بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی گرایش کاربردی

عنوان:

روشهای نقطه درونی برای حل مسائل برنامه ریزی خطی

استاد راهنما:

دکتر حسین منصوری

استاد مشاور:

دکتر مریم زنگی آبادی

توسط:

حجت اله عسکری

مهرماه ۱۳۸۸

کلیه حقوق مادی مرتبط و نتایج
مطالعات، ابتکارات و نوآوری‌های ناشی
از تحقیق موضوع این پایان نامه متعلق به
دانشگاه شهرکرد است.

تشکر و قدردانی

سپاس خدای را که ما را توان آموختن داد و در پرتو الطاف و عنایات بیشمارش برایمان راه علم و اندوختن آن را با همه مشکلاتش، هموار ساخت؛ پرودگار متعالی که هر توفیقی در گرو عنایت اوست.

بر خود لازم می دانم که پیشاپیش به مصداق حدیث ((مَن لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق)) از تمامی کسانی که مرا یاری دادند که توشه‌ای از علم و دانسته ها برگیرم، تقدیر و تشکر نمایم. قبل از همه شایسته است به پاس زحمات استاد راهنمای گرامی‌ام، جناب آقای دکتر حسین منصوری که همواره از راهنمائیها و ارشادات ایشان بهره مند بوده‌ام کمال تشکر و قدردانی را داشته باشم، همچنین از خانم دکتر مریم زنگی آبادی که در این پایان نامه استاد مشاور بنده بوده‌اند سپاسگزاری می نمایم. همچنین از اساتید بزرگوار جناب آقای دکتر علی دلاور خلفی و دکتر علیرضا امینی هرندی که نهایت عنایت را در مطالعه، و داوری در جلسه دفاعیه نموده اند، سپاسگزارم. از کلیه اساتید دلسوز و بزرگوارم به خاطر زحماتی که در طول دوره تحصیل متقبل شدند تشکر و قدردانی می نمایم.

از همه اعضای خانواده ام بالاخص پدر و مادر بزرگوارم به خاطر تمامی مهربانی ها، دلگرمی ها، همفکریها و زحماتشان که بدون هیچ چشمداشتی خالصانه در طول زندگیم نثارم کرده‌اند سپاسگزارم.

در پایان امید آن را دارم که لیاقت و توفیق داشته باشم تا بگونه‌ای زندگی کنم که پاسخی مثبت و ارزشمند به زحمت همه کسانی باشد که مرا در زندگی و در امر تحصیل و آموختن به نوعی یاری داده‌اند.

حجت الله عسکری

مهرماه ۱۳۸۸

این مجموعه کوچک وناقابل را به پاس عاطفه سرشار و محبت بی‌دریغی که هیچ‌گاه فروکش نخواهد کرد به مهربان ترین کسان خویش یعنی خانواده عزیز و ارجمندم به خصوص

پدر سخت‌کوش و

مادر مهربانم

تقدیم می‌دارم.

چکیده

برنامه ریزی خطی مسالهای است با مینیمم سازی یا ماکزیمم سازی یک تابع خطی، همراه با محدودیت های خطی به صورت مساوی یا نامساوی است. اولین روش برای حل این مسائل روش سیمپلکس بود که در سال ۱۹۴۷ توسط [۵] *Gorge Dantzig* ارائه شد. حتی بعد از این که *Klee* و *Minty* در [۱۲] ثابت کردند که پیچیدگی روش سیمپلکیس چند جملهای نیست، این روش همچنان برای حل مسائل برنامه ریزی خطی استفاده می شد.

اولین الگوریتم زمان چند جملهای در سال ۱۹۷۹ توسط [۱۱] *Khachiyan* ارائه شد. مهمترین پیشرفت در زمینه برنامه ریزی خطی مقاله[۱۰] *Karmarkar* در سال ۱۹۸۴ بود که روش نقطه درونی زمان چند جملهای را ارائه داد. این روشها در عمل کارائی بیشتری دارند. ممکن است یک تفاوت بین روشهای نقطه درونی وجود داشته باشد مطابق با این که آیا آنها روشهای نقطه درونی شدنی یا روشهای نقطه درونی نشدنی هستند.

روشهای نقطه درونی شدنی از یک نقطه شدنی اکید شروع میکنند. و شدنی بودن در طول الگوریتم حفظ می شود. بدست آوردن نقطه اولیه شدنی در همه روشهای نقطه درونی غیر بدیهی میباشد. از طرف دیگر، روشهای نقطه درونی نشدنی با یک نقطه دلخواه مثبت شروع میشوند. و با نزدیک شدن به جواب بهین، شدنی بودن تامین میشود.

در این پایان نامه بعضی روشهای نقطه درونی شدنی و نشدنی را ارائه میکنیم. سرانجام فصل ۵

شامل برنامه مطلب، از الگوریتم ارائه شده در فصل ۴ و حل چند مثال به کمک این الگوریتم می‌باشد.

کلمات کلیدی

برنامه ریزی خطی، پرایمال ـدوآل، روش نقطه درونی شدنی، روش نقطه درونی نشدنی، مسیر مرکز، دوآلیتی گپ، جهت جستجو، نرم‌افزار مطلب.

فهرست مندرجات

۱ خلاصه ای از برنامه ریزی خطی و کاربردهای آن ۱

۱.۱ مقدمه ۱

۲.۱ تاریخچه‌ی برنامه ریزی خطی ۲

۳.۱ خلاصه‌ای از برنامه ریزی خطی ۳

۴.۱ مدل عمومی برنامه ریزی خطی ۵

۱.۴.۱ فرمهای متداول برنامه ریزی خطی ۷

۲.۴.۱ ویژگی های فرم کانونی ۸

۳.۴.۱ تبدیل مساله برنامه ریزی خطی به فرم کانونی ۸

۴.۴.۱ فرم استاندارد ۹

۵.۴.۱ ویژگی های فرم استاندارد ۱۰

۵.۱ روشهای حل مساله برنامه ریزی خطی ۱۱
۱.۵.۱ روش ترسیمی ۱۲
۲.۵.۱ خلاصه روش ترسیمی ۱۳
۳.۵.۱ روش سیمپلکس ۱۳
۴.۵.۱ خلاصه روش سیمپلکس ۱۴

۶.۱ مساله برنامه ریزی خطی دوآل ۱۵
۱.۶.۱ فرمول بندی مساله دوآل ۱۵
۲.۶.۱ شکل متعارفی دوآل ۱۵
۳.۶.۱ فرم استاندارد مساله دوآل ۱۷
۴.۶.۱ قاعده کلی برای نوشتن دوآل مساله پرایمال ۱۸

۷.۱ قضایای دوال ۱۸

۲ روش نقطه درونی شدنی ۲۱

۱.۲ تاریخچه ۲۱

۲.۲ حل مساله برنامه ریزی خطی به وسیله بدست آوردن جواب سیستم نامعادلات . ۲۲

۳.۲ مسیر مرکز، جهت نیوتن، خواص گام نیوتن، اندازه نزدیکی ۳۰

۱.۳.۲ تعریف مسیر مرکز ۳۱
۲.۳.۲ تعیین جهت نیوتن ۳۲
۳.۳.۲ خواص گام نیوتن ۳۳
۴.۳.۲ اندازه نزدیکی و همگرایی درجه ۲ روش پرایمال ـدوآل ۳۵

۴.۲ الگوریتم گام نیوتن و آنالیز آن ۳۶
۱.۴.۲ الگوریتم گام نیوتن ۳۷
۲.۴.۲ آنالیز پیچیدگی ۳۸

۵.۲ یک روش پرایمال — دوآل نقطه درونی با استفاده از تابع مانع لگاریتمی ۴۱
۱.۵.۲ تابع مانع لگاریتمی پرایمال ۴۱

۶.۲ الگوریتم های مانع لگاریتمی پرایمال — دوآل ۴۵
۱.۶.۲ الگوریتم مانع لگاریتمی پرایمال — دوآل با گام نیوتن ۴۵
۲.۶.۲ الگوریتم مانع لگاریتمی پرایمال — دوآل با گام بلند ۵۰
۳.۶.۲ بررسی تفاوت بین دو الگوریتم: ۵۴

۳ روش های نقطه درونی نشدنی ۵۶

۱.۳ مقدمه ۵۶

۲.۳ تاریخچه ۵۷

۳.۳ روش های نقطه درونی نشدنی برای حل مسائل برنامه ریزی خطی ۵۸

۴.۳ الگوریتم های نقطه درونی نشدنی ۵۹
۱.۴.۳ روش نقطه درونی نشدنی $Wright$ ٦۰
۲.۴.۳ روش نقطه درونی نشدنی Ye ٦۴
۳.۴.۳ روش نقطه درونی نشدنی $Kojima$ و همکاران ٦۵
۴.۴.۳ روش نقطه درونی نشدنی $Zhang$ ٦٦
۵.۴.۳ اولین روش نقطه درونی نشدنی $Mizuno$ ٦۷
٦.۴.۳ دومین روش نقطه درونی نشدنی $Mizuno$ ٦۸
۷.۴.۳ روش نقطه درونی نشدنی $Potra$ ۷۰

۴ الگوریتم نقطه درونی نشدنی گام نیوتن $O(n)$ برای حل مسائل برنامه ریزی خطی ۷۲

۱.۴ خلاصه ۷۲

۲.۴ مقدمه ۷۳

۳.۴ روش نقطه درونی نشدنی گام نیوتن ۷۵
۱.۳.۴ مساله های اغتشاش یافته ۷۵
۲.۳.۴ مسیر مرکز مساله های اغتشاش یافته ۷۷
۳.۳.۴ یک تکرار از الگوریتم ۷۸

۴.۳.۴ الگوریتم ۸۱

۴.۴ آنالیز الگوریتم ۸۱
۱.۴.۴ اثر گام شدنی و انتخاب θ ۸۱
۲.۴.۴ جهت های جستجوی d_x^f و d_s^f ۸۸
۳.۴.۴ کران بالا برای $w(v)$ ۸۹
۴.۴.۴ کران بالا برای $||q||$ ۹۱
۵.۴.۴ کران برای s, x و انتخاب τ $\alpha,$ ۹۵
۶.۴.۴ کران برای $\bar{\kappa}(\zeta)$ ۹۶
۷.۴.۴ آنالیز پیچیدگی ۹۹

۵ محاسبات عددی **۱۰۲**

۱.۵ توضیح الگوریتم نقطه درونی نشدنی ۱۰۳
۱.۱.۵ الگوریتم نقطه درونی نشدنی ۱۰۹

۲.۵ حل مثال ۱۱۰

A بعضی لم های تکنیکی **۱۱۳**

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۱۲۲

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۱۲۶

منابع ۱۳۰

فهرست نمادها

فضای برداری اقلیدسی n بعدی	R^n
فضای ماتریس‌های حقیقی $n \times n$	$R^{n\times n}$
متعلق است به	$\in$
متعلق نیست به	$\notin$
مجموعه اعداد حقیقی	$\mathbb{R}$
اجتماع	$\bigcup$
اشتراک	$\bigcap$
ترانهاده ماتریس $A \in R^{n\times n}$	A^T
مولفه (i,j) ام از ماتریس $A \in R^{n\times n}$	A_{ij}
بردار همه یک	e
ماتریس واحد در فضای مناسب	I
پارامتر باریر یا پارامتر دوآلیتی گپ	μ
مقدار اولیه از μ	μ°
$i-$ امین مولفه از بردار x	x_i
ترانهاده بردار x	x^T
نرم اقلیدسی از بردار x	$\|\|x\|\|$
نرم بی نهایت از بردار x	$\|\|x\|\|_\infty$
مولفه ماکزیمم از x	$x_{\max}$
مولفه مینیمم از x	$x_{\min}$

جهت جستجو در فضای x	Δx
جهت جستجو در فضای s	Δs
پارامتر دقت	ϵ
در تغییر μ استفاده می شود	θ
	$v = \sqrt{\frac{xs}{\mu}}$
پارامتر اندازه	τ
لگاریتم طبیعی از t	$\log(t)$
مساله برنامه ریزی خطی در فرم استاندارد	(P)
مساله دوآل از (P)	(D)
مجموعه شدنی از مساله (P)	$\mathcal{P}$
مجموعه شدنی از مساله (D)	$\mathcal{D}$
درون ناحیه شدنی از مساله (P)	$\mathcal{P}^\circ$
درون ناحیه شدنی از مساله (D)	$\mathcal{D}^\circ$
مجموعه بهین از مساله (P)	$\mathcal{P}^*$
مجموعه بهین از مساله (D)	$\mathcal{D}^*$
همسایگی	$\mathcal{N}$

پیشگفتار

برنامه ریزی خطی مساله‌ای است با می نیمم سازی یا ماکزیمم سازی یک تابع خطی، همراه با محدودیت های خطی به صورت مساوی یا نامساوی است. اولین روش برای حل این مسائل روش سیمپلکس بود که در سال ۱۹۴۷ توسط [۵] $Gorge\ Dantzig$ ارائه شد. $Klee$ و $Minty$ در [۱۲] ثابت کردند که پیچیدگی روش سیمپلکیس در بدترین حالت از نوع نمایی است.

مهمترین پیشرفت در زمینه برنامه ریزی خطی مقاله[۱۰] $Karmarkar$ در سال ۱۹۸۴ بود که روش نقطه درونی جدیدی به نام روش باریر لگاریتم را ارائه داد. که یک کلاس از الگوریتم‌های با پیچیدگی چندجمله‌ای را در بر می‌گرفت. اولین روش نقطه درونی نشدنی برای حل مسائل برنامه ریزی خطی توسط [۱۵] $Lusting$ و [۲۵] $Tanable$ ارائه شد.

اولین نتیجه تئوری روی روشهای نقطه درونی نشدنی پرایمال—دوآل به وسیله $Kojima$ و همکاران [۱۳] بدست آمد. [۱۷] $Mizuno$ و [۲۰] $Potra$ دو روش نقطه درونی نشدنی $predictor - corrector$ با پیچیدگی $O(n\log(\frac{1}{\epsilon}))$ ارائه کردند. که بهترین پیچیدگی برای روشهای نقطه درونی نشدنی می‌باشد.

در این پایان نامه به مطالعه روش های نقطه درونی برای حل مسائل برنامه ریزی خطی می‌پردازیم. به همین منظور مباحث خود را در پنج فصل به صورت زیر تنظیم کرده‌ایم.

فصل اول، پیش نیاز فصل های دیگر است که در آن بعد از بیان تاریخچه و مراحل فرموله کردن و ارائه چند مثال، مساله های پرایمال و دوآل را در دو فرم استاندارد و متعارفی بیان می‌کنیم.

در فصل دوم در مورد روش نقطه درونی شدنی بحث می‌کنیم. بعد از معرفی اجزاء اصلی این روش، چند الگوریتم ارائه می‌دهیم و الگوریتم‌ها را با هم مقایسه می‌کنیم.

در فصل سوم چندین روش نقطه درونی نشدنی را ارائه داده و بعضی از روش های نقطه درونی

نشدنی ارائه شده را به طور مختصر توضیح می‌دهیم.

در فصل چهارم الگوریتم روش نقطه درونی نشدنی گام نیوتن $O(n)$ را برای حل مسائل برنامه ریزی خطی را بررسی می‌کنیم.

در فصل پنجم بعد از بیان جزئیات الگوریتم روش نقطه درونی نشدنی ارائه شده در فصل چهارم، چند مثال عددی را به کمک نرم افزار مطلب حل می‌کنیم و جواب بهین را برای هریک از مثال ها بدست می آوریم.

فصل ۱

خلاصه ای از برنامه ریزی خطی و کاربردهای آن

۱.۱ مقدمه

پیچیدگی و ناآرام بودن محیط سازمانها، باعث شده است که مدیران به آسانی تصمیم گیری نکنند. مدیران برای رسیدن به یک هدف مشخص با محدودیت های بسیاری چون محدودیت منابع، انرژی، نیروی انسانی، مواد، پول، ...مواجه هستند. یکی از اهدف اساسی مدیران و سازمانها، رسیدن به سود بیشتر می باشد به عبارت دیگر حداکثر کردن سود موسسه می باشد. از طرف دیگر بخشی از سازمانها مانند واحد تولید و بسته بندی نیز هستند که در صدد حداقل کردن هزینه‌ها، ضایعات، ... خود

می‌باشند. با افزایش عوامل و فاکتورهای تصمیم گیری و با تنوع محدودیت های نیل به هدف، مدیر ناچار است که از روشهای کمی برای برنامه ریزی و تصمیم گیری استفاده کند یکی از روشهای متداول برای بهینه کردن یک هدف با توجه به محدودیت های مختلف، برنامه ریزی خطی است.

در این فصل به یادآوری اجزای مساله برنامه ریزی خطی و روش فرموله کردن مساله می پردازیم. بعد از فرموله کردن چند مساله معروف، مدل عمومی برنامه ریزی خطی را ارائه می دهیم. آنگاه فرم کانونی و استاندارد را تعریف کرده و روشهای حل مسائل برنامه ریزی خطی را به طور مختصر بیان می‌کنیم. در پایان قضایای مربوطه را می آوریم.
عمده مطالب این فصل از مراجع [۱،۲،۴] گردآوری شده است.

۲.۱ تاریخچه‌ی برنامه ریزی خطی

برنامه ریزی خطی مساله‌ای است با می نیمم سازی یا ماکزیمم سازی یک تابع خطی، همراه با محدودیت های خطی به صورت مساوی یا نامساوی است. شروع برنامه ریزی خطی در سال ۱۹۴۱ با تحقیقات اقتصادانان معروف $leontief$ همراه می باشد. همزمان با وی دانشمند دیگری به نام $Hitchcock$ مدل حمل و نقل را به طریق برنامه ریزی خطی تفسیر نمود. و همین تفسیر در سال ۱۹۴۷ توسط $Koopmans$ انجام شد.
پیشرفت فن برنامه ریزی خطی و حل آن مدیون [۵] $Gorge\ Dantzig$ ریاضی دان معروف و همکاران وی می باشد. اولین روش برای حل این مسائل روش سیمپلکس بود که در سال ۱۹۴۷ توسط [۵] $Gorge\ Dantzig$ ارائه شد. روند انجام الگوریتم سیمپلکس بدین شکل بود که از یک نقطه راسی شدنی شروع می کرد و برای بهبود مقدار تابع هدف در جهت نقاط راسی شدنی مجاور حرکت می کرد و این روند تا زمانی ادامه می یافت که مقدار تابع هدف جاری بهتر از مقدار تابع هدف در مرحله قبل

باشد. هرچند $Klee$ و $Menty$ در [۱۲] ثابت کردند که پیچیدگی روش سیمپلکیس در بدترین حالت از نوع نمایی است ولی این روش همچنان تنها روش برای حل مسائل برنامه ریزی خطی بود. اولین الگوریتم زمان چند جمله‌ای در سال ۱۹۷۹ توسط [۱۱] $Khachiyan$ ارائه شد. او همچنین ثابت کرد که مسائل برنامه ریزی خطی کلاسی از مسائل حل پذیر در زمان چند جمله‌ای است یعنی برای هر نمونه از مساله زمان مورد نیاز برای محاسبه جواب، از بالا به یک چند جمله ای کراندار است.

۳.۱ خلاصه‌ای از برنامه ریزی خطی

برنامه ریزی خطی شاخه‌ای از برنامه ریزی ریاضی می باشد. برنامه ریزی خطی شامل مدلی است که دارای یک تابع هدف و چند محدودیت است که روابط خطی بین متغیرهای آن در تابع هدف و محدودیت وجود دارد.

در بکارگیری برنامه ریزی خطی، سه گام اساسی را باید در نظر گرفت:

۱ — مساله باید به گونه‌ای تعریف شود که با استفاده از برنامه ریزی خطی قابل حل باشد.

۲— مساله باید در قالب یک مدل ریاضی فرموله شود.

۳— مساله باید با استفاده از یک تکنیک مشخص ریاضی قابل حل باشد.

نام برنامه ریزی خطی بر گرفته از این واقعیت است که روابط ریاضی بکار رفته در مدل ریاضی خطی هستند و تکنیک حل یک مدل شامل مراحل ریاضی از پیش تعیین شده به عنوان یک برنامه می‌باشد. به طور خلاصه، برنامه ریزی خطی نوعاً به مسائل تخصیص منابع محدود بین فعالیتهای رقیب در جهت یافتن بهترین راه حل ممکن (بهینه) مربوط می شود. به عبارت دیگر، چنانچه انجام پاره‌ای از فعالیت ها منوط به بهره گیری از منابع محدودی که مورد نیاز مشترک آنهاست باشد، مساله تخصیص منابع و در نتیجه تعیین حجم فعالیت ها مطرح خواهد شد.