بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه آزاد اسلامی

واحد تهران مرکزی

دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد (M.Sc)

گرایش: آنالیز عددی

عنوان

روش هم محلی بی اسپلاین برای حل مسائل غیرعادی و مختل سهموی

استاد راهنما

دکتر جلیل رشیدی نیا

استاد مشاور

دکتر مجید امیرفخریان

پژوهشگر

شکوفه شریفی

زمستان ۱۳۸۹

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

خدای را بسی شاکرم که از روی کرم، پدر و مادری فداکار نصیبم ساخته تا در سایه ی درخت پربار وجودشان بیاسایم و از ریشه ی آن ها شاخ و برگ گیرم و در راه کسب علم و دانش تلاش نمایم.

والدینی که بودنشان تاج افتخاری است بر سرم و نامشان دلیلی است بر بودنم چرا که این دو وجود پس از پروردگار مایه ی هستی ام بوده اند دستم را گرفتند و راه رفتن را در این وادی زندگی پر از فراز و نشیب آموختند.

آموزگارانی که برایم زندگی، بودن و انسان بودن را معنا کردند.

حال این پایان نامه برگ سبزی است تحفه درویش تقدیم آنان

....

تقدیر و تشکر

حمد و ثنأ می‌گویم آن یکتا معبودم را که لطف و رحمتش بر جهان هستی سایه افکنده و مرا نیز از این سایه بهره‌ای بوده که تا بدین جا کوله بار دانشم را رسانیده‌ام.

گرچه این کوله سبکبار است اما همین را عنایت او بوده که توان قدم در این راه را به من داد.

از استاد بسیار بزرگوار و ارجمندم جناب آقای دکتر رشیدی‌نیا صمیمانه تشکر و سپاسگذاری می‌نمایم که ایشان همواره با صبر و بردباری و رویی خوش راهنما و پاسخگوی من بودند و نه تنها از وجود ایشان بسیار بهره علمی بردم بلکه فراوان درس‌های اخلاق نیز آموختم.

از جناب آقای دکتر امیرفخریان استاد مشاور اینجانب به خاطر راهنمایی‌های علمی ایشان در پیشبرد اهداف خود در این پایان‌نامه نیز بسیار تشکر و قدردانی می‌نمایم.

همچنین از استاد محترم آقای دکتر ادیبی که داوری پایان‌نامه اینجانب را قبول زحمت نمودند کمال تشکر را دارم.

چکیده

در سال‌های اخیر توسعه روش‌های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی به دلیل سرعت محاسباتی بالا اهمیت زیادی پیدا کرده است. یک دسته از این روش‌های عددی، روش‌هایی هستند که با استفاده از توابع اسپلاین و بی‌اسپلاین به دست می آیند.

در این پایان نامه ما یک روش عددی برای حل مسایل انتشار گرمایی مختل منفرد سهموی یک بعدی ارایه می‌دهیم، این روش شامل یک روش تفاضلی متناهی ضمنی استاندارد برای گسسته‌سازی موقت روی یک شبکه یکنوا توسط روش رز و یک روش هم محلی بی‌اسپلاین روی یک شبکه قطعه‌ای از نوع شیشکین می باشد. این روش بدون شرط پایدار است و دارای مرتبه دقت $O((\Delta x)^2 + \Delta t)$ می‌باشد. این روش همگرای یکنوا است.

این پایان‌نامه براساس مرجع [۱] استوار است.

واژه‌های کلیدی: مختل منفرد، مسئله انتشار گرما، روش رز، روش هم‌محلی بی‌اسپلاین، شبکه شیشکین، همگرایی یکنوا

فهرست مندرجات

مقدمه

بسیاری از پدیده‌هایی که در طبیعت به وقوع می‌پیوندند را می‌توان با یک معادله دیفرانسیل بیان نمود، پس طبیعی است، درصدد برآییم معادلات دیفرانسیلی را که از این گونه پدیده‌های طبیعی برمی‌آیند به طور دقیق‌تر و با میزان دقت بالاتر حل کنیم. به همین ترتیب معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی از دیرباز مورد توجه دانشمندان علوم مختلف قرار داشته است.

پیشرفت علوم شناخت کاربردهای فراوان این شاخه از ریاضیات باعث توجه بسیاری از متخصصین رشته‌های مهندسی به خود شده به طوری که هر اختراع در علوم مهندسی به طریقی در ارتباط با این مقوله می‌باشد. از طرفی انواع گوناگون مسایل مشتقات جزیی سبب پویایی آن شده است. یکی از انواع بسیار رایج در این شاخه، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی از نوع سهموی است.

روش‌های زیادی برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی همراه با شرایط مرزی مورد استفاده قرار می‌گیرند که از آن جمله می‌توان به روش‌های تفاضلات متناهی، روش تیراندازی، روش هم محلی و توابع اسپلاین و غیره اشاره کرد. بسیاری از این روش‌ها در حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی و بعضاً غیرعادی به مشکلاتی برمی‌خورند که کاربرد آن‌ها را سخت و در بعضی مواقع غیر ممکن می‌کند، مثلاً عدم پایداری جواب و یا پایین بودن دقت جواب مورد نظر به خصوص وقتی که ε در مقایسه با پهنای افراز کوچک باشد، جواب را دچار نوسان

می‌کند، به طوری که حتی روش تفاضلات متناهی که از لحاظ کاربرد بسیار رواج دارد نیز مستثنی از این مشکل نیست. هنگامی که در مسایل غیر عادی (منفرد) ناپایداری برای مسئله رخ بنماید بسیار خسته کننده و غیر قابل کاربرد می‌شود.

معادلات دیفرانسیل مختل منفرد که پارامتر کوچک ε در بالاترین مرتبه مشتق ضرب شده در مهندسی و علوم طبیعی و فیزیک در مباحثی همچون شار و مدل نیمه رسانا [۲]، در مسایلی نظیر مسایل حمل و نقل با عدد Peclet بالا [۳]، معادله برگرز خطی‌سازی شده یا معادلات ناویراستوک بارینولدرز بالا [۴] و مسایل مرزی شناور با پارامتر کوچک ε [۵] کاربردهای بسیار دارد. اخیراً تلاش‌های زیادی جهت پیشرفت روش‌های عددی برای جواب مسایل مختل منفرد انجام شده است که به طور یکنوا همگرا هستند. کلاورو، جرج و لیسبنا در [٦] یک روش عددی همگرایی یکنوا با در نظر گرفتن پارامتر انتشار برای حل مسئله انتشار گرمایی یک بعدی وابسته به زمان ارایه می‌دهند که در آن روش اویلر برای گسسته‌سازی زمان و روش تفاضلات متناهی روی شبکه شیشکین برای گسسته‌سازی مکان مورد استفاده قرار می‌گیرند.

راموس در [۷] یک روش مناسب برای اینگونه مسایل مطرح نموده و همگرایی یکنوا را با در نظر گرفتن پارامتر اختلال نشان داده است. ساکایی و عثمانی در [۸] و [۹] یک مفهوم جدیدی از بی‌اسپلاین همچنین کاربردهای از اسپلاین‌های نمایی ساده برای حل مسایل مختل منفرد ارایه داده‌اند و نشان دادند که روش مطرح شده دارای محاسبات کمتری است.

سرلا و جرکوویس در [۱۰] یک مسئله مقدار مرزی مختل منفرد را با استفاده از روش هم محلی اسپلاین بررسی نمودند.

در فصل اول تعاریف کلی و اولیه که مورد نیاز می‌باشد به طور خلاصه آورده شده است.

در فصل دوم، ابتدا یک خلاصه از تاریخچه پیدایش و بکارگیری اسپلاین و درونیابی به کمک اسپلاین‌ها را ارایه می‌دهیم و به طور مفصل، دو روش برای به دست آوردن بی‌اسپلاین‌ها به

خصوص بی‌اسپلاین مکعبی مطرح نموده و در ادامه به قضایای بی‌اسپلاین می‌پردازیم.

در فصل سوم ابتدا متغیر زمان را توسط روش رُز و اویلر ضمنی گسسته‌سازی می‌کنیم، سپس متغیر مکان را روی شبکه یکنوای قطعه‌ای از نوع شیشکین گسسته‌سازی می‌کنیم و از روش هم محلی بی‌اسپلاین روی معادلات دیفرانسیل معمولی خطی حاصل از این گسسته‌سازی مکان استفاده می‌نماییم. در نهایت آنالیز همگرایی روش را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

در نهایت در فصل چهارم روش حل را برای سه مثال بکار می‌بریم و نتایج عددی را با نتایج به دست آمده قبلی مقایسه نموده و برتری و دقت روش را نشان می‌دهیم.

در این پایان‌نامه روشی جدید برای حل مسایل مختل منفرد ارایه می‌دهیم که از لحاظ به کارگیری ساده‌تر، قابل فهم و پایداری قابل توجهی نیز داشته باشد.

روش جدید ارایه شده روش هم محلی بی‌اسپلاین می‌باشد. در واقع هدف اصلی تحلیل کارآیی روش هم‌محلی بی‌اسپلاین برای اینگونه مسایل است و در نهایت به دست‌آوردن یک روش همگرایی یکنوا با دقت کافی است.

فصل ۱

کلیات و تعاریف

۱.۱ معادلات دیفرانسیل و دسته‌بندی آن‌ها

یک معادله دیفرانسیل تابعی ضمنی از متغیر یا متغیرهای مستقل، متغیر یا متغیرهای وابسته و مشتق‌های نسبی نسبت به متغیر یا متغیرهای مستقل است، معادلات دیفرانسیل در نگاه اول به دو دسته معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی تقسیم می‌شوند. اگر معادله‌ی دیفرانسیل تنها شامل یک متغیر مستقل باشد آن معادله را معادله دیفرانسیل معمولی و در غیر این صورت معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی (نسبی) نامیده می‌شود، که در ادامه بحث به آن‌ها می‌پردازیم.

روش دیگری برای دسته‌بندی معادلات دیفرانسیل وجود دارد که از نظر خطی یا غیرخطی بودن معادله دیفرانسیل است. به این معنا که اگر در هر یک از جملات معادله که حاوی متغیر یا متغیرهای وابسته با مشتقات ساده یا جزئی است شرایط زیر برقرار باشد، معادله خطی نامیده می‌شود.

۱) متغیر یا متغیرهای وابسته از توان یک باشند.

۲) متغیر یا متغیرهای تابع و مشتقات، ضریب متغیرهای وابسته و مشتقات آن‌ها نباشند.

۳) تابع مجهول یا مشتقاتش متغیر تابعی غیرخطی نباشند.

در غیر اینصورت معادله دیفرانسیل را غیرخطی می‌نامیم.

۲.۱ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی غالباً در ریاضیات و علوم مهندسی و فیزیک به کار می‌رود و زبان بین رشته‌ای علوم را تشکیل می‌دهد. معادلات با مشتقات جزئی در مسایلی

که آهنگ‌های تغییر توابع، چند متغیر مستقل را در بردارد، ظاهر می‌شوند. از آن‌جایی که روش حل یک معادله با مشتقات جزئی به نوع معادله بستگی دارد، انواع مختلف آن را باید مشخص کرد. به طور کلی معادله دیفرانسیلی که علاوه بر متغیر وابسته و متغیرهای مستقل، شامل یک یا چند مشتق نسبی متغیر وابسته باشد را معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی (نسبی) می‌گوییم. در حالت کلی این معادله به صورت زیر است:

$$f(x, y, \ldots, u, u_x, u_y, \ldots, u_{xx}, u_{yy}, \ldots) = \circ \qquad (۱.۱)$$

که شامل متغیرهای مستقل همچون x و y و ... و یک تابع مجهول u که تابعی از متغیرهای مستقل است و مشتقات جزئی $u_x, u_y, ..., u_{xx}, u_{yy}, ...$ می‌باشد.

تعریف ۱.۲.۱ مرتبه یک معادله با مشتقات جزئی، بالاترین مرتبه مشتقات جزئی ظاهر شده متغیر وابسته در معادله می‌باشد. (به عنوان مثال معادله $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}$ معادله‌ای دو متغیره از مرتبه ۲ است).

تعریف ۲.۲.۱ درجه یک معادله با مشتقات جزئی، بزرگترین درجه مشتقات جزئی متغیر وابسته در معادله می‌باشد. (به عنوان مثال معادله $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^۳ + \frac{\partial u}{\partial t} = \circ$ از درجه ۳ می‌باشد)

تعریف ۳.۲.۱ اگر معادله با مشتقات جزئی نسبت به بالاترین مشتق خود خطی باشد آن را معادله با مشتقات جزئی شبه خطی می‌نامند.

تعریف ۴.۲.۱ اگر هر یک از جملات معادله با مشتقات جزئی شامل متغیر وابسته یا مشتقات جزئی آن باشد آنگاه آن معادله با مشتقات جزئی را همگن و در غیر اینصورت غیرهمگن می‌نامند.

۳.۱ معادلات با مشتقات جزئی مرتبه اول

شکل کلی این نوع معادلات به صورت زیر است:

$$F(x_۱, x_۲, \ldots, x_N, u, \frac{\partial u}{\partial x_۱}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N}) = ۰ \qquad u = u(x_۱, \ldots, x_N) \qquad (۲.۱)$$

در حالت خاص چنانچه داشته باشیم $\frac{\partial u}{\partial y} = q, \frac{\partial u}{\partial x} = p$، آنگاه یک معادله با مشتقات جزئی مرتبه اول به فرم $F(x, y, p, q) = ۰$ نوشته می‌شود.

این نوع معادلات با مشتقات جزئی در هندسه، فیزیک و مهندسی ظاهر می‌شوند.

۴.۱ معادلات با مشتقات جزئی مرتبه دوم

شکل خاص این نوع معادلات به صورت زیر است:

$$A\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} + B\frac{\partial^۲ u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu + G = ۰ \qquad (۳.۱)$$

اگر A، B، C، D، E، F و G تنها توابعی از متغیرهای مستقل x و y باشند آن گاه معادله (۳.۱) را معادله با مشتقات جزئی خطی مرتبه دوم می‌نامیم که به صورت زیر دسته بندی می‌شوند:

۱) معادله دیفرانسیل جزئی بیضوی می‌باشد، اگر $B^۲ - ۴AC < ۰$

۲) معادله دیفرانسیل جزئی سهموی می‌باشد اگر $B^۲ - ۴AC = ۰$

۳) معادله دیفرانسیل جزئی هذلولوی می‌باشد اگر $B^۲ - ۴AC > ۰$

۱.۴.۱ معادله دیفرانسیل جزئی بیضوی

یکی از مشهورترین این نوع معادلات، معادله پواسن می‌باشد.

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}(x,y) + \frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲}(x,y) = f(x,y) \qquad (۴.۱)$$

فرض می‌کنیم که تابع f در این معادله مشخص کننده داده‌های مسئله روی یک ناحیه مسطح R باشد که مرز آن را با منحنی S نمایش می‌دهیم.

معادلاتی از نوع بیضوی در مطالعه مسائل فیزیکی مستقل از زمان مانند حالت یکنواخت توزیع گرما در یک ناحیه مسطح، انرژی پتانسیل یک نقطه واقع در صفحه که نیروهای ثقلی موجود در صفحه روی آن نقطه عمل می‌کنند و همچنین مسائل حالت یکنواخت دو بعدی شامل سیالات تراکم ناپذیر رخ می‌دهند. برای بدست آوردن جواب منحصر به فرد معادله پواسن باید شرایط و قیدهای اضافی روی جواب را تعیین کنیم. به عنوان مثال در مطالعه حالت یکنواخت توزیع گرما در یک ناحیه مسطح لازم است که $f(x,y) = ۰$ باشد که معادله (۴.۱) به صورت ساده می‌شود و این معادله لاپلاس نامیده می‌شود. [۱۱]

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}(x,y) + \frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲}(x,y) = ۰$$

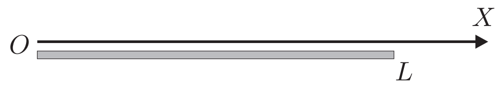
۲.۴.۱ معادله دیفرانسیل جزئی سهموی

شکل کلی این نوع معادلات به صورت زیر است:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \alpha^۲ \frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}(x,t) = f(x,t) \qquad (۵.۱)$$

یکی از انواع این معادله به بررسی مسئله جریان گرما در یک میله به طول L می‌پردازد. به شرطی که میله در سطح کناره‌هایش کاملاً عایق‌دار باشد. فرض می‌شود که جریان گرما در

امتداد میله نازک به طول L در هر مقطع عرضی جسم دارای دمای یکنواخت باشد.
ثابت α در معادله (۵.۱) برای مسئله‌ای از این توابع بوسیله خواص هدایت گرمایی مواد سازنده میله تعیین و فرض می‌شود که از محل استقرار در میله مستقل باشد.



در مسئله جریان گرما هدف آن است که توزیع اولیه گرما در میله را مشخص کرده $(u(x,y)=f(x))$ و بیان کنیم که در انتهای میله چه اتفاقی رخ داده است. به عنوان مثال اگر نقاط انتهایی میله را در دمای ثابت u_1 و u_2 نگهداریم شرایط مرزی به شکل زیر می‌باشد:

$$u(0,t)=u_1$$

$$u(l,t)=u_2$$

و توزیع گرما در میله به توزیع دمای حدی میل می‌کند.

$$\lim_{t\to x} u(x,t)=u_1+\frac{u_2-u_1}{\ell}\,x$$

اگر میله را چنان عایق دار کنیم که هیچ گرمایی از نقاط انتهایی جریان نداشته باشد، شرایط مرزی به صورت:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,t)=0,\frac{\partial u}{\partial t}(l,t)=0$$

خواهد بود و یک دمای ثابت را به عنوان حالت حدی در میله نتیجه می‌دهد. معادله سهموی در مطالعه مسئله انتشار گاز اهمیت دارد و به معادله انتشار معروف است. معادله مورد بحث پایان‌نامه معادله سهموی می‌باشد. [۱۱]