد گرفت.

۲-۱-۲-۵- برنامه‌ريزي مسير[۲]

محيطي شلوغ[۳] را در نظر بگيريد كه رباتي[٤] در آن بايد براي يك مسير برنامه‌ريزي كند. براي كمينه كردن ريسك تصادف، ربات بايد از تمامي موانع تا حد امكان دور بماند. اگر سوال خود را محدود به دو بعد كنيم و اگر ربات دايره شكل باشد، آنگاه ربات در تمامي زمان‌ها بايد روي دياگرام ورونوي موانع قرار بگيرد. اگر موانع نقطه باشند (مثلاً تيرك‌هاي باريك)، مسئله حالت ترسيمي دياگرام ورونوي خواهد بود. اگر موانع چندضلعي يا شكل‌هاي ديگر باشند، آنگاه نسخه تعميم يافته دياگرام ورونوي نقطه‌اي، مسير مناسب را تعيين خواهد كرد.

---

۱ *Maximum Empty Circle*
۲ *Path Planning*
۳ *Cluttered*
٤ *Robot*

۲-۱-۲-۶- بلورشناسي[۱]

فرض كنيد تعدادي هسته كريستال با سرعت يكنواخت و ثابت رشد مي‌كنند. ظاهر كريستال، هنگامي كه رشد بيشتر ممكن نباشد، چگونه خواهد بود ؟ واضح است كه اين مساله همانند مساله آتش در جنگل است و هر هسته به صورت يك چندضلعي ورونوي رشد مي‌كند و با نواحي هسته‌هاي مجاور در طول دياگرام ورونوي برخورد خواهد كرد. از دياگرام‌هاي ورونوي در شبيه‌سازي رشد كريستال‌ها استفاده زياد شده است.

ليست كاربردهاي دياگرام ورونوي مي‌تواند همچنان ادامه داشته باشد براي ديدن مثالهاي بيشتر به [۱۲] مراجع كنيد، اما اكنون هنگام معرفي رسمي اين دياگرام است.

۲-۱-۳- تعاريف و ويژگي هاي اساسي

$P= \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ را مجموعه اي از نقاط در يك ناحيه دوبعدي اقليدسي فرض كنيد كه سايت ناميده مي‌شوند. سطح را با تخصيص هر نقطه روي سطح به نزديكترين سايت، تقسيم بندي كنيد. تمامي نقاطي كه به p_i تخصيص يافته‌اند، ناحية ورونوي $V(p_i)$[۲] را تشكيل مي‌دهند. $V(p_i)$ شامل تمامي نقاطي است كه فاصله‌شان از p_i از فاصله‌شان از هر سايت ديگري كمتر است.

$$V(p_i) = \left\{ x : |p_i - x| \le |p_j - x| \ , \forall j \ne i \right\} .$$

توجه كنيد اين مجموعه را بسته تعريف كرده‌ايم. بعضي از نقاط نزديك‌ترين سايت يكتا و منحصر به فردي (يا نزديك‌ترين همسايه) ندارند. تمامي نقاطي كه بيش از يك نزديك‌ترين همسايه دارند، دياگرام ورونوي $\mathcal{V}(p)$ را براي مجموعة سايت‌ها تشكيل مي‌دهند.

ميتوان دياگرام‌هاي ورونوي را براي مجموعه‌هايي از اشياء كه حالت كلي‌تري از نقطه هستند، تشريح كرد. پيش از پرداختن به جزئيات ويژگي‌هاي دياگرام‌ها براي تعداد نقاط زياد، نگاهي به دياگرام‌هايي با سايت‌هاي كم و محدود خواهيم داشت.

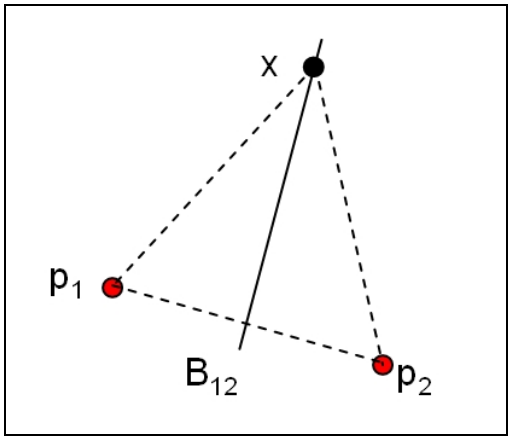
---

[۱] *crystallography*

[۲] چند ضلعی ورونوی هم گفته می‌شود.

- **دو سايت**

دو سايت p_2 و p_1 را در نظر بگيريد $B(p_1,p_2) = B_{12}$ عمود منصف[1] پاره‌خط $p_1 p_2$ باشد. آنگاه هر نقطه x روي B_{12} داراي فاصلة مساوي از p_2 و p_1 است. اين موضوع مي‌تواند توسط رسم مثلث (p_1,p_2,x) در شكل ۲-۲ ديده شود. با نظريه ضلع ـ زاويه ـ ضلع برابري مثلث‌هاي اقليدس، $|p_1x|=|p_2x|$ خواهد بود.



شكل ۲-۲ دو سايت: $|p_1x|=|p_2x|$

- **سه سايت**

براي سه سايت، واضح است كه به غير از مثلث (p_1 ,p_2 ,p_3)، دياگرام شامل عمود منصف‌هاي B_{12} ، B_{23} و B_{31} نيز هست. نكته‌اي كه واضح نيست، حالتي است كه در مجاورت[2] مثلث روي مي‌دهد. باز هم از قوانين اقليدس مي‌دانيم كه عمود منصف‌هاي ۳ ضلع مثلث از يك نقطه عبور مي‌كنند كه مركز دايره يكتايي است كه از سه رأس مثلث عبور مي‌كند. پس دياگرام ورونوي سه نقطه در شكل ۲-۳ قابل رويت خواهد بود. (هرچند مركز يك مثلث هميشه الزاماً داخل مثلث نيست.)

[1] *Bisector*
[2] *Vicinity*