دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

حل عددی مسایل مقدار اولیه بر اساس درون‌یاب گاوس–لاگر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی‌کاربردی (آنالیز عددی)

محبوبه حقیقی

استاد راهنما

دکتر مهدی تاتاری

۱۳۸۹

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی‌کاربردی (آنالیز عددی) خانم محبوبه حقیقی

تحت عنوان

حل عددی مسایل مقدار اولیه بر اساس درون‌یاب گاوس–لاگر

در تاریخ ۱۳۸۹/۱۱/۹ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهائی قرار گرفت.

۱– استاد راهنمای پایان‌نامه	دکتر مهدی تاتاری
۲– استاد مشاور پایان‌نامه	دکتر رضا مختاری
۳– استاد داور ۱	دکتر مصطفی شمسی (دانشگاه صنعتی امیرکبیر)
۴– استاد داور ۲	دکتر محمدرضا رئوفی

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده   دکتر اعظم اعتماد

فهرست مطالب

چکیده:

در این پایان‌نامه ابتدا روش طیفی هم‌مکانی مبتنی بر درون‌یاب گاوس—لاگر برای حل معادلات دیفرانسیل عادی با شرط اولیه بررسی می‌شود. آنالیز همگرایی برای این معادلات انجام شده و دقت طیفی جواب را نشان خواهیم داد. سپس به منظور بیان کارایی این روش، به بررسی معادلات دیفرانسیل سرسخت و نیز معادلات انتگرال ولترا می‌پردازیم. هم‌چنین کاربرد این روش را در حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای با شرایط اولیه—مرزی به کمک تلفیق با چندجمله‌ای‌های متعامد دیگر مطرح می‌کنیم. مثال‌های عددی ارایه شده در پایان هر بخش، کارایی و دقت بالای روش مطرح شده را به خوبی نشان می‌دهند.

رده‌بندی موضوعی: ٦٥L٢٠، ٦٥L٠٥.

کلمات کلیدی: روش طیفی هم‌مکانی، درون‌یاب گاوس—لاگر، مسایل مقدار اولیه، ماتریس عملیاتی مشتق، چندجمله‌ای لژاندر.

فصل ۱

مقدمه

در این فصل ابتدا روش‌های عددی متداول برای حل انواع مسایل مقدار اولیه را بیان می‌کنیم. سپس برخی پژوهش‌های انجام گرفته در جهت حل عددی این مسایل را برخواهیم شمرد. در آخر تعاریف و مفاهیم مورد استفاده در پایان‌نامه را مطرح خواهیم کرد.

۱—۱ روش‌های عددی برای حل مسایل مقدار اولیه

مدل‌سازی اکثر مسایل ناشی از پدیده‌های فیزیکی، فرآیندهای شیمیایی و مطالعات مهندسی، منجر به معادلات دیفرانسیل عادی و یا پاره‌ای (ODEs, PDEs) با شرط اولیه می‌شوند. این معادلات اغلب بسیار پیچیده هستند و در کل نمی‌توان آن‌ها را به صورت تحلیلی حل کرد. بنابراین ارایه یک روش عددی مناسب برای تقریب جواب و کنترل دقت این تقریب از اهمیت قابل توجهی برخوردار است.

روش‌هایی که برای حل معادلات دیفرانسیل عادی با شرط اولیه به کار برده می‌شوند [۳]، به دو دسته کلی تک‌گامی و چندگامی تقسیم‌بندی می‌شوند. در روش‌های چندگامی باید از چندین گام قبلی برای به دست آوردن گام جدید استفاده شود که این چند گام اولیه با روش‌های تک‌گامی محاسبه می‌شوند. روش‌های رونگه—کوتا جزو رده‌ی روش‌های تک‌گامی هستند که به دلیل مرتبه‌ی دقت بالا، اغلب برای تعیین گام‌های اولیه در روش‌های چندگامی استفاده می‌شوند. بزرگ‌ترین عیب روش‌های رونگه—کوتا در حل معادله کلی $y' = f(x, y)$، آن است که، در مقایسه با روش‌های چندگامی، برای رسیدن به یک دقت

مفروض به محاسبه‌ی خیلی بیشتر $f(x,y)$ نیاز است. با این حال کارایی و دقت این روش در حل ODEs قابل توجه است [۶].

روش‌های طیفی توسیعی از روش مانده‌های وزنی هستند که برای حل PDEs و ODEs روی دامنه‌های منظم به کار می‌روند. این روش‌ها در مسایل مشکلی از قبیل پیش‌بینی عددی هواشناسی، شبیه‌سازی عددی جریانات پرتلاطم، دینامیک سیالات و مسایلی از این مورد که دقت بالایی را نیاز دارند، مورد استفاده قرار می‌گیرند [۱۶، ۱۰، ۹]. اساس این روش‌ها توابع پایه و توابع وزن است. به این صورت که یک ترکیب خطی از توابع پایه با ضرایب مجهول به عنوان تقریب تابع مجهول در نظر گرفته می‌شود و توابع وزن برای برقراری معادله‌ی دیفرانسیل به ازای جواب تقریبی با خطای حداقل به کار می‌روند. این هدف به وسیله‌ی به حداقل رساندن باقیمانده، که همان خطای حاصل از نشاندن تقریب به جای جواب واقعی با توجه به یک نرم مناسب است، محقق می‌شود. با این مینیمم‌سازی ضرایب مجهول به دست می‌آیند.

توابع پایه در روش‌های طیفی، توابعی بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر و متعامد هستند. با توجه به متفاوت بودن دامنه‌ی تعریف این توابع، هر کدام برای نوع خاصی از مسایل استفاده می‌شود. به عنوان نمونه، چندجمله‌ای‌های لژاندر و چبیشف برای مسایلی با دامنه‌ی متناهی، چندجمله‌ای‌های لاگر و هرمیت به ترتیب برای مسایلی با دامنه‌ی نیمه‌متناهی و نامتناهی، و توابع سینوسی و کسینوسی برای مسایلی با شرط مرزی متناوب به کار برده می‌شوند.

روش‌های طیفی با توجه به انتخاب توابع پایه و وزن، به روش‌های هم‌مکانی، روش‌های گالرکین و روش‌های تاو تقسیم‌بندی می‌شوند. در روش گالرکین، توابع وزن همان توابع پایه هستند. در این روش، مقدار باقیمانده‌ی حاصل از نشاندن جواب تقریبی در معادله دیفرانسیل را در هر کدام از توابع وزن ضرب کرده و انتگرال آن را برابر صفر قرار می‌دهیم. سپس با کمک انتگرال‌گیری جز به جز، به فرم ضعیف این معادلات رسیده که با حل این معادلات، ضرایب جواب تقریبی به دست می‌آیند. روش تاو شبیه روش گالرکین است با این تفاوت که برای اعمال شرایط مرزی، یک مجموعه توابع وزن دیگر به کار برده می‌شود. در روش‌های هم‌مکانی، از یک‌سری نقاط درون‌یاب که معمولا ریشه‌های توابع پایه هستند، استفاده می‌شود. به این ترتیب که با برابر قرار دادن دو طرف معادله‌ی مورد نظر به ازای جواب تقریبی در نقاط درون‌یاب، به یک دستگاه معادلات جبری می‌رسیم که با حل این دستگاه، ضرایب مجهول در فرمول تقریب به دست می‌آیند.

روش‌های شبه‌طیفی در رده‌ی روش‌های هم‌مکانی قرار دارند با این تفاوت که از چندجمله‌ای درون‌یاب لاگرانژ به عنوان تقریب جواب استفاده می‌شود. با انتخاب نوع نقاط درون‌یاب، نوع روش شبه‌طیفی مشخص می‌شود. برای مثال، در روش شبه‌طیفی لژاندر از مجموعه نقاط گاوس—لوباتو—لژاندر

و در روش شبه‌طیفی گاوس از نقاط گاوس—لژاندر به منظور نقاط درون‌یاب استفاده شده است [۸].

روش هم‌مکانی اولین بار در سال ۱۹۳۴ توسط اسلتر و کانترویچ [۳۲، ۲۴] در یک کاربرد خاص مطرح شد. فریزر و هم‌کارانش در سال ۱۹۳۷ این روش را به ازای توابع پایه‌ی متنوع و توزیع‌های دل‌خواه از نقاط هم‌مکانی برای حل معادلات دیفرانسیل عادی به کار بردند [۱۳]. در سال ۱۹۳۸، لنچوز در [۲۶] نشان داد که می‌توان با انتخاب مناسب از توابع پایه و نقاط هم‌مکانی در پیاده‌سازی این روش، جواب‌های دقیق‌تری به دست آورد. اولین کاربرد جدی روش‌های طیفی در حل PDEs توسط سیلبرمن در سال ۱۹۵۴ ارایه شد [۳۳]، که در آن از روش گالرکین برای مدل‌سازی هواشناسی استفاده شده بود. به دنبال آن اورزگ در سال‌های ۱۹۶۹ و ۱۹۷۰ کاربرد عملی روش طیفی گالرکین را برای مسایلی در دینامیک سیالات مطرح کرد [۳۰، ۲۹] و از آن سال به بعد روش‌های طیفی به عنوان یک روش کاربردی معروف شد. در سال ۱۹۷۷ کرس و الیگر در [۲۵] با استفاده از روش هم‌مکانی بر اساس توابع سینوسی و کسینوسی (روش هم‌مکانی فوریه) و اورزگ در [۳۱] با استفاده از روش شبه‌طیفی به بررسی حل PDEs پرداختند. در سال‌های بعد تلاش‌های صورت گرفته در [۲۳، ۱۵، ۱۱، ۵] اهمیت کاربرد این روش‌ها را در حل مسایل مختلف روشن ساخت.

اکثر کارهایی که در این زمینه انجام گرفته برای مسایلی با دامنه‌ی متناهی است که از چندجمله‌ای‌های لژاندر و چبیشف به عنوان توابع پایه استفاده شده است [۱۷، ۱۲، ۴]. حتی برای مسایلی با دامنه‌ی نیمه‌متناهی نیز چون در عمل در یک دامنه‌ی متناهی جواب را به دست می‌آوریم، همین توابع برای تقریب جواب در برخی مقالات به کار برده شده است که عیب آن عدم دسترسی به جواب در دامنه‌ی بزرگ به علت افزایش خطا در توسیع دامنه است. در دهه‌های اخیر تلاش‌های زیادی برای حل مسایل مقدار اولیه روی دامنه‌ی نیمه‌متناهی و نامتناهی به خصوص در حل PDEs با شرط اولیه انجام نگرفته و به عنوان معدود کارهای انجام گرفته می‌توان برای مسایل با دامنه نیمه‌متناهی به [۲۲، ۱۹، ۱۸] و برای مسایل با دامنه‌ی نامتناهی به [۳۵، ۲۱، ۲۰] اشاره کرد.

یکی از مزیت‌های مهم روش‌های طیفی نسبت به سایر روش‌های مطرح شده، دقت و سرعت همگرایی آن‌ها است. به خصوص در مواردی که مساله دارای جواب هموار باشد این روش‌ها نرخ همگرایی سریع‌تری دارند. به عبارت دیگر مرتبه‌ی همگرایی این روش‌ها متناسب با همواری جواب دقیق مساله است. این ویژگی را «دقت طیفی» می‌نامند [۳۴].

هدف اصلی در این پایان‌نامه آن است که با استفاده از روش طیفی هم‌مکانی بر پایه‌ی درون‌یاب گاوس—لاگر بتوان انواع مسایل مقدار اولیه را حل نمود. بدین منظور در بخش بعد یک سری تعاریف و مفاهیم پایه را جهت روشن‌تر شدن فصول بعد بیان می‌کنیم.

۱—۲ مفاهیم مقدماتی

قضایا و تعاریف این بخش برگرفته از مراجع [۲۲ ،۹] است.

تعریف ۱.۱ فرض می‌کنیم تابع دو متغیره‌ی f روی مجموعه‌ی $X \times T \subseteq \mathbb{R}^{۲}$ تعریف شده باشد،
(الف) گوییم f نسبت به متغیر اول در شرط لیپشیتز صدق می‌کند، هر گاه ثابت $L > ۰$ وجود داشته باشد به گونه‌ای که

$$|f(x,t) - f(y,t)| \leq L|x-y|, \qquad \forall x,y \in X,\ \forall t \in T.$$

(ب) گوییم f نسبت به متغیر اول در شرط لیپشیتز یک‌طرفه صدق می‌کند، هر گاه عدد حقیقی و ثابت γ وجود داشته باشد به قسمی که

$$\Big(f(x,t) - f(y,t)\Big)(x-y) \leq \gamma|x-y|^{۲}, \qquad \forall x,y \in X,\ \forall t \in T.$$

بنابراین شرط لیپشیتز، شرط لیپشیتز یک‌طرفه را نتیجه می‌دهد.

تعریف ۲.۱ فرض می‌کنیم X یک فضای برداری (خطی) باشد. اگر تابع $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ در شرایط
(الف) $\|u\| \geq ۰$ برای هر $u \in X$،
(ب) $\|u\| = ۰$ اگر و فقط اگر $u = ۰$،
(ج) $\|\alpha u\| = |\alpha|\|u\|$ برای هر $u \in X$ و هر $\alpha \in \mathbb{R}$،
(د) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ برای هر $u,v \in X$،
صدق کند، آن‌گاه تابع $\|\cdot\|$ را یک نرم و X را یک فضای خطی نرم‌دار با نرم $\|\cdot\|$ می‌نامیم.

تعریف ۳.۱ فرض می‌کنیم X یک فضای برداری حقیقی باشد. اگر تابع $(\cdot,\cdot) : X \longrightarrow \mathbb{R}$ در شرایط
(الف) $(u,v) = (v,u)$ برای هر $u,v \in X$،
(ب) $(\alpha u + \beta v, w) = \alpha(u,w) + \beta(v,w)$ برای هر $u,v \in X$ و هر $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$،
(ج) $(u,u) \geq ۰$ برای هر $u \in X$،
(د) $(u,u) = ۰$ اگر و فقط اگر $u = ۰$،
صدق کند، آن‌گاه X را یک فضای حاصل‌ضرب داخلی با ضرب داخلی $(\cdot,\cdot)$ می‌نامیم.

تذکر ۴.۱ برای فضای حاصل‌ضرب داخلی X با ضرب‌داخلی $(\cdot,\cdot)$ رابطه‌ی

$$\|u\| = (u,u)^{\frac{1}{2}},$$

بیان‌گر یک نرم روی X است که نرم القایی از ضرب داخلی نامیده می‌شود.

تعریف ۵.۱ فرض می‌کنیم $(X,(\cdot,\cdot))$ یک فضای ضرب داخلی باشد. دو عنصر $u,v \in X$ را متعامد گوییم هر گاه $(u,v) = 0$.

قضیه ۶.۱ (نابرابری کوشی—شوارتز) فرض می‌کنیم $(X,(\cdot,\cdot))$ یک فضای ضرب داخلی و $\|\cdot\|$ نرم القایی از ضرب داخلی $(\cdot,\cdot)$ باشد، آن‌گاه

$$|(u,v)| \leq \|u\|\,\|y\|, \qquad \forall u,v \in X.$$

تعریف ۷.۱ فضای نرم‌دار X کامل است هر گاه هر دنباله‌ی کوشی در X به عضوی در X همگرا باشد.

تعریف ۸.۱ یک فضای ضرب داخلی کامل، فضای هیلبرت است. بنابراین طبق تعریف نرم القایی، فضای هیلبرت یک فضای نرم‌دار کامل نیز هست. اما یک فضای نرم‌دار کامل، فضای هیلبرت نیست.

تعریف ۹.۱ فضای $L^2(0,\infty)$، مجموعه توابع اندازه‌پذیر $u:(0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ است به قسمی که انتگرال (لبگ)

$$\int_0^\infty |u(t)|^2 dt$$

موجود باشد. به عبارت دیگر

$$L^2(0,\infty) = \left\{ u \;\middle|\; u:(0,\infty) \xrightarrow{\text{اندازه پذیر}} \mathbb{R},\ \int_0^\infty |u(t)|^2 dt < \infty \right\}.$$

فضای $L^{۲}(\circ,\infty)$، یک فضای هیلبرت است که ضرب داخلی و نرم القایی برای آن به صورت

$$(u,v)=\int_{\circ}^{\infty}u(t)v(t)\,dt,\qquad \|u\|=(u,u)^{\frac{۱}{۲}},\qquad u,v\in L^{۲}(\circ,\infty),$$

تعریف می‌شوند.

تعریف ۱۰.۱ فرض می‌کنیم $\omega_\beta(t)=e^{-\beta t}$ برای $\beta>\circ$ یک تابع وزن باشد. فضای وزن‌دار $L^{۲}_{\omega_\beta}(\circ,\infty)$ به شکل

$$L^{۲}_{\omega_\beta}(\circ,\infty)=\left\{u\;\middle|\;u:(\circ,\infty)\xrightarrow{\text{اندازه پذیر}}\mathbb{R},\ \int_{\circ}^{\infty}|u(t)|^{۲}\omega_\beta(t)\,dt<\infty\right\},$$

تعریف می‌شود. این فضا نیز یک فضای هیلبرت با ضرب داخلی و نرم القایی

$$(u,v)_{\omega_\beta}=\int_{\circ}^{\infty}u(t)v(t)\omega_\beta(t)\,dt,\qquad \|u\|_{\omega_\beta}=(u,u)^{\frac{۱}{۲}}_{\omega_\beta},\qquad u,v\in L^{۲}_{\omega_\beta}(\circ,\infty),$$

است

تعریف ۱۱.۱ فضای سوبولف $H^{۱}(\circ,\infty)=W^{۱,۲}(\circ,\infty)$ فضایی است شامل تمام توابعی که خودشان و مشتق ضعیفشان در $L^{۲}(\circ,\infty)$ هستند یعنی

$$H^{۱}(\circ,\infty)=\left\{u\in L^{۲}(\circ,\infty)\;\middle|\;Du\in L^{۲}(\circ,\infty)\right\},$$

که در آن Du مشتق ضعیف تابع u است به گونه‌ای که

$$\int_{\circ}^{\infty}Du(t)\phi(t)dt=(-۱)\int_{\circ}^{\infty}u(t)\frac{d}{dt}\phi(t)dt,\qquad \forall\phi\in C^{\infty}_{\circ}(\circ,\infty),$$

و

$$C^{\infty}_{\circ}(\circ,\infty)=\{u\in C^{\infty}(\circ,\infty)\mid u(\circ)=\circ\}.$$

فضای $H^{۱}(\circ,\infty)$ یک فضای هیلبرت است که ضرب داخلی و نرم سوبولف القایی برای آن به صورت‌های زیر بیان می‌شوند

$$\begin{aligned}(u,v)_{H^{۱}(\circ,\infty)} &= =(u,v)+(Du,Dv), \qquad u,v\in H^{۱}(\circ,\infty),\\ \|u\|^{۲}_{H^{۱}(\circ,\infty)} &= =\|u\|^{۲}+\|Du\|^{۲}.\end{aligned}$$

تعریف ۱۲.۱ فرض کنید $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ دامنه‌ای کران‌دار با مرز Γ باشد و برای هر نقطه‌ی دل‌خواه x روی Γ، وجود داشته باشد همسایگی

$$N_x = \{y \in \mathbb{R}^n \ : \ |y - x| < \varepsilon\},$$

به طوری که بتوان $\Gamma \cap N_x$ را با تابع $f(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ بیان کرد. در این صورت Γ را لیپشیتز می‌نامیم هر گاه f پیوسته‌ی لیپشیتز باشد، یعنی، یک ثابت M وجود داشته باشد به قسمی که

$$|f(\xi) - f(\rho)| \leq M|\xi - \rho|,$$

که در آن $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ و $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_{n-1})$ [۱].

قضیه ۱۳.۱ (اثر) فرض می‌کنیم Ω یک دامنه کراندار در $\mathbb{R}^n$ با مرز لیپشیتز Γ باشد. آن‌گاه عملگر خطی کراندار یکتای γ وجود دارد به قسمی که $H^1(\Omega)$ را به $L^2(\Gamma)$ می نگارد، یعنی

$$\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma), \qquad \| \gamma(u) \|_{L^2(\Gamma)} \leq C\| u \|_{H^1(\Omega)},$$

با این خاصیت که اگر $u \in C(\overline{\Omega})$، آن‌گاه $\gamma(u) = u|_\Gamma$ [۲].

در ادامه‌ی این فصل، مقدماتی از ویژگی‌های چندجمله‌ای‌های لاگر و تابع درون‌یاب که در فصل بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند را بیان می‌کنیم.

چندجمله‌ای‌های لاگر بهبود یافته از درجه‌ی l به شکل

$$\mathcal{L}_l^{(\beta)}(t) = \frac{1}{l!} e^{\beta t} \frac{d^l}{dt^l}(t^l e^{-\beta t}), \qquad l = 0, 1, \dots,$$

تعریف می‌شوند، که در رابطه‌ی بازگشتی زیر صدق می‌کنند

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}_l^{(\beta)}(t) = \frac{d}{dt}\mathcal{L}_{l-1}^{(\beta)}(t) - \beta \mathcal{L}_{l-1}^{(\beta)}(t), \qquad l \geq 1. \tag{1}$$

مجموعه‌ی چندجمله‌ای‌های لاگر در فضای $L^2_{\omega_\beta}(0, \infty)$ متعامد و کامل‌اند یعنی

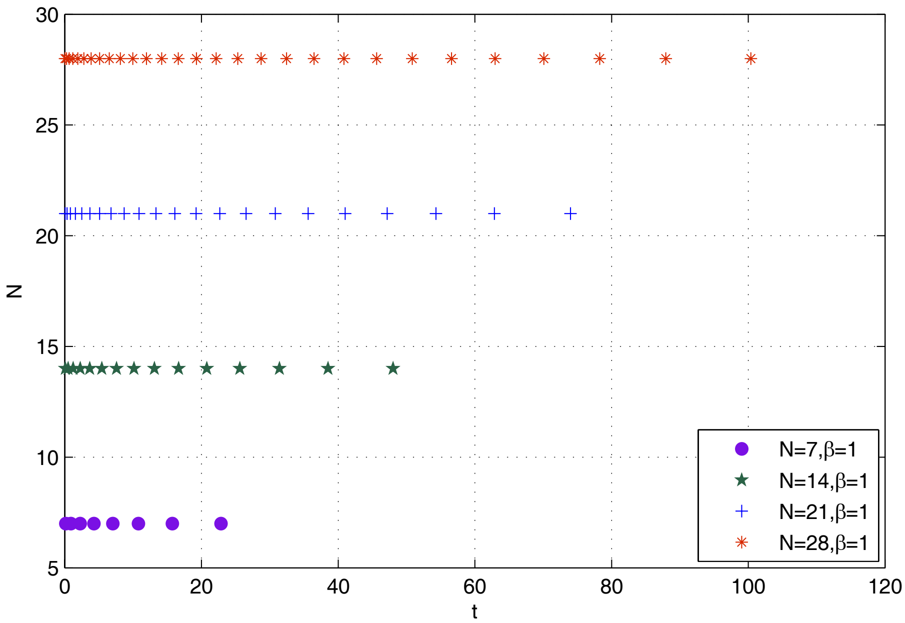
$$(\mathcal{L}_l^{(\beta)}, \mathcal{L}_m^{(\beta)})_{\omega_\beta} = \frac{1}{\beta}\delta_{l,m}, \tag{2}$$

که $\omega_\beta = e^{-\beta t}$ و $\delta_{l,m}$ دلتای کرونکر است و از طرفی برای هر $v \in L^2_{\omega_\beta}(0, \infty)$،

$$v(t) = \sum_{l=0}^{\infty} \hat{v}_l \mathcal{L}_l^{(\beta)}(t), \qquad \hat{v}_l = \beta(v, \mathcal{L}_l^{(\beta)})_{\omega_\beta},$$

که عبارت آخر، کامل بودن این مجموعه را نشان می‌دهد.

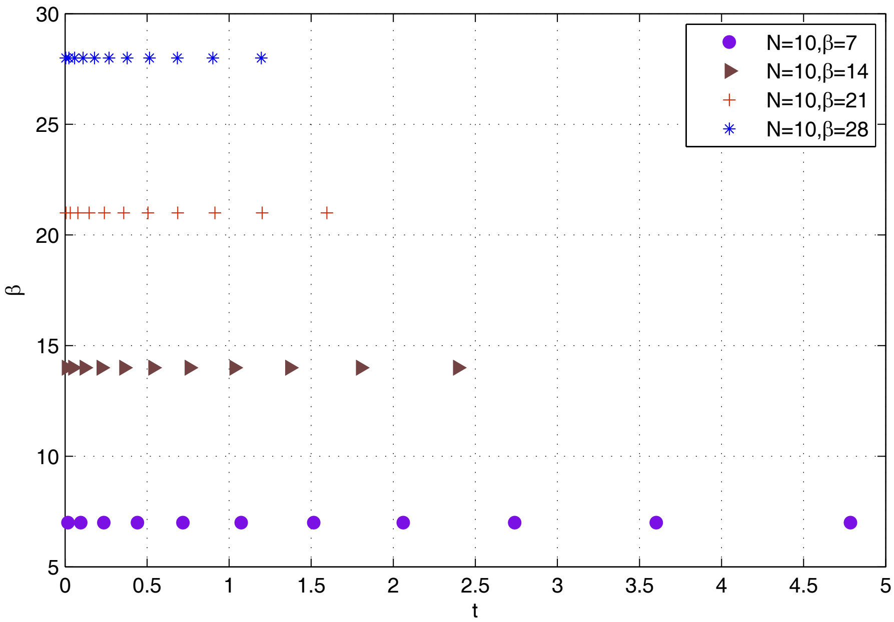
برای تقریب جواب یک معادله از چندجمله‌ای‌های لاگر بر پایه‌ی نقاط گاوس—لاگر استفاده می‌کنیم. به این منظور برای یک عدد صحیح و مثبت N، فرض می‌کنیم $\mathcal{P}_N(۰,\infty)$ مجموعه‌ی چندجمله‌ای‌های جبری از درجه‌ی حداکثر N باشد و $t^N_{\beta,j}$ برای $۰ \leq j \leq N$ ریشه‌های حقیقی و متمایز $\mathcal{L}^{(\beta)}_{N+۱}(t)$ باشند. این ریشه‌ها به نقاط درون‌یاب گاوس—لاگر مشهورند. توزیع نقاط گاوس—لاگر در بازه‌ی $(۰,\infty)$ برای چند مقدار مختلف N و β در شکل‌های (۱—۱) و (۱—۲) آورده شده‌اند. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود توزیع این نقاط یکسان نیست به طوری که با افزایش N، به ازای β ثابت فاصله‌ی نقاط از یک‌دیگر بیشتر می‌شود و برای یک N ثابت، افزایش β، تجمع نقاط را در پی خواهد داشت. تنوع توزیع نقاط، این امکان را می‌دهد که متناسب با تغییرات تابع، N و β را به گونه‌ای انتخاب کنیم که خطا به حداقل برسد. در فصل‌های بعد خواهیم دید که چطور می‌توان با انتخاب مناسب β دقت جواب را بهبود بخشید.



شکل ۱—۱: توزیع نقاط درون‌یاب به ازای مقادیر متفاوت N

اهمیت و کاربرد نقاط گاوس—لاگر در فرمول انتگرال‌گیری گاوسی است. به این صورت که فرض کنید تابع ϕ یک تابع پیوسته روی $(۰,\infty)$ باشد. در این صورت طبق فرمول انتگرال‌گیری گاوسی خواهیم داشت

$$\sum_{j=۰}^{N} \phi(t^N_{\beta,j})\omega^N_{\beta,j} \simeq \int_{۰}^{\infty} \phi(t)\omega_\beta(t)dt,$$



شکل ۱—۲: توزیع نقاط درون‌یاب به ازای مقادیر متفاوت β

که تقریب انتگرال برای چندجمله‌ای‌های تا درجه‌ی $۲N+۱$ با مقدار دقیق انتگرال برابر است. در این‌جا $\omega_{\beta,j}^N$ وزن‌های متناظر با نقاط $t_{\beta,j}^N$ برای $۰ \le j \le N$ هستند که توسط

$$\omega_{\beta,j}^N = \frac{۱}{t_{\beta,j}^N \left(\partial_t \mathcal{L}_{N+۱}^{(\beta)}(t_{\beta,j}^N)\right)^۲}, \qquad ۰ \le j \le N,$$

تعریف می‌شوند (رابطه‌ی (۲.۱۰) از [۲۱]).

ضرب‌داخلی و نرم گسسته برای هر $u, v \in L_{\omega_\beta}^۲(۰,\infty)$ به صورت

$$(u,v)_{\omega_\beta,N} = \sum_{j=۰}^{N} u(t_{\beta,j}^N)v(t_{\beta,j}^N)\omega_{\beta,j}^N, \qquad \|v\|_{\omega_\beta,N} = (v,v)_{\omega_\beta,N}^{\frac{۱}{۲}},$$

تعریف می‌شوند. بنابراین برای هر $\phi \in \mathcal{P}_N(۰,\infty)$ و هر $\phi\psi \in \mathcal{P}_{۲N+۱}(۰,\infty)$، و با استفاده از خاصیت فرمول انتگرال‌گیری گاوسی خواهیم داشت

$$(\phi,\psi)_{\omega_\beta} = (\phi,\psi)_{\omega_\beta,N}, \qquad \|\phi\|_{\omega_\beta} = \|\phi\|_{\omega_\beta,N}. \qquad (۳)$$

درون‌یاب گاوس—لاگر بهبود یافته که با $I_{\beta,N}v \in \mathcal{P}_N(۰,\infty)$ نشان داده می‌شود با رابطه‌ی

$$I_{\beta,N}v(t_{\beta,j}^N) = v(t_{\beta,j}^N), \qquad ۰ \le j \le N,$$

مشخص می‌شود. ملاحظه می‌شود که با استفاده از رابطه‌ی (۳)، برای هر $\phi \in \mathcal{P}_{N+1}(0,\infty)$

$$(I_{\beta,N}v,\phi)_{\omega_\beta}=(I_{\beta,N}v,\phi)_{\omega_\beta,N}.$$

از طرفی طبق تعریف ضرب داخلی گسسته و ویژگی تابع درون‌یاب

$$\begin{aligned}(I_{\beta,N}v,\phi)_{\omega_\beta,N} &= \sum_{j=0}^{N} I_{\beta,N}v(t^N_{\beta,j})\phi(t^N_{\beta,j})\omega^N_{\beta,j}\\ &= \sum_{j=0}^{N} v(t^N_{\beta,j})\phi(t^N_{\beta,j})\omega^N_{\beta,j}\\ &= (v,\phi)_{\omega_\beta,N},\end{aligned}$$

و لذا

$$(I_{\beta,N}v,\phi)_{\omega_\beta}=(I_{\beta,N}v,\phi)_{\omega_\beta,N}=(v,\phi)_{\omega_\beta,N}. \quad (۴)$$

مجموعه‌ی $\{\mathcal{L}^{(\beta)}_0(t),\ldots,\mathcal{L}^{(\beta)}_N(t)\}$ به دلیل ویژگی تعامد و در نتیجه استقلال خطی، یک پایه‌ی متعامد برای $\mathcal{P}_N(0,\infty)$ تشکیل می‌دهند. بنابراین تابع درون‌یاب $I_{\beta,N}$ را می‌توان توسط ترکیب خطی این چندجمله‌ای‌ها نوشت، یعنی داریم

$$I_{\beta,N}v(t)=\sum_{l=0}^{N}\tilde{v}^N_{\beta,l}\mathcal{L}^{(\beta)}_l(t).$$

با ضرب دو طرف این رابطه در $\mathcal{L}^{(\beta)}_l(t)$، برای $0 \le l \le N$ و ثابت، و استفاده از روابط (۲) و (۴)، ضرایب این بسط به شکل

$$\tilde{v}^N_{\beta,l}=\beta(I_{\beta,N}v,\mathcal{L}^{(\beta)}_l)_{\omega_\beta}=\beta(v,\mathcal{L}^{(\beta)}_l)_{\omega_\beta,N},$$

به دست می‌آیند.

لم ۱۴.۱ فرض می‌کنیم $\phi \in \mathcal{P}_{N+1}(0,\infty)$، در این صورت داریم

$$\|\phi\|_{\omega_\beta,N}\le\|\phi\|_{\omega_\beta}.$$

اثبات. با توجه به ویژگی پایه بودن چندجمله‌ای‌های لاگر داریم

$$\phi(t)=\sum_{l=0}^{N+1}\hat{\phi}^N_{\beta,l}\mathcal{L}^{(\beta)}_l(t). \quad (۵)$$

از طرفی چون $I_{\beta,N} \in \mathcal{P}_N(0,\infty)$، پس برای $l = 1,\dots,N$، $I_{\beta,N}\mathcal{L}_l^{(\beta)}(t) = \mathcal{L}_l^{(\beta)}(t)$. بنابراین با اثر دادن تابع درون‌یاب به دو طرف رابطه‌ی (۵)، به دست می آوریم

$$I_{\beta,N}\phi(t) = \sum_{l=0}^{N} \hat{\phi}_{\beta,l}^{N}\mathcal{L}_l^{(\beta)}(t) + \hat{\phi}_{\beta,N+1}^{N} I_{\beta,N}\mathcal{L}_{N+1}^{(\beta)}(t).$$

اکنون قرار می‌دهیم

$$I_{\beta,N}\mathcal{L}_{N+1}^{(\beta)}(t) = \sum_{l=0}^{N} d_{\beta,l}^{N}\mathcal{L}_l^{(\beta)}(t).$$

با به کار بردن روابط (۲) و (۴) برای رابطه‌ی حاصل شده نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned} d_{\beta,l}^{N} &= \beta(I_{\beta,N}\mathcal{L}_{N+1}^{(\beta)}, \mathcal{L}_l^{(\beta)})_{\omega_\beta} \\ &= \beta(\mathcal{L}_{N+1}^{(\beta)}, \mathcal{L}_l^{(\beta)})_{\omega_\beta,N} \\ &= \beta(\mathcal{L}_{N+1}^{(\beta)}, \mathcal{L}_l^{(\beta)})_{\omega_\beta} = 0, \qquad 0 \le l \le N. \end{aligned}$$

بنابراین $I_{\beta,N}\mathcal{L}_{N+1}^{(\beta)}(t) = 0$. بر اساس رابطه‌ی (۴)، به راحتی می‌توان دید

$$\|\phi\|_{\omega_\beta,N}^{2} = \|I_{\beta,N}\phi\|_{\omega_\beta,N}^{2} = \|I_{\beta,N}\phi\|_{\omega_\beta}^{2}.$$

از طرف دیگر

$$\begin{aligned} \|I_{\beta,N}\phi\|_{\omega_\beta}^{2} &= \left(\sum_{l=0}^{N} \hat{\phi}_{\beta,l}^{N}\mathcal{L}_l^{(\beta)}(t), \sum_{l=0}^{N} \hat{\phi}_{\beta,l}^{N}\mathcal{L}_l^{(\beta)}\right)_{\omega_\beta} \\ &= \sum_{l=0}^{N} (\hat{\phi}_{\beta,l}^{N})^{2}\|\mathcal{L}_l^{(\beta)}\|_{\omega_\beta}^{2} \\ &\le \sum_{l=0}^{N+1} (\hat{\phi}_{\beta,l}^{N})^{2}\|\mathcal{L}_l^{(\beta)}\|_{\omega_\beta}^{2} = \|\phi\|_{\omega_\beta}^{2}, \end{aligned}$$

و نتیجه‌ی مطلوب به دست می آید.

■

در فصل دوم با استفاده از روش هم‌مکانی لاگر در فضاهای $L^2(0,\infty)$ و $L_{\omega_\beta}^{2}(0,\infty)$، تقریبی از جواب معادلات دیفرانسیل عادی را به دست می آوریم و برآورد خطای این تقریب را نشان خواهیم داد.

در فصل سوم، این روش را برای حل معادلات همیلتونی، معادلات دیفرانسیل سرسخت، معادلات انتگرال و معادلات با مشتقات پاره‌ای بررسی خواهیم کرد.

فصل ۲

حل معادلات دیفرانسیل معمولی با روش هم‌مکانی لاگر

در این فصل، ابتدا حل معادلات دیفرانسیل معمولی با روش هم‌مکانی و به کمک درون‌یاب گاوس—لاگر در فضای وزن‌دار $L^{2}_{\omega_\beta}(0,\infty)$ بررسی شده و تحلیل خطا در نرم وزن‌دار انجام خواهد شد. عامل وزن در محاسبه‌ی نرم خطا باعث می‌شود، مسایلی که خطای نقطه‌وارشان رشد سریعی دارند نیز هم‌چنان نرم خطای کوچکی روی کل دامنه داشته باشند. برای حل این گونه از مسایل روش هم‌مکانی بر اساس توابع لاگر در فضای $L^{2}(0,\infty)$ مطرح شده و پایداری جواب تقریبی در دامنه‌های بزرگ را به وسیله‌ی آن نشان خواهیم داد. سپس تعمیم این دو روش را برای دستگاه معادلات دیفرانسیل بررسی کرده و در نهایت کارایی این دو روش توسط مثال‌های عددی مورد آزمایش قرار می‌گیرند.

۲—۱ روش هم‌مکانی بر اساس چندجمله‌ای‌های لاگر در فضای $L^{2}_{\omega_\beta}(0,\infty)$

مساله‌ی مقدار اولیه‌ی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}U(t) = f(U(t),t), & t > 0, \\ U(0) = U_0. \end{cases} \tag{1}$$

با فرض پیوستگی $f(U(t),t)$، این مساله جواب خواهد داشت.

تابع $U(t)$ را به وسیله‌ی $u^N(t) \in \mathcal{P}_{N+1}(0,\infty)$ به گونه‌ای تقریب می‌زنیم به طوری که $u^N(t)$ به ازای نقاط هم‌مکانی $t^N_{\beta,j}$ برای $0 \le j \le N$ به طور دقیق در معادله صدق کند یعنی

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u^N(t^N_{\beta,k}) = f(u^N(t^N_{\beta,k}), t^N_{\beta,k}), & 0 \le k \le N, \\ u^N(0) = U_0. \end{cases} \tag{2}$$

به این روش، روش هم‌مکانی گویند.

با توجه به پایه بودن چندجمله‌ای‌های لاگر، می‌توان $u^N(t)$ را به صورت ترکیب خطی

$$u^N(t) = \sum_{l=0}^{N+1} \widetilde{u}^N_{\beta,l}\mathcal{L}^{(\beta)}_l(t), \qquad t \ge 0, \tag{3}$$

نوشت.

برای یافتن ضرایب $\widetilde{u}^N_{\beta,l}$ کافیست به ازای هر $0 \le l \le N+1$ و ثابت، دو طرف معادله‌ی (۳) را در $\mathcal{L}^{(\beta)}_l(t)\omega_\beta(t)$ ضرب کرده و از دو طرف روی بازه‌ی $(0,\infty)$ انتگرال بگیریم. در این صورت ،

$$\widetilde{u}^N_{\beta,l} = \beta(u^N, \mathcal{L}^{(\beta)}_l)_{\omega_\beta}.$$

از طرفی برای $0 \le l \le N$ می‌دانیم که $\mathcal{L}^{(\beta)}_l(t) \in \mathcal{P}_N(0,\infty)$ و لذا $\mathcal{L}^{(\beta)}_l(t)u^N(t) \in \mathcal{P}_{2N+1}(0,\infty)$، که نتیجه می‌دهد

$$(u^N, \mathcal{L}^{(\beta)}_l)_{\omega_\beta} = (u^N, \mathcal{L}^{(\beta)}_l)_{\omega_\beta,N}.$$

پس ضرایب برای $0 \le l \le N$ به شکل

$$\begin{aligned} \widetilde{u}^N_{\beta,l} &= \beta(u^N, \mathcal{L}^{(\beta)}_l)_{\omega_\beta} = \beta(u^N, \mathcal{L}^{(\beta)}_l)_{\omega_\beta,N} \\ &= \beta\sum_{j=0}^{N} u^N(t^N_{\beta,j})\mathcal{L}^{(\beta)}_l(t^N_{\beta,j})\omega^N_{\beta,j}, \end{aligned} \tag{4}$$

مشخص می‌شوند. علاوه بر این، با توجه به این‌که برای $0 \le l \le N+1$، $\mathcal{L}^{(\beta)}_l(0) = 1$ و $u^N(0) = U_0$، به دست می آوریم

$$U_0 = u^N(0) = \sum_{l=0}^{N+1} \widetilde{u}^N_{\beta,l}\mathcal{L}^{(\beta)}_l(0) = \sum_{l=0}^{N+1} \widetilde{u}^N_{\beta,l} = \sum_{l=0}^{N} \widetilde{u}^N_{\beta,l} + \widetilde{u}^N_{\beta,N+1},$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \widetilde{u}^N_{\beta,N+1} &= U_0 - \sum_{l=0}^{N} \widetilde{u}^N_{\beta,l} \\ &= U_0 - \beta\sum_{l=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} u^N(t^N_{\beta,j})\mathcal{L}^{(\beta)}_l(t^N_{\beta,j})\omega^N_{\beta,j}. \end{aligned} \tag{5}$$