دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی

دانشکده علوم پایه

یک روش یکنواخت برای حل یک دسته ازمعادلات انتگرال دیفرانسیل غیر خطی مرتبه دوم

نگارش

محسن ملکی

استاد راهنما:دکتر حمید مسگرانی

استاد مشاور:دکتر رضا ملاپور اصل

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی کاربردی

مهرماه۹۲

بسم الله الرحمن الرحیم

بسمه تعالی

دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی

مدیریت تحصیلات تکمیلی

تعهدنامه اصالت اثر

اینجانب محسن ملکی متعهد می شوم که مطالب مندرج در این پایان نامه حاصل کار پژوهشی اینجانب است و دستاوردهای پژوهشی دیگران که در این پژوهش از آن ها استفاده شده است، مطابق مقررات ارجاع و در فهرست منابع و مأخذ ذکر گردیده است .این پایان نامه/رساله قبلاً برای احراز هیچ مدرک هم سطح یا بالاتر ارایه نشده است .در صورت اثبات تخلف (در هر زمان) مدرک تحصیلی صادر شده توسط دانشگاه از اعتبار ساقط خواهد شد.

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی می باشد.

نام ونام خانوادگی دانشجو

امضا

تهران – لویزان – کد پستی ۱۶۷۸۸ – صندوق پستی ۱۶۳-۱۶۷۸۵ تلفن ۹-۲۲۹۷۰۰۶۰ (داخلی ۲۳۴۷) نمابر ۲۲۹۷۰۰۱۱ پست الکترونیکی

sru@sru.ac.ir

تأییدیه هیئت داوران

تقدیم به:

پدر و مادر عزیزم

و

همه کسانی که زیر چتر مهربانی‌شان جای دارم

تقدیر و تشکر:

اینک که به فضل و لطف خداوند توفیق اتمام این رساله نصیبم شد، سزاوار است مراتب بندگی خود را در پیشگاه خداوند اعلام و اقرار نمایم. امید است که مقبول ذات احدیت بیفتد و با درود بر وجود نازنین پیامبر رحمت، نزول باران رحمت پروردگار را خواستارم.

نگارنده بر خود لازم و واجب می داند که از زحمات بی دریغ، تلاش‌های بی وقفه و راهنمایی‌های ارزشمند اساتید گرامی آقایان دکتر حمید مسگرانی و دکتر رضا ملاپور اصل در راستای انجام این پروژه در طول این مدت تشکر و قدردانی نماید.

از آقای دکتر نیک‌آزاد (داور خارجی), خانم دکتر امینی‌فر (داور داخلی) نیز به جهت خواندن این رساله و پیشنهادات ارزنده‌شان تشکر می‌کنم.

چکیده

با نگاهی گذرا به جهان اطراف خود می توانیم انبوهی از مسایل و پدیده هایی را مشاهده کنیم که به گونه ای به مسایل معادلات انتگرال – دیفرانسیل مربوط می باشند. معادلات انتگرال – دیفرانسیل غیرخطی در زمینه های مختلفی از جمله دینامیک سیالات، فیزیک پلاسما، زیست شناسی و شیمی استفاده می شود. در عمل تحلیلی برای چنین معادلاتی وجود نداشته و یا حصول آن بسیار سخت است. بنابراین در سال‌های اخیر، تکنیک های مختلف عددی برای دستیابی به جواب این گونه معادلات پیشنهاد شده است. این روش ها به دنبال حصول پاسخ تقریبی برای معادلات انتگرال – دیفرانسیل غیرخطی هستند. بعضی از این روش‌ها عبارتند از: روش آدومیان، روش هوموتوپی، روش اسپلاین، روش چند جمله ای های تیلور، ترکیب تبدیل لاپلاس، روش آدومیان و روش پاسخ حد بالا و پایین. در این پایان نامه، از یک روش کارآمد بر پایه پاسخ های حد بالا و پایین در به‌وجود آوردن دو دنباله از پاسخ های حد بالای در حال کم شدن و حد پایین در حال زیاد شدن است که به پاسخ معادله ها همگراست، استفاده می‌کنیم. در فصل اول، مقدماتی از آنالیز ریاضی را بیان کرده و به معرفی برخی از چند جمله ای ها مورد استفاده می پردازیم. در فصل دوم، روش های انتگرال گیری عددی را معرفی کرده و ویژگی های آنها را مطرح کرده واشکالات عمده آنها را بررسی می کنیم. در فصل سوم، مقدماتی از معادلات انتگرال و معادلات انتگرال دیفرانسیل را بیان می‌کنیم، به انواع این معادلات می پردازیم و روش‌های حل آنها از جمله: روش‌های تصویری و هم مکانی و گالرکین را بیان می کنیم. در فصل چهارم، پاسخ های حد بالا و همچنین مراحل در حال افزایش پاسخ های حد پایین برای یک دسته از معادلات بیضوی غیر خطی ارایه شده است. یکنواختی هر دو مرحله اثبات شده است و بر پایه پاسخ های حد بالا یک الگوریتم برای حل معادلات دیفرانسیل خطی ارایه شده است. علاوه بر این یک الگوریتم کارآمد بر پایه یک روش یکنواخت برای حل یک دسته از معادلات انتگرال دیفرانسیل غیرخطی از مرتبه ۲ و قضیه هایی که نشان از وجود چنین دنباله هایی را می کنند ارایه شده است. در فصل پنجم، نتایج عددی الگوریتم جدید فراهم شده است.

کلید واژه ها: انتگرال دیفرانسیل غیر خطی، اصل ماکزیمم، معادلات انتگرال غیرخطی، روش یکنوا، جواب‌های بالا و پایین

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فهرست جداول

عنوان **صفحه**

فهرست شکل‌ها

عنوان **صفحه**

فصل اول:

مقدماتی از آنالیز ریاضی و معرفی برخی از چند جمله ای ها

۱-۱- تعاریف و قضایای مقدماتی

این فصل دو بخش است. در بخش اول مقدماتی از آنالیز ریاضی را بیان می کنیم که شامل تعاریف اولیه و قضایای پایه ای مورد نیاز در فصل های آینده است. بخش دوم مشتمل بر مقدماتی از چند جمله ای های تیلور[۱]، لژاندر[۲]، چبیشف[۳] و برنشتاین[۴] است.

۱-۲- مقدماتی از آنالیز ریاضی

تعریف ۱-۲-۱ (تابع تحلیلی). تابع f را در نقطه ی $z_0 \in C$ تحلیلی گوییم هر گاه مشتق f در یک همسایگی از z_0 وجود داشته باشد. اگر f در هر نقطه از دامنه ی D تحلیلی باشد، گوییم f در دامنه ی D تحلیلی است.

$D=C$ باشد آنگاه f را یک تابع تام[۵] می نامیم.

تعریف ۱-۲-۲ (نقطه منفرد[۶]). اگر تابع f در نقطه ی z_0 تحلیلی نباشد ولی در هر نقطه از هر همسایگی z_0 تحلیلی باشد آنگاه z_0 نقطه ای منفرد تابع f می شود.

تعریف ۱-۲-۳ (فضای باناخ[۷]). X یک فضای باناخ است هر گاه به ازای هر دنباله ی کوشی مانند $\{x_n\}$ در X ، عنصری مانند $x \in X$ وجود داشته باشد به طوری که $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0$.

تعریف ۱-۲-۴ (فضای $L^p[a,b]$) فرض کنید $p \in (0,\infty)$، گردایه ی تمام توابع f حقیقی مدار در $[a, b]$ را فضای $L^p[a,b]$ می نامند هر گاه $|f|^p$، انتگرال پذیر باشد.

هم چنین نرم این فضا را با رابطه ی $\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)^p dx|\right)^{\frac{1}{p}}$ تعریف می کنیم و آن را $L^p -$نرم f می نامند.

تعریف ۱-۲-۵ (فضای هیلبرت[۸]). هر فضای با حاصل ضرب داخلی[۹] را که نسبت به نرم القا شده که به وسیله ی حاصل ضرب داخلی خود کامل باشد یک فضای هیلبرت می نامیم.

در این پایان نامه فضای هیلبرت مورد استفاده $L^2\ [a, b]$ است.

$$L^2[a,b] = \left\{ x(t) \middle| \int_a^b |x(t)|^2 dt < \infty \right\},$$

1. Taylor
2. Lagrange
3. Chebyshev
4. Bernstein
5. Entire Function
6. Singular Point
7. Banach Space
8. Hilbert Space
9. Inner Product

که در آن حاصل ضرب داخلی ذیل مورد استفاده قرار می گیرد:

$$(x,y)=\int_a^b x(t)\,\overline{y(t)}\,dt.$$

فضای $L^2_w[a,b]$ نیز فضایی است که مربع قدر مطلق توابع نسبت به تابع وزن $w(x)=(1-x^2)^{-\frac{1}{4}}$ انتگرال پذیر است یعنی:

$$L_w^2[a,b]=\left\{x(t)\left|\int_a^b w(x)|x(t)|^2\,dt<\infty\right.\right\}$$

تعریف ۱-۲-۶ (حاصل ضرب داخلی وزن دار). حاصل ضرب داخلی دو تابع f و g با تابع وزن $w(x)>0$ در بازه ی $[a, b]$ به صورت ذیل تعریف می شود:

$$(f,g)_w=\int_a^b f(x)g(x)\,w(x)\,dx$$

تعریف ۱-۲-۷ (توابع متعامد). هر گاه حاصل ضرب داخلی دو تابع نسبت به تابع وزن $w(x)$ برابر صفر شود، دو تابع را عمود بر هم یا متعامد می نامند.

در تعریف فوق اگر $w(x)=1$ باشد آنگاه f و g را متعامد ساده می گویند.

دنباله ی متعامد $\{h_n\}$ را کامل گویند، اگر برای هر n، حاصل ضرب داخلی $(h_n,x)=0$ نتیجه دهد که $x=0$.

تعریف ۱-۲-۸ (نرم). ریشه ی دوم حاصل ضرب داخلی f در خودش را نرم f می گوییم و با $\|f\|$ نشان می دهیم:

تعریف ۱-۲-۹ (دنباله ی متعامد کامل).

$$\|f\|_2=(f,f)=\int_a^b |f|^2(x)\,w(x)\,dx$$

هر گاه $\|f\|_2=1$ باشد، تابع را نرمال شده می گوییم.

تعریف ۱-۲-۱۰ (تابع گاما[1]). به ازای هر $x>0$، تابع

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt;\Gamma:(0,\infty)\to R \qquad (1\text{-}2\text{-}1)$$

را تابع گاما می نامیم.

تعریف ۱-۲-۱۱ (تابع بتا[2]). تابع

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt;B:(0,\infty)\times(0,\infty)\to R \qquad (2\text{-}2\text{-}1)$$

را تابع بتا می نامیم.

---
[1] . Gamma
[2] . Beta

توابع گاما و بتا دارای ویژگی های ذیل هستند:

الف) به ازای هر $x > ۰$ داریم، $\Gamma(x+۱) = x\Gamma(x)$. در حالت خاص، به ازای هر عدد صحیح $n \geq ۰$، $\Gamma(n+۱) = n!$،

ب) به ازای هر $x > ۰$، $\Gamma(x) > ۰$،

پ) $\Gamma(۱) = ۱$

ت) با فرض $p > -۱$، $q > -۱$ و $b > a$

$$\int_a^b (x-a)^p (b-x)^q dx = (b-a)^{p+q+۱} B(p+۱, q+۱) \qquad (۱-۲-۳)$$

ث) به ازای هر $x > ۰$ و $y > ۰$ داریم

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \qquad (۱-۲-۴)$$

ج) به ازای هر $x > ۰$ و $y > ۰$، $B(x, y) = B(y, x)$

قضیه زیر، قضیه ی درونیابی هرمیت[1] را بیان می کند که در فصل دوم مورد استفاده قرار می گیرد.

قضیه ۱-۲-۱۲. هر گاه $f \in C^۱[a,b]$ و نقاط متمایز $x_۰, x_۱, ..., x_n$ و x_n یکی باشد، از رابطه ی ذیل به دست می آید.

$$H_{۲n+۱}(x) = \sum_{j=۰}^{n} f(x_j) H_{n,j}(x) + \sum_{j=۰}^{n} f'(x_j) \hat{H}_{n,j}(x)$$

که در آن

$$H_{n,j}(x) = \left[۱ - ۲(x - x_j) L'_{n,j}(x_j)\right] L^۲_{n,j}(x_j)$$

$$\hat{H}_{n,j}(x) = (x - x_j) L^۲_{n,j}(x_j),$$

که در آن $L_{n,j}$ چند جمله ای لاگرانژ jام درجه ی n می باشد. علاوه بر این، اگر $f \in C^{۲n+۲}[a,b]$، به ازای نقطه ای چون ξ که $a < \xi < b$، داریم:

$$f(x) - H_{۲n+۱}(x) = \frac{(x-x_۰)^۲ ... (x-x_n)^۲}{(۲n+j)!} f^{(۲n+۲)}(\xi)$$

۱-۳- چند جمله ای های مهم

در این بخش به معرفی چند جمله ای های تیلور، لژاندر، لاگرانژ، چبیشف و برنشتاین می پردازیم، که شامل تعاریف اولیه و قضایای پایه ای و ویژگی های مورد نیاز در فصل بعد است.

۱-۳-۱- چند جمله ای های تیلور

فرض کنید تابع f در نقطه $x = \alpha$ تا مرتبه ی n دارای مشتق باشد. در این صورت یک و فقط یک چند جمله ای مانند P از درجه ی حداکثر n وجود دارد که در (n+۱) شرط ذیل صدق می کند:

---

[1] . Hermite

$$P(\alpha) = f(\alpha), P'(\alpha) = f'(\alpha), \ldots, P^{(n)}(\alpha) = f^{(n)}(\alpha)$$

این چندجمله ای به صورت ذیل است:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(x-\alpha)^k$$

این چند جمله ای را به افتخار ریاضی دان بزرگ انگلیسی، بروک تیلور[1] (۱۷۳۱- ۱۶۸۵)، چندجمله ای تیلور می نامند.

واضح است که درجه ی P مساوی n است اگر و تنها اگر $f^{(n)}(\alpha) \neq 0$. در تقریب تابع f به وسیله ی چند جمله ای تیلور آن در نقطه ی α، خطا را به صورت $E_n(x) = f(x) - P(x)$ نمایش می دهیم. لذا اگر تابع f در نقطه ی $x = \alpha$ دارای مشتق تا مرتبه ی n باشد، می توانیم بنویسیم:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(x-\alpha)^k + E_n(x) \qquad (1\text{-}3\text{-}1)$$

به تساوی (۱-۳-۱) دستور تیلور با باقی مانده می گویند.

قضیه ۱-۳-۱ (قضیه ی سری تیلور). فرض کنیم تابع f در بازه ی (a,b) دارای مشتق مرتبه ی nام پیوسته بوده، $f^{(n+1)}$ بر بازه ی بسته ی $[a, b]$ موجود باشد، در این صورت به ازای هر x از $[a, b]$ که $x \neq c$ نقطه ای بین x و c مانند ς_1 موجود است، به طوری که

$$f(x) = f(c) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + \frac{f^{(n+1)}(\varsigma_1)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

۱-۳-۲- چند جمله ای های لژاندر

این جمله ای ها یک نوع از چند جمله ای های متعامدند که در آن ها تابع وزن $w(t) = 1 \; (t \in [-1, 1])$ است.

چندجمله ای های لژاندر را می توان با فرمول زیر که به فرمول رودریگز[2] مشهور است، به دست آورد:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n. \qquad (2\text{-}3\text{-}1)$$

منحنی نمایش شش چندجمله ای اول، در شکل ۱-۱ نمایش داده شده است. شش جمله ی اول لژاندر عبارتند از:

---

[1] . Brook - Taylor

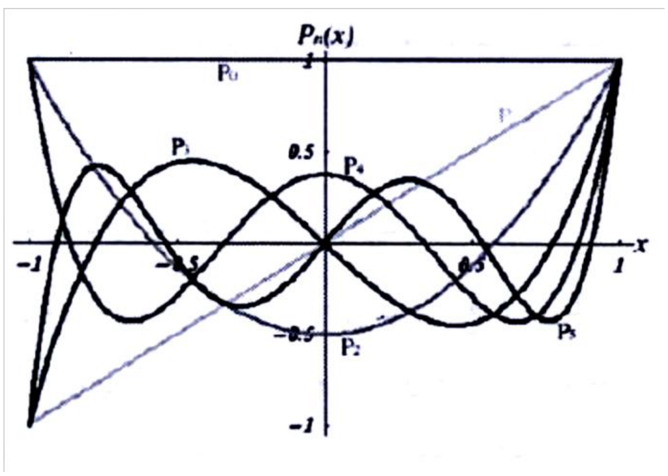
[2] . Rodrigues

$$
\begin{aligned}
P_0(x) &= 1,\\
P_1(x) &= x,\\
P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1)\\
P_3(x) &= \frac{1}{2}(35x^3 - 3x)\\
P_4(x) &= \frac{1}{8}(5x^4 - 30x^2 + 3)\\
P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)
\end{aligned}
$$

چندجمله ای های لژاندر کاربرد فراوانی در شاخه های مختلف علوم دارد و دارای خواص جالبی هستند که در این جا به برخی از آن ها می پردازیم.

چند جمله ای های لژاندر در بازه ی [۱، ۱-] با تابع وزن $w(x) = 1$ متعامدند:

$$
\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = \begin{cases} 0; & m \neq n,\\ \dfrac{2}{2n+1}; & m = n \end{cases}
$$



شکل ۱-۱- چند جمله ای های لژاندر

برای اثبات تعامد، بدون کاسته شدن از کلیت مساله، فرض کنیم $m<n$، بنابراین با توجه به فرمول رودریگز (۱-۳-۲) داریم:

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} P_m(x)\frac{d^n}{d\,x^n}(x^2-1)^n\,dx$$

$$= \frac{1}{2^n n!}\left[P_m(x)\frac{d^{n-1}}{d\,x^{n-1}}(x^2-1)^n\right]_{-1}^{1} - \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} P_m(x)\frac{d^{n-1}}{d\,x^{n-1}}(x^2-1)^n\,dx$$

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} P'_m(x)\frac{d^n}{d\,x^n}(x^2-1)^n\,dx$$

$$= \frac{1}{2^n n!}\left[P'_m(x)\frac{d^{n-1}}{d\,x^{n-1}}(x^2-1)^n\right]_{-1}^{1} - \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} P''_m(x)\frac{d^{n-2}}{d\,x^{n-2}}(x^2-1)^n\,dx$$

با ادامه ی انتگرال گیری به روش جزء به جزء خواهیم داشت:

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1} P_m^n(x)(x^2-1)^n\,dx \qquad (1\text{-}3\text{-}3)$$

با توجه به این که $m < n$، آنگاه از مشتق mام تا nام چند جمله ای $P_m(x)$ برابر صفر است، از این رو نتیجه می شود:

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = 0$$

حال اگر $m = n$ باشد، در این صورت رابطه ی (۱-۳-۳) به صورت ذیل می باشد:

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_n(x)\,dx = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1} P_n^{(n)}(x)(x^2-1)^n\,dx$$

$$= \frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1} \frac{(2n)!}{2^n n!}(x^2-1)^n\,dx = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\,dx$$

$$= \frac{2(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{0}^{1}(1-x^2)^n\,dx$$

با تغییر متغیر $x= \sin(\theta)$ داریم $dx= \cos(\theta)\,dx$ ، بنابراین در انتگرال فوق خواهیم داشت:

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \frac{2(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(\theta)d\theta$$

$$= \frac{2(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left(\frac{1}{2n+1}\cos^{2n}(\theta)\sin(\theta)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2n}{2n+1}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n-1}(\theta)d\theta\right)$$

$$= \frac{2(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left(\frac{2n}{2n+1}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n-1}(\theta)d\theta\right)$$

بنابراین به دست می آید:

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \frac{2(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left(\frac{2n}{2n+1}.\frac{2n-2}{2n-1},...,\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta)d\theta\right)$$

$$= \frac{2(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left(\frac{2^{2n}(n!)}{(2n+1)(2n-1)...(3)(1)}\right) = \frac{2(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left(\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!(2n+1)}\right)$$

$$= \frac{2}{2n+1}$$

با استفاده از ویژگی بالا از چند جمله ای های لژاندر و با توجه به این که $P_1(x) = x$ و $P_0(x) = 1$، می توانیم رابطه ی بازگشتی

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)x\, P_n(x) - n\, P_{n-1}(x) \qquad (۱-۳-۴)$$

را به دست آوریم. به کمک این رابطه ی بازگشتی نیز می توان چند جمله ای های لژاندر را به دست آورد.

۱-۳-۳- چند جمله ای های چبیشف

قدیمی ترین چند جمله ای های متعامد، چند جمله ای های چبیشف هستند. این نوع از چند جمله ای ها نخستین بار به وسیله ی ریاضی دان بزرگ چبیشف (۱۸۹۴- ۱۸۲۱) ارایه شد. در این جا از چند جمله ای های چبیشف نوع اول و دوم استفاده می کنیم.

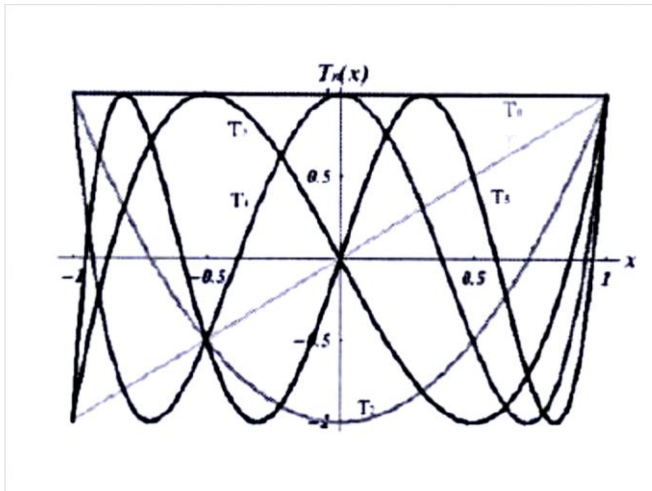
چند جمله ای های چبیشف نوع اول، یک چند جمله ای برحسب x از درجه ی n است که $T_n(x) = \cos(n\theta)$ و $x = \cos(\theta)$ است. بنابراین به دست می آید:

$$T_0(x) = 1, T_1(x) = x, T_2(x) = 2x^2 - 1, T_3(x) = 4x^3 - 3x, ...$$

رابطه ی بازگشتی $T_n(x) = 2x\, T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)(n = 2,3,...)$ را بین چند جمله ای های چبیشف نوع اول داریم. در شکل ۱-۲، پنج جمله ی اول چند جمله ای چبیشف نوع اول نمایش داده شده اند.

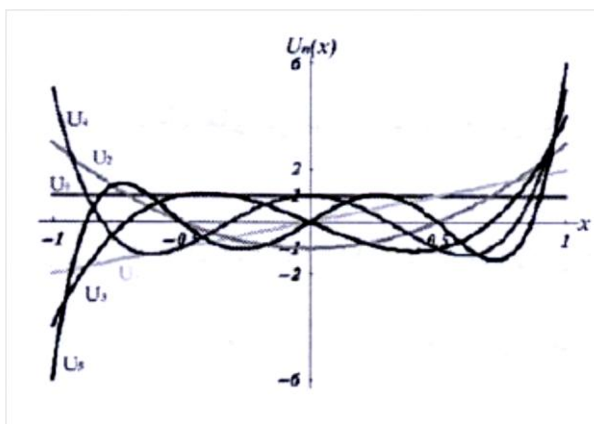
چند جمله ای چبیشف نوع دوم، یک چند جمله ای بر حسب x از درجه ی n است که $U_n(x) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$ و $x = \cos(\theta)$ است. بنابراین داریم:

$$U_0(x) = 1, U_1(x) = 2x, U_2(x) = 4x^2 - 1, U_3(x) = 8x^3 - 4x, ...$$



شکل ۱-۲- چندجمله ای های چبیشف نوع اول

رابطه ی بازگشتی $U_n(x)=2x\ U_{n-1}(x)-U_{n-2}(x)$ $(n = 2,3,\ldots)$ را بین چند جمله ای های چبیشف نوع دوم داریم. در شکل ۱-۳، پنج جمله ی اول چند جمله ای چبیشف نوع دوم نمایش داده شده اند.



شکل ۱-۳- چند جمله ای های چبیشف نوع دوم

روابط ذیل بین چند جمله ای های چبیشف نوع اول و دوم برقرار است: