بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه پیام نور

دانشکده علوم پایه

پایان نامه

برای دریافت مدرک کارشناسی ارشد

رشته آمار ریاضی

گروه علمی آمار

عنوان پایان نامه:

مشخصه‌سازی پارامترها و توزیع نرمال چند متغیره به وسیله‌ی آماره‌های ترتیبی

محمد صادق ایزدپناه

استاد راهنما:

دکتر نرگس عباسی

استاد مشاور:

دکتر کاووس خورشیدیان

تیرماه ۱۳۹۱

بسمه تعالی

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه پیام نور استان فارس

تاریخ : ۹۱/۰۴/۲۲
شماره : ۰۵/۱۶۲۷۶
پیوست :

صورتجلسه دفاع از پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد

جلسه دفاع از پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد **آقای محمدصادق ایزدپناه** دانشجوی رشته **آمار ریاضی** به شماره دانشجویی **۸۷۰۰۰۴۰۳۹** با عنوان:

" مشخصه‌سازی پارامترها و توزیع نرمال چند متغیره به وسیله‌ی آماره‌های ترتیبی "

با حضور هیأت داوران در روز **پنج‌شنبه** مورخ **۱۳۹۱/۴/۲۲** ساعت **۹** در محل ساختمان **غدیر دانشگاه پیام نور شیراز** برگزار شد و هیأت داوران پس از بررسی، پایان‌نامه مذکور را شایسته نمره به عدد ۱۸/۷۵ به حروف هجده و هفتاد و پنج صدم با درجه عالی تشخیص داد.

ردیف	نام و نام خانوادگی	هیات داوران	مرتبه دانشگاهی	دانشگاه	امضاء
۱	دکتر نرگس عباسی	راهنما	دانشیار	پیام نور شیراز	
۲	دکتر کاووس خورشیدیان	مشاور	استادیار	شیراز	
۳	دکتر محبوبه حسین‌یزدی	داور	استادیار	پیام نور شیراز	
۴	امیر اکبری	نماینده تحصیلات تکمیلی	مربی	پیام نور شیراز	

دانشگاه پیام نور مرکز شیراز
معاونت آموزشی
رئیس اداره تحصیلات تکمیلی

شیراز- شهرک گلستان، بلوار دهخدا
قبل از نمایشگاه بین المللی
تلفن : ۳-۰۷۱۱-۶۲۲۲۲۳۰
دورنگار : ۰۷۱۱-۶۲۲۲۲۳۹
صندوق پستی : ۱۳۶۸- ۷۱۹۵۵
www.spnu.ac.ir
Email : admin@spnu.ac.ir

اینجانب محمد صادق ایزدپناه دانشجوی ورودی سال ۱۳۸۷ مقطع کارشناسی‌ارشد رشته آماررياضی گواهی می‌نمایم چنانچه در پایان‌نامه خود از فکر ، ایده و نوشته دیگری بهره گرفته‌ام با نقل قول مستقیم یا غیر مستقیم منبع و ماخذ آن را نیز در جای مناسب ذکر کرده‌ام. بدیهی است مسئولیت تمامی مطالبی که نقل قول دیگران نباشد بر عهده خویش می‌دانم و جواب‌گوی آن خواهم بود.

دانشجو تائید می‌نماید که مطالب مندرج در این پایان‌نامه نتیجه تحقیقات خودش می‌باشد و در صورت استفاده از نتایج دیگران مرجع آن را ذکر نموده است.

محمد صادق ایزدپناه

تاریخ و امضاء ۹۱,۹,۲۲

اینجانب محمد صادق ایزدپناه دانشجوی ورودی سال ۱۳۸۷ مقطع کارشناسی‌ارشد رشته آماررياضی گواهی می‌نمایم چنانچه بر اساس مطالب پایان نامه خود اقدام به انتشار مقاله ، کتاب ، و... نمایم ضمن مطلع نمودن استاد راهنما ، با نظر ایشان نسبت به نشر مقاله ، کتاب ، و... و به صورت مشترک و با ذکر نام استاد راهنما مبادرت نمایم.

محمد صادق ایزدپناه

تاریخ و امضاء ۹۱,۹,۲۲

کلیه حقوق مادی مترتب از نتایج مطالعات ، آزمایشات و نوآوری ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه متعلق به دانشگاه پیام نور می‌باشد.

تیر ماه ۱۳۹۱

تقدیم به:

پدر و مادرم ، که اسطوره‌ای از مهربانی و فداکاری هستند.
همسرم که اقیانوس بی کران محبت و دوستی است.

و تقدیم به:

کلیه کسانی که جستجوگر آروزها و اندیشه‌های خود در مسیر تعالی هستند. چرا که مقصود این جهان چیزی جز تکامل و تعالی نیست.

خدایا، درآور مرا از تاریکی‌های وهم و گرامیم دار به نور فهم
خدایا بگشا بر ما درهای رحمتت را و نشر کن بر ما خزینه‌های دانشت را

ستایش خداوندی را که آفریدگانش به وجود او راهنماینده‌اند. الهی ادای شکر تو را هیچ زبان نیست و دریای فضل تو را هیچ کران نیست.هدایت کن بر ما راهی که بهتر از آن نیست.

چکیده

خانواده‌های توزیع‌های پارامتری و مطالعه خصوصیات آنها یکی از موضوعات دیرین در تحقیقات آماری بوده و در این زمینه مطالعات وسیعی صورت گرفته است. با توجه به اهمیت خانواده توزیع نرمال در مباحث آماری در این پایان نامه توجه خود را به توزیع نرمال چند متغیره معطوف می‌نماییم و در ادامه به بررسی و شناسایی این توزیع و پارامترهای آن بر اساس توزیع کوچکترین آماره‌ی ترتیبی می‌پردازیم.

در بسیاری از مسائل آماری، توزیع اصلی اغلب شناخته شده می‌باشد، اگرچه برخی پارامترهای تعریف شده در آن نامشخص باشند. به منظور نتیجه‌گیری درست و منطقی بر اساس اطلاعات داده شده اولیه، دانستن و یافتن توزیع یکتایی که نتایج اولیه را تأیید نماید، ضروری خواهد بود. زمانی که تابع چگالی متغیر مینیمم از توزیع n، متغیره نرمال با ماتریس کوواریانس ناتکین با پارامترهای مجهول، معین باشد، دانستن و دستیابی به تابع چگالی یکتا یا به عبارت دیگر، پارامترهای این توزیع n، متغیره که تأیید کننده تابع چگالی کوچکترین آماره‌ی ترتیبی اولیه باشد، ضروری است.

کلمات کلیدی که در این پایان نامه مورد توجه قرار می‌گیرند به شرح زیر است:

توزیع نرمال چند متغیره، ماتریس کوواریانس ناتکین، توزیع متغیر مینیمم، ضریب همبستگی.

فهرست مطالب

فصل اول ۱

مقدمات ۱

۱–۱ مقدمه ۲

۱–۲ بررسی یک حالت خاص ۲

۱–۳ حالت سه متغیره ۳

۱–۴ اهداف و دورنما ۴

فصل دوم ۶

تعیین توزیع آماره‌های ترتیبی توزیع نرمال دو متغیره با استفاده از متغیر مینیمم ۶

۲– ۱مقدمه ۷

۲–۲شناسایی توزیع نرمال دو متغیره با توجه به تابع چگالی احتمال متغیر مینیمم ۷

۲–۳ کاربردها در برخی مدل‌های رگرسیونی ۱۸

۲–۴ مدل توبین تعمیم یافته ۱۸

۲–۵ مدل Fair-Jafee ۱۹

فصل سوم ۲۲

شناسایی توزیع نرمال سه متغیره با میانگین صفر ۲۲

۳–۱مقدمه ۲۳

۳–۲ تعیین توزیع متغیر مینیمم در توزیع سه متغیره نرمال ۲۳

۳–۳شناسایی پارامترها در توزیعنرمال سه متغیره با ضرایب همبستگی منفی ۳۵

۳–۴ شناسایی ضرایب همبستگی با واریانس‌های معلوم در حالت $1\sigma 32 \le A3$ ۴۰

۳–۵ محاسبه $\sigma 3$، $\rho 13$ و $\rho 23$ در حالتی که $\sigma 1$، $\sigma 2$ و $\rho 12$ معین می‌باشند($A3 < 1\sigma 32$) .. ۵۰

فصل چهارم ۵۳

شناسایی پارامترها و توزیع نرمال سه متغیره با استفاده از توزیع متغیر مینیمم ۵۳

۴-۱مقدمه ۵٤
۴-۲شناسایی توزیع نرمال سه متغیره با میانگین‌های مخالف صفر ۵۵
منابع ۷۱

فصل اول

مقدمات

۱–۱ مقدمه

.... در محاسبه تابع زیان زمانی که از یک موضوع با m علت از مرگ روبرو هستیم و $X_{(i)}$ زمان زندگی هر یک در معرض i امین علت می‌باشد و تنها مینیمم متغیرها موجود می‌باشد و $X_{(i)}$ در دسترس نمی‌باشد در نتیجه استنباط مسئله بر اساس مینیمم خواهد بود.

مسئله مشابه دیگر زمانی است که سیستم m ترکیبی، به صورت سری با هم در ارتباط می‌باشند و علاقه‌مند به بررسی زمان نهایی هر یک از اعضاء به صورت جداگانه می‌باشیم. این‌ها همه مواردی هستند که نشان می‌دهند در برخی از مسائل کاربردی ملزم به شناسایی پارامترهای توزیع تنها براساس متغیر مینیمم می‌باشیم.

در اینجا این سؤال مطرح می‌گردد که آیا در حالت کلی تابع توزیع متغیر مینیمم مشخص کننده توزیع اولیه در حالت یکتا خواهد بود؟

۱–۲ بررسی یک حالت خاص

فرض کنید F یک تابع توزیع باشد. $z_۱$ و $z_۲$، دو متغیر مستقل به ترتیب با توزیع‌های $F^{\frac{۱}{۳}}$ و $F^{\frac{۲}{۳}}$ را در نظر بگیرید حال اگر $y_۱$ و $y_۲$، دو متغیر مستقل و هم توزیع با توزیع $F^{\frac{۱}{۲}}$ باشند، آنگاه توزیع متغیر مینیمم $\{-z_۱, -z_۲\}$ و $\{-y_۱, -y_۲\}$ به صورت زیر محاسبه خواهد شد.

$$P(min\{-y_۱, -y_۲\} \geq -x) = P(-y_۱ \geq -x)P(-y_۲ \geq -x)$$

با ساده کردن رابطه فوق خواهیم داشت

$$\begin{aligned} P(min\{-y_۱, -y_۲\} \geq -x) &= P(y_۱ \leq x)P(y_۲ \leq x) \\ &= F^{\frac{۱}{۲}} \times F^{\frac{۱}{۲}} \\ &= F \end{aligned}$$

همچنین به طور مشابه خواهیم داشت

$$P(min\{-z_۱,-z_۲\} \geq -x) = P(-z_۱ \geq -x)P(-z_۲ \geq -x)$$

بنابراین با محاسبات مشابه می‌توان نشان داد که

$$P(min\{-y_۱,-y_۲\} \geq -x) = P(y_۱ \leq x)P(y_۲ \leq x)$$
$$= F^{\frac{۱}{۲}} \times F^{\frac{۲}{۲}}$$
$$= F$$

از تساوی طرف راست دو عبارت فوق واضح است که توزیع متغیر مینیمم در هر دو حالت یکسان محاسبه شده است در صورتی که توزیع‌های اولیه یکسان نبوده‌اند. (به عبارت دیگر توابع توزیع $F^{\frac{۱}{۳}}$ و $F^{\frac{۲}{۳}}$ممکن است متفاوت از تابع توزیع $F^{\frac{۱}{۲}}$باشند.)

مثال فوق مسئله را در حالت دو متغیره نشان داد. در مثال بعدی حالت سه متغیره را مورد بررسی قرار خواهیم داد.

۱–۳ حالت سه متغیره

فرض کنید

$$x_i \sim E(\alpha_i) \qquad i = ۱,۲,۳$$

به طوری‌که x_iها مستقل باشند، آنگاه

$$P(min\{x_۱,x_۲,x_۳\} \geq t) = P(X_۱ \geq t)P(X_۲ \geq t)P(X_۳ \geq t)$$

بنابراین رابطه فوق برابر خواهد بود با $e^{\alpha_۱ t}$

$$P(min\{x_1,x_2,x_3\} \geq t) = P(X_1 \geq t)P(X_2 \geq t)P(X_3 \geq t)$$

$$= \quad e^{\alpha_1 t} \quad e^{\alpha_1 t} \quad e^{\alpha_1 t}$$
$$= \quad e^{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)t}$$

حال در صورتی که داشته باشیم

$$x_i \sim E(\beta_i) \qquad i = 1,2,3$$

به طور مشابه خواهیم داشت

$$P(min\{x_1,x_2,x_3\} \geq t) = e^{(\beta_1+\beta_2+\beta_3)t}$$

با مقایسه دو رابطه فوق واضح است که توزیع متغیر مینیمم با شرط تساوی زیر در هر دو حالت یکسان خواهد بود

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$$

در صورتی‌که ممکن است

$$\square i = 1,2,3 \qquad \alpha_i \neq \beta_i$$

بنابراین باید توجه داشت که همواره با دانستن تابع چگالی متغیر مینیمم، پارامترها و توزیع متغیرهای اولیه را به صورت یکتایی نمی‌توان تعین نمود.

۱–۴ اهداف و دورنما

در فصل‌های بعدی نشان خواهیم داد که تحت چه شرایطی قادر خواهیم بود با استفاده از تابع چگالی متغیر مینیمم توزیع اولیه را به صورت یکتا تعین نمود. قبل از آن لازم است اشاره نماییم که به طور

مشابه زمانی که با یک سیستم شامل m ترکیب روبرو هستیم که به صورت موازی با هم در ارتباط

هستند بررسی متغیر ماکزیمم مورد توجه خواهد.

بود. برای بررسی بیشتر موضوع می توانید به مقالات اندرسن[1] و گیوری[2](۱۹۷۸و۱۹۷۷)باسو[3] و گوش[4](۱۹۸۰)و موخرجا[5](۱۹۸۶)مراجعه فرمایید.

---

[1] Anderson

[2] Ghurye

[3] Basu

[4] Ghosh

[5] Mukherjea

فصل دوم

تعیین توزیع آماره‌های ترتیبی توزیع نرمال دو متغیره با استفاده از متغیر مینیمم

۲– ۱مقدمه

برای ماتریس کواریانس پر رتبه ستونی و دیگر خانواده‌هایی از توزیع نرمال دو متغیره مرتب شده توزیع پارامترها بوسیله متغیر مینیمم معین گردیده است. این توزیع دارای کاربردهای وسیعی در مدل‌های رگرسیونی اقتصادی خاص می‌باشد.

تعیین توزیع بوسیله متغیر ماکزیمم متغیرهای تصادفی مستقل هم توزیع،در حالت ماتریس کواریانس پر رتبه ستونی، در مقاله اندرسن[۱] و گیوری[۲] (۱۹۷۷) ذکر گردیده است.

در این فصل نشان خواهیم داد در حالتی که ماتریس کواریانس پر رتبه ستونی است و دیگر خانواده‌هایی از این دست، توزیع متغیر تصادفی بر اساس پارامترهای (υ,τ) و (μ,σ) معین خواهند شد.

۲–۲شناسایی توزیع نرمال دو متغیره با توجه به تابع چگالی احتمال متغیر مینیمم

فرض کنید (U,V) دارای توزیع نرمال دو متغیره با پارامترهای(ν,τ) و (μ,σ)باشد، آنگاه تابع چگالی توأم به صورت زیر خواهد بود.

$$f(u,v)=\frac{۱}{۲\pi\sqrt{\sigma.\tau(۱-\rho^{۲})}}\quad e^{\frac{-۱}{۲(۱-\rho^{۲})}\left[\frac{(u-\mu)^{۲}}{\sigma}+\frac{(v-\nu)^{۲}}{\tau}\right]}$$

متغیر تصادفی مینیمم دو متغیر U وV را به صورت زیر تعریف نمایید.

$$X=U\wedge V$$

[1]Anderson
[2]Ghurye

برای سهولت در اثبات از این پس پارامترها را با شرایط زیر در نظر می‌گیریم:

$$\nu \leq \mu \text{ و } \tau = \tau\sigma \text{ با } \tau > \sigma$$

(تعیین پارامترهای μ، ν، σ، τ و ρ در این دسته از خانواده‌های محدود شده معادل با تعیین پارامترهای (μ,σ) و (ν,τ) در خانواده‌های نامحدود می‌باشد.)

زیر مجموعه‌ای از خانواده‌های توزیع نرمال دو متغیره با شرایط زیر را در نظر بگیرید:

$$\pi_0 : \tau > 0, \qquad |\rho| < 1$$
$$\pi_1 : \sigma > \tau = 0$$
$$\pi_2 : \tau > 0, \qquad \rho = -1$$
$$\pi_3 : \sigma > \tau > 0, \quad \rho = 1$$
$$\pi_4 : \sigma = \tau \geq 0, \quad \rho = 1 \text{(یا تعریف نشده)}$$

π را یکی از π_iها در نظر بگیرید. $(1 \leq i \leq 4)$.

π_0، حالتی را که ماتریس کواریانس پر رتبه ستونی باشد معرفی می‌نماید و π_i یکی از زیر خانواده‌های π خواهد بود.

در حالتی که (U,V) دارای توزیع F می‌باشد، F_X نشان دهنده توزیع X خواهد بود، به طوری‌که

$$X=U\square V$$

قضیه ۲–۱

اگر F تابع توزیع توأم دو متغیر (U,V) و F_X نشان دهند، تابع توزیع متغیر مینیمم باشد، با فرض اینکه G و F از خانواده π باشند.آنگاه در صورت تساوی $F_X = G_X$ می‌توان گفت.

$$F = G$$

قضیه ۲–۲

الف :فرض کنید $F, G \in \pi$ و $F_X = G_X$،آنگاه

$$F, G \in \pi_i \qquad (i = ۰, \dots, ۳)$$

ب: اگر

$$F, G \in \pi_i \qquad (i = ۰, \dots, ۳)$$

آنگاه

$$F = G$$

ج: در صورتی که $F, G \in \pi_۲$ آنگاه G و F دارای مقادیر یکسان μ و σ خواهد بود وتنها به صورت دلخواه مقادیر $\mu \geq \nu$ می‌باشند.

برای سهولت در اثبات قضایا روابط زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \sigma = \sigma_۱ \quad \tau = \sigma_۲ \\ \mu = \mu_۱ \quad \nu = \mu_۲ \end{aligned} \qquad (۱.۲)$$

همچنین x_j و ω_j را به صورت زیر تعریف می‌نماییم.(j=۱,۲)

$$\begin{aligned} \sigma_j x_j &= x - \mu_j \quad \sigma_j > \cdot \\ (۱-\rho^۲)^{\frac{۱}{۲}} \omega_j &= \rho x_j - x_{j'}, \quad |\rho| > ۱ \end{aligned} \qquad (۲.۲)$$

در حالتی که j' = ۲,۱ باشد مقادیر j بر این اساس j=۱,۲ خواهند بود.

اثبات قضیه ۱:

با استفاده از رابطه (۱.۱) تابع چگالی X در صورتی که .Fϵπ باشد به صورت زیر خواهد بود

$$f(x) = \sum_{j=۱}^{۲} \sigma_j^{-۱} \phi(x_j) \Phi(\omega_j) \quad -\infty > x < +\infty \qquad (۳.۲)$$

در نظر داشته باشید که ϕ و Φ به ترتیب تابع چگالی احتمال و تابع توزیع احتمال متغیر استاندارد می‌باشند.

اثبات اینکه f به صورت یکتایی $\mu_۱$،$\sigma_۱$،$\mu_۲$،$\sigma_۲$ و ρ را نشان می‌دهد بر اساس مثالی از رفتار دنباله‌ای f خواهد بود.(تقریبهای دیگر شامل بسطها و دنباله‌ها در اثبات این امر ناموفق بوده‌اند.) نتایج زمانی که $x \rightarrow \pm\infty$ حاصل خواهد شد.

$$-۲x^۲ \log \phi\left(\frac{x-a}{b}\right) \rightarrow \frac{۱}{b^۲} \qquad (۴.۲)$$

$$x^{-۱}\left[\log \phi\left(\frac{x-a}{b}\right) + \frac{x^۲}{۱b^۲}\right] \rightarrow \frac{a}{b^۲} \qquad (۵.۲)$$

واضح است که (فیلر،۱۹۶۸).

$$\lim_{x \to \infty} \Phi(-x) \sim \frac{\phi(x)}{x}$$

(۶.۲)

حال α_j و β_j را برای $j=۱,۲$ به صورت زیر تعریف می‌نماییم.

$$(۱-\rho)^{\frac{۱}{۲}}\alpha_j = \frac{\rho}{\sigma_j} - \frac{۱}{\sigma_{j'}}$$
$$(۱-\rho)^{\frac{۱}{۲}}\beta_j = \frac{\rho\mu_j}{\sigma_j} - \frac{\mu_{j'}}{\sigma_{j'}}$$

(۷.۲)

با توجه به رابطه(۱.۲) می توان نوشت.

$$x_j = \frac{x-\mu_j}{\sigma_j} \qquad (۸.۲)$$

بنابراین

$$\begin{aligned}(۱-\rho^۲)\omega_j &= \rho\left(\frac{x-\mu_j}{\sigma_j}\right) - \left[\frac{x-\mu_{j'}}{\sigma_{j'}}\right] \\ &= \left[\frac{\rho}{\sigma_j} - \frac{۱}{\sigma_{j'}}\right] \times - \frac{\rho\mu_j}{\sigma_j} - \frac{\mu_{j'}}{\sigma_{j'}}\end{aligned} \qquad (۹.۲)$$

حال با توجه به رابطه (۷.۲) داریم

$$(۱-\rho^۲)\omega_j = (۱-\rho^۲)\alpha_j \times - (۱-\rho^۲)\beta_j \qquad (۱۰.۲)$$

در نهایت خواهیم داشت

$$\omega_j = \alpha_j x - \beta_j \qquad (۱۱.۲)$$

در نتیجه $\alpha < ۰$ خواهد بود، در صورتی‌که $x \dashrightarrow \pm\infty$ خواهیم داشت.

$$\omega_j \Box \alpha_j x \longrightarrow \pm\infty \qquad (۱۲.۲)$$

همچنین در صورتی‌که $\alpha \neq ۰$ باشد، $\omega_۲ \Box \alpha_۲ x$ خواهد بود و اگر $\alpha_۲ \neq ۰$ آنگاه

$$\omega_۲ \Box - \beta_۲ \qquad (۱۳.۲)$$

در ابتدا، دنباله چپ $f(x \longrightarrow -\infty)$ را بررسی می نماییم.با استفاده از رابطه (۱۳.۲) می‌توان نوشت :

$$f(x) \sim \begin{cases} ۲\sigma_۱^{-۱}\phi(x_۱) & \sigma_۱ = \sigma_۲ \quad \text{و} \quad \mu_۱ = \mu_۲ \\ ۲\sigma_۱^{-۱}\phi(x_۱) & \text{در سایرنقاط} \end{cases} \tag{۱۴.۲}$$

در حالت دوم از رابطه فوق، می‌توان بررسی کرد که زمانی که $\sigma_۱ = \sigma_۲$ باشد آنگاه $\mu_۲ > \mu_۱$ خواهد

بود و همچنین بررسی $\log\left[\frac{\phi(x_۲)}{\phi(x_۱)}\right]$ نشان می‌دهد که

$$\frac{\phi(x_۲)}{\phi(x_۱)} \to ۰ \tag{۱۵.۲}$$

با لگاریتم گرفتن از طریق رابطه (۱۴.۲) و با استفاده از روابط (۴.۲) و (۵.۲) معین خواهد شد که اگر

$x \to -\infty$ آنگاه

$$-۲x^{-۲}\log f(x) \to \sigma_۱^{-۲} \tag{۱۶.۲}$$

و همچنین

$$x^{-۱}\left[\log f(x) + \frac{۱}{۲}\sigma_۱^{-۲}x^{۲}\right] \to \mu_۱\sigma_۱^{-۲} \tag{۱۷.۲}$$

در نتیجه $\sigma_۱$ و $\mu_۱$ به صورت یکتایی به وسیله f معین می‌گردند و برای ارائه اثبات قضیه، به عنوان

پارامترهای شناخته شده در نظر گرفته خواهند شد.

حال دنباله سمت راست f را بررسی می‌نماییم.نشان خواهیم داد در حالتی که $x \longrightarrow \pm\infty$ آنگاه

$$\begin{cases} f(x) \square S x^{-۱}\phi(x_۲)\phi(\omega_۲) & \alpha_۲ < ۰ \\ f(x) \square \sigma_۲^{-۱}\phi(x_۲)\phi(\omega_۲) & \alpha_۲ > ۰ \end{cases} \tag{۱۸.۲}$$

به طوری‌که :

$$S = -(\alpha_۱\sigma_۱)^{-۱} - (\alpha_۲\sigma_۲)^{-۱} \tag{۱۹.۲}$$

برای محاسبه رابطه(۱۸.۲) $\omega_۱$و $\omega_۱$را در حالتی که $x \longrightarrow \pm\infty$ در رابطه(۱۳.۲)بررسی می‌نماییم.برای

حذف عبارت $\phi(x_۱)$ از رابطه(۱.۲)، تساوی زیر را در نظر بگیرید.

$$\phi(x_۱)\phi(\omega_۱) = \phi(x_۲)\phi(\omega_۲) \tag{۲۰.۲}$$