بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده ریاضی و رایانه
بخش ریاضی محض

پایان‌نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض گرایش جبر

پادحلقه‌های جابجایی
و
ماتریس‌های روی آن‌ها

مؤلف:
آسیه مارزی مهنی

استاد راهنما:
دکتر حسین مومنایی کرمانی

دی‌ماه ۱۳۹۳

این پایان نامه به عنوان یکی از شرایط احراز درجه کارشناسی ارشد به

بخش ریاضی محض

دانشکده ریاضی و رایانه

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود.

دانشجو: آسیه مارزی مهنی   امضاء:

استاد راهنما: دکتر حسین مومنایی کرمانی   امضاء:

داور اول :   امضاء:

داور دوم: امضاء:

نماینده تحصیلات تکمیلی: امضاء:

تقدیم به

تقدیم به تو مادرم:

که معنی عشق در تمامی واژه‌های دنیایی.

تقدیم به نجمه عزیزم:

بهترین دوستم که زیباترین‌ها را برایش آرزو دارم.

و تقدیم به خانواده‌ام :

که تا به امروز، به بهار زندگی ام وسعت بخشیدند و در قلبم جاودانه‌اند.

سپاس

نخستین سپاس و ستایش خدای را که هرگاه از او چیزی بخواهم، عطا می‌کند و آنگاه که امیدی به او داشته‌ام مهربانی‌اش را دریغ نمی‌کند.

اکنون که در سایه سار بنده نوازی‌هایش پایان نامه حاضر به انجام رسیده است، بر خود لازم می‌دانم تا مراتب سپاس را از بزرگوارانی که اگر دست یاریگرشان نبود، این پایان‌نامه به انجام نمی‌رسید به جا آورم.

ابتدا از استاد راهنمای گرامی‌ام جناب آقای دکتر حسین مومنایی که در کمال سعه صدر و با حسن خلق از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند، کمال سپاس را دارم.

از استاد عالی قدرم جناب آقای دکتر سید شاهین موسوی که افتخار شاگردی ایشان را داشته‌ام و زحمت بازخوانی و ویرایش این پایان نامه را متحمل شدند، صمیمانه تشکر می‌کنم.

سپاس آخر را از مادر مهربانم و پدرم دارم، که هر آنچه اکنون هستم را وامدار حضورشان در زندگیم هستم.

چکیده

نیم‌حلقه سیستم جبری $(S, +, \cdot)$ است که $(S, +)$ تکواره جابجایی با عنصر همانی 0 و $(S, \cdot)$ تکواره دیگری با عنصر همانی ۱ است، خاصیت توزیع‌پذیری و همچنین به ازای هر $s \in S$ رابطه $0 \cdot s = s \cdot 0 = 0$ برقرار است. اگر به ازای هر دو عنصر $a,\ b$ متعلق به نیم‌حلقه S، $a + b = 0$ ایجاب می‌کند $a = b = 0$، آنگاه S پادحلقه است.

این پایان‌نامه توصیف کاملی از ماتریس‌های وارون‌پذیر و ماتریس‌های خودتوان و پوچ‌توان روی پادحلقه جابجایی ارائه داده است. همچنین روش کرامر برای پادحلقه جابجایی نیز آورده شده است. مهم‌ترین دستاورد این پایان‌نامه ارائه تعمیم توسعه یافته‌ای از ماتریس‌های بولی، ماتریس‌های فازی، ماتریس‌های مشبکه‌ای و ماتریس‌های اینکلاین است.

کلمات کلیدی: *نیم‌حلقه، پادحلقه، وارون‌پذیر، خودتوان، گراف جهت‌دار.*

پیش‌گفتار

نیم‌حلقه سیستم جبری $(S, +, \cdot)$ است که $(S, +)$ تکواره جابجایی با عنصر همانی ۰ و $(S, \cdot)$ تکواره دیگری با عنصر همانی ۱ است. این دو تکواره مانند حلقه ها با خاصیت توزیع‌پذیری به هم متصل شده‌اند. همچنین به ازای هر $s \in S$ رابطه $0 \cdot s = s \cdot 0 = 0$ برقرار است. نیم‌حلقه S را جابجایی می‌گوییم اگر $(S, \cdot)$ یک تکواره جابجایی باشد. نیم‌حلقه S بی‌نقص نامیده می‌شود، اگر به ازای هر $a, b \in S$، $ab = 0$ ایجاب کند $a = b = 0$. نیم‌حلقه S یک پادحلقه نامیده می‌شود، هرگاه $a + b = 0$ ایجاب کند $a = b = 0$. پادحلقه در کتاب [۸] تحت عنوان نیم‌حلقه‌های فاقد مجموع صفر آورده شده است. تمام حلقه‌های یک‌دار نیم‌حلقه هستند اما لزوما پادحلقه نیستند.

ابتدایی‌ترین ساختار های ریاضی که در زندگی روزمره با آن مواجه شده‌ایم، نیم‌حلقه ها هستند. مجموعه اعداد صحیح نامنفی $\mathbf{Z}^+$ با جمع و ضرب معمولی و همین‌طور اعداد گویای مثبت$\mathbf{Q}^+$، اعداد حقیقی مثبت $\mathbf{R}^+$ پادحلقه جابجایی هستند. اما اولین نیم‌حلقه غیر بدیهی که در ریاضیات محض ارائه شد نیم‌حلقه ددکیند بود. که در سال ۱۸۹۴ توسط ریاضیدان آلمانی در جبر ایده‌آلهای حلقه جابجایی ارائه شد.

جبر بولی $\mathbb{B}$، جبرفازی $(\mathbb{I}, \vee, T)$ که t، T -نرم است و مشبکه‌های توزیعی کراندار و اینکلاین پادحلقه جابجایی هستند. به‌علاوه $(\mathbf{R} \cup \{-\infty\}, max, +)$ و $(\mathbf{R} \cup \{-\infty\}, min, +)$ نیز پادحلقه جابجایی هستند.

سایر پادحلقه‌ها در زمینه‌های گوناگون ریاضیات (کاربردی و محض) ظاهر شدند. از

جمله آنالیز تابعی، توپولوژی، نظریه گراف، هندسه اقلیدسی، نظریه احتمال، نظریه حلقه‌های جابجایی و غیر جابجایی، نظریه بهینه سازی، نظریه پیشامدهای مجزا سیستم‌های دینامیکی، نظریه ماشینها، نظریه زبان‌های رمزی، مدل‌سازی ریاضی فیزیک کوانتوم و غیره.

نظریه جبری نیم‌حلقه‌ها بخش حقیقی جبر مدرن است. نیم‌حلقه‌ها و نیم‌مدول‌های روی آنها، مهمترین ابزار در ریاضیات کاربردی و علوم کامپیوتر به شمار می آیند. از دیدگاه جبری نیم‌حلقه ها تعمیم طبیعی مشترکی از نظریه حلقه‌ها و مشبکه‌های توزیعی کراندار هستند، تکنیک به کار رفته در آنالیز آنها از هر دو حوزه برگرفته شده است.

مطالعه ماتریس‌ها روی نیم‌حلقه جابجایی تاریخچه مفصلی دارد. در سال ۱۹۶۴ رادرفور[۱] اثباتی از قضیه کیلی همیلتن برای نیم‌حلقه جابجایی بدون استفاده از دترمینان ارائه داد. ماتریس‌های وارون‌پذیر روی پادحلقه جابجایی، از اهمیت زیادی برخوردارند. سال ۱۹۵۲ لوسی [۲] نشان داد که ماتریس‌های روی جبر بولی وارون‌پذیر هستند، اگر ماتریس متعامد باشند. ژئو [۳] نشان داد که ماتریس مربعی فازی وارون‌پذیر است اگر جایگشتی باشد.

یکی دیگر از مهترین انواع ماتریس‌های روی پادحلقه جابجایی ماتریس‌های پوچ‌توان هستند. از آغاز دهه ۱۹۶۰ پژوهشگران بسیاری به مطالعه این ماتریس‌ها روی انواع خاصی از پادحلقه‌ها پرداختند. سال ۱۹۶۴ گیون[۴] نشان داد که ماتریس مشبکه‌ای A_n پوچ‌توان است، اگر و تنها اگر $A^n = O_n$. لی[۵] برخی از ویژگی‌های ماتریس‌های فازی پوچ‌توان را به‌دست آورد. تعمیم این ویژگی‌ها را تان برای ماتریس‌های مشبکه ای پوچ‌توان ارائه داد.

ماتریس‌های خودتوان بولی و ماتریس‌های خودتوان اینکلاین توسط کنگ[۶] و یانگ[۷] و بیزلی[۸] مورد مطالعه قرار گرفتند. به این ترتیب نظریه ماتریس‌های روی پادحلقه‌ها توسعه یافت.

این پایان‌نامه از چهار فصل تشکیل شده است. فصل اول تحت عنوان نیم‌حلقه‌ها و پادحلقه

[۱] Rutherford
[۲] Luce
[۳] Zhao
[۴] Give'on
[۵] Li
[۶] Kang
[۷] Yang
[۸] Beasley

آورده شده است شامل چهار بخش است. در بخش اول به معرفی نیم‌حلقه و پادحلقه پرداخته شده است. بخش دوم پادحلقه های مهم را معرفی کرده است. بخش سوم همریختی نیم‌حلقه‌ای را بررسی کرده است. سپس در بخش آخر توصیفی مختصر از نیم‌مدول‌ها روی نیم‌حلقه ارائه شده است.

فصل دوم شامل پنج بخش است. بخش اول به معرفی نیم‌حلقه ماتریس‌های روی پادحلقه جابجایی، پرداخته است. در بخش دوم ویژگی مهم ($AB = I \ \Rightarrow \ BA = I$)از ماتریس‌های مربعی، روی نیم‌حلقه‌ها بیان کرده است. در بخش سوم به مفهوم پایداری و ویژگی‌های آن پرداخته شده است. بخش چهارم گراف جهت‌دار $D(A)$ را برای هر ماتریس $A \in M_n(S)$ معرفی کرده است. برخی مفاهیم مربوط به آن‌را که در فصل بعد کاربرد زیادی دارند، ارائه داده است. نهایتا در بخش آخر ویژگی‌های ابتدایی ماتریس وارون روی پادحلقه جابجایی ذکر شده است.

فصل سوم شامل شرایط لازم وکافی برای وارون‌پذیری یک ماتریس روی پادحلقه جابجایی است. همچنین به شرایط ماتریس‌های پوچ‌توان و خودتوان نیز پرداخته شده است. به شیوه‌ای ظرافتمندانه جبرخطی روی پادحلقه جابجایی و نظریه گراف در هم می‌آمیزد. سپس توصیفی زیبا از ماتریس‌های پوچ‌توان و خودتوان روی هر پادحلقه جابجایی دلخواه ارائه می‌دهد. سرانجام در بخش چهارم روش کرامر برای یک پادحلقه جابجایی را ارائه کرده‌ایم.

فهرست مطالب

فصل ۱

نیم‌حلقه‌ها و پادحلقه

در این فصل به مطالعه نیم‌حلقه‌ها و ارائه تعاریف اولیه مربوط به نیم‌حلقه‌ها می‌پردازیم. پادحلقه را تعریف می‌کنیم و چند قضیه مقدماتی می‌آوریم. سپس در بخش دوم برخی از پادحلقه‌های مهم را معرفی می‌کنیم. و مختصری راجع به همریختی نیم‌حلقه‌ای و نیم‌مدول‌ها روی نیم‌حلقه به بحث می‌پردازیم. منبع اصلی ما برای نیم‌حلقه کتاب [۸] است. نمادها و اصطلاحات اکثرا از این کتاب گرفته شده است مگر اینکه منبع آن صریحا ذکر شده باشد.

۱.۱ مقدمه‌ای بر نیم‌حلقه‌ها

تعریف ۱.۱.۱. ساختار جبری $(S, +, .)$ را یک **نیم‌حلقه**[۱] می‌گویند، هرگاه:

الف) $(S, +)$ یک تکواره[۲] آبلی با عنصر همانی[۳] ۰ باشد.

ب) $(S, .)$ یک تکواره با عنصر همانی ۱ باشد.

ج) عمل جمع روی ضرب در S توزیع‌پذیر باشد. یعنی:

$$\forall\, r, s, t \in S, \quad (r+s)\cdot t = r\cdot t + s\cdot t\ .$$

د) $\forall\, r \in S \quad 0\cdot r = r\cdot 0 = 0$.

ه) $1 \neq 0$.

S یک نیم‌حلقه جابجایی[۴] است، هرگاه به ازای هر $a, b \in S$، $a\cdot b = b\cdot a$.

[۱] semiring
[۲] monoid
[۳] identity
[۴] comutative

شرط ۵) برای اجتناب از حالت $S=\{۰\}$ است. زیرا:

$$۱=۰ \quad \Longrightarrow \quad r=r\cdot ۱=r\cdot ۰=۰ \;\Rightarrow\; S=\{۰\}\,.$$

نیم‌حلقه دقیقا همان حلقه است اما بدون عمل تفریق!

بیشتر مثال‌های نیم‌حلقه‌هایی که حلقه نیستند در واقع اولین ساختارهای جبری هستند که ما در زندگی روزمره با آنها مواجه هستیم. مثلا اعداد صحیح مثبت، اعداد حقیقی مثبت، اعداد گویای مثبت و غیره. اما اولین مثال غیربدیهی از نیم‌حلقه‌ها سال ۱۸۹۴ در کارهای ریاضیدان آلمانی ریچارد ددکیند[۱] در جبر ایده‌آلهای حلقه ارائه شد. بعدها تعمیمی از نیم‌حلقه ایده‌آل‌های یک حلقه جابجایی توسط اوبرت[۲] و لورنزن[۳] پایه‌ریزی شد.

مثال ۲.۱.۱. (نیم‌حلقه ددکیند) فرض کنید R یک حلقه باشد و $ideal(R)$، مجموعه تمام ایده‌ال‌های دوطرفه همراه با خود R باشد. در این‌صورت $ideal(R)$ همراه با جمع و ضرب معمولی ایده‌آل‌ها تشکیل یک نیم‌حلقه می دهد. $\{۰_R\}$ همانی جمعی و R همانی ضربی است.

به منظور ساختن برنامه‌های کامپیوتری برای تشخیص یک نیم‌حلقه بهتر است تعداد شرایطی که لازم است بررسی گردد، تا حد ممکن کمتر کنیم. در قضیه زیر نمونه‌ای از این ساده سازی ارائه شده است.

قضیه ۳.۱.۱. *مجموعه S شامل دو عضو متمایز ۰ و ۱ همراه با دو عمل جمع و ضرب تشکیل یک نیم‌حلقه می‌دهد، اگر و تنها اگر به ازای هر $a,\ b,\ c,\ d,\ e\ \in\ S$ شرایط زیر برقرار باشد.*

(۱) $a+۰=۰+a=a$.

(۲) $a\cdot ۱=a$.

---

[۱] Richard Dedekind
[۲] Aubert
[۳] Lorenzen

(۳) $0 \cdot a = 0$.

(۴) $[(a \cdot e + b) + c]d = d \cdot b + [a(e \cdot d) + c \cdot d]$.

برهان. واضح است که اگر S یک نیم‌حلقه جابجایی باشد در شرایط (۱)-(۴) صدق می‌کند. برعکس فرض کنید چهار شرط فوق برقرار باشد و عناصر a, b, c, d, e متعلق به S داده شده باشند. داریم:

$$bd = [(0 \cdot 0 + b) + 0]d = db + [0 \cdot (0d) + 0d] = db \ .$$

بنابراین عمل ضرب جابجایی است. همچنین

$$a + b = [(a1 + b) + 0]1 = 1b + [a(1 \cdot 1) + 0] = b + a \ .$$

لذا جمع عملی جابجایی است. عمل جمع و ضرب شرکت‌پذیر هستند. زیرا:

$$(ae)d = [(ae + 0) + 0]d = a0 + [a(ed) + 0d] = a(ed) \ .$$

$$(a + b) + c = (b + a) + c = [(b1 + a) + c]1 = 1a + [b(1 \cdot 1) + c1] = a + (b + c) \ .$$

بنابراین S یک نیم‌حلقه جابجایی است. □

شاید این موضوع که چگونه می‌توان از نیم‌حلقه‌های قبلی، نیم‌حلقه‌های جدید ساخت جالب توجه باشد. که در این فصل تاحدودی به آن پرداخته می‌شود. از جمله در گزاره زیر یک روش برای ساختن نیم‌حلقه‌های جدید از نیم‌حلقه‌های قدیم ارائه شده است.

گزاره ۴.۱.۱. *فرض کنید R_1 و R_2 دو نیم‌حلقه باشند در این صورت $R_1 \times R_2$ همراه با جمع و ضرب مولفه به مولفه یک نیم‌حلقه است و به همین ترتیب $R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_n$ به ازای*

$n \geq ۲$ یک نیم‌حلقه است، اگر $R_۱,\ R_۲,\ \cdots\ ,\ R_n$ نیم‌حلقه باشند.

مثال ۵.۱.۱. جبر بولی: $(\mathbb{B}, +, \cdot)$، مجموعه $\mathbb{B} = \{\circ,\ ۱\}$ که عمل جمع و ضرب روی آن به ازای هر $a, b \in \mathbb{B}$ به‌صورت زیر تعریف شده است، یک نیم‌حلقه می‌باشد.

$$a + b = \begin{cases} \circ & a = b = \circ \\ ۱ & \text{در غیر اینصورت:} \end{cases} \quad , \quad a.b \quad = \begin{cases} ۱ & a = b = ۱ \\ \circ & \text{در غیر اینصورت:} \end{cases}$$

اگر A یک مجموعه ناتهی باشد، خانواده تمام زیرمجموعه های A را با نماد $sub(A)$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۶.۱.۱. زیرمجموعه‌های R-ارزشی [۱] فرض کنید A مجموعه ناتهی و R یک نیم‌حلقه باشد. در این‌صورت مجموعه تمام توابع از A به R که با نماد R^A نمایش داده می‌شود، همراه با عمل جمع و ضرب معمولی توابع روی R تشکیل یک نیم‌حلقه می‌دهد. همانی جمعی و همانی ضربی نیم‌حلقه R^A به ترتیب توابع ثابت i و o هستند که به ازای هر $r \in R$ با ضابطه $i(r) = ۱,\ o(r) = \circ$ تعریف شده‌اند.

ملاحظه ۷.۱.۱. از این جهت نیم‌حلقه R^A را نیم‌حلقه زیرمجموعه های R-ارزشی می‌نامند که یک تناظر یک به یک بین مجموعه $sub(A)$ و نیم‌حلقه $\mathbb{B}^A$ وجود دارد. یعنی هر زیر مجموعه B از A متناظر با تابع $\chi_B \in \mathbb{B}^A$ است که با ضابطه زیر تعریف شده است.

$$\forall a \in A \quad \chi_B(a) = \begin{cases} ۱ & a \in B \\ \circ & a \notin B \end{cases} \quad .$$

وقتی به معرفی یک ساختار ریاضی می‌پردازیم، ناگزیر به تعریف زیرساختارهای آن نیز می‌شویم. همان‌طور که برای هر حلقه زیرحلقه تعریف شده است، زیرساختار نیم‌حلقه را زیرنیم‌حلقه می‌نامند.

[۱] R-valued subset

تعریف ۸.۱.۱. زیرمجموعه R از نیم‌حلقه S شامل دو عنصر ۰ و ۱ را یک **زیرنیم‌حلقه**[۱] S می‌گویند، هرگاه R تحت جمع و ضرب نیم‌حلقه S بسته باشد.

هر نیم‌حلقه دارای یک زیرنیم‌حلقه مینیمال یکتا است. این نیم‌حلقه به‌طور کامل در مرجع [۲] بررسی شده است. در مثال زیر به معرفی آن می‌پردازیم.

مثال ۹.۱.۱. **(نیم‌حلقه اساسی[۲])** فرض کنید R یک نیم‌حلقه باشد. دراین‌صورت مجموعه $S = \{0,\ 1,\ 1+1,\ 1+1+1, \cdots\}$ کوچکترین زیرنیم‌حلقه R است.

مثال ۱۰.۱.۱. فرض کنید $(R, +, \cdot)$ یک نیم‌حلقه باشد. دراین‌صورت مجموعه

$$P(R) = \{0\} \bigcup \{r+1 \mid r \in R\}$$

زیرنیم‌حلقه‌ای از R است. به‌سادگی دیده می‌شود که $P(R)$ شامل ۰ و ۱ و تحت جمع و ضرب بسته است. لذا شرایط تعریف (۸.۱.۱) را دارد. بنابراین یک زیرنیم‌حلقه از R است.

مثال ۱۱.۱.۱. فرض کنید R یک نیم‌حلقه باشد. دراین‌صورت مجموعه

$$R' = \{0\} \bigcup \{r \in R \mid rb \neq 0\ ,\ \forall 0 \neq b \in R\}$$

زیرنیم‌حلقه ای از R است. زیرا R' شامل ۰ و ۱ است و نسبت به جمع و ضرب بسته است.

تعریف ۱۲.۱.۱. مجموعه $C(R) = \{r \in R \mid rr' = r'r\ ,\ \forall r' \in R\}$ را مرکز[۳] نیم‌حلقه R می‌نامند. هر عنصر $a \in R$ که متعلق به $C(R)$ باشد مرکزی می‌نامیم. داریم $\{0, 1\} \subseteq C(R)$. $C(R)$ تحت جمع و ضرب نیم‌حلقه R بسته است. بنابراین $C(R)$ یک زیرنیم‌حلقه R است که جابجایی نیز است. R نیم‌حلقه جابجایی است، اگر و تنها اگر $R = C(R)$.

---

[۱] subsemiring
[۲] basic semiring
[۳] center

تعریف ۱.۱.۱۳. فرض کنید ρ یک رابطه هم ارزی[۱] روی نیم‌حلقه R باشد. ρ را یک رابطه هم‌ارزی[۲] می‌گویند، هرگاه رابطه زیر برقرار باشد.

$$\forall\, a,\ a',\ b,\ b' \in R, \quad a\ \rho\ a' \text{ و } b\ \rho\ b' \ \Rightarrow\ (a+a')\ \rho\ (b+b') \text{ و } (aa')\ \rho\ (bb')$$

به‌عبارت دیگر، مجموعه $\{(a,b) \in R \times R \mid a\ \rho\ b\}$ زیرنیم‌حلقه $R \times R$ باشد.

اگر به ازای هر $a,\ b \in R$ رابطه $a\ \rho\ b$ برقرار باشد، آن‌گاه ρ را یک رابطه غیرسره[۳] و درغیر این‌صورت یک رابطه سره[۴] روی R می‌گویند.

تعریف ۱.۱.۱۴. فرض کنید ρ یک رابطه سره روی R باشد. $\frac{R}{\rho}$ مجموعه تمام کلاس های هم ارزی همراه با جمع و ضرب زیر یک نیم‌حلقه است که به آن یک نیم‌حلقه ضریب[۵] از R می‌گویند.

$$(a+\rho) + (b+\rho) = (a+b) + \rho$$

$$(a+\rho)(b+\rho) = (ab) + \rho \quad \forall a,\ b \in R.$$

برای دانستن جزئیات بیشتر راجع‌به نیم‌حلقه ضریب می‌توانید به مرجع [۸]مراجعه کنید و به بررسی برخی از مهمترین رابطه های تناسبی که منجر به ایجاد یک نیم‌حلقه ضریب می‌شوند بپردازید.

تعریف ۱.۱.۱۵. مجموعه I را یک ایده‌آل[۶] از نیم‌حلقه R می‌گوییم، هرگاه I یک زیرمجموعه سره ناتهی از R باشد که تحت عمل جمع بسته است و به ازای هر $a \in I$ و $c \in R$ ، $ac \in I$. شرط سره بودن معادل است با این‌که $1 \notin I$. و شرط ناتهی بودن آن نتیجه می‌دهد $0 \in I$. برای حلقه R مجموعه تمام ایده‌آل‌های R و R را با نماد $ideal(R)$ نمایش می‌دهیم و این

[۱] equivalence relation
[۲] congruence
[۳] improper
[۴] proper
[۵] factor semiring
[۶] ideal

مجموعه حداقل شامل R, $\circ$ است.

تعریف ۱.۱.۱۶. **(رابطه بورن[۱])** هر ایده‌آل I از نیم‌حلقه R یک رابطه هم‌ارزی ρ به‌صورت زیر روی R تعریف می‌کند:

$$\forall\, a,\ a^{'} \in\ R \quad a\rho\, a^{'} \quad \Longrightarrow \quad \exists\, h,\ h^{'} \in I, \quad a+h = a^{'} + h^{'}\ .$$

که به آن رابطه بورن تولید شده توسط I می‌گویند.

رابطه بورن یک رابطه سره است که برای اولین بار توسط بورن در مقاله [۴] مطالعه شده است. نیم‌حلقه ضریب مربوط به رابطه بورن از R را نیم‌حلقه ضریب بورن R می‌نامند .

تعریف ۱.۱.۱۷. نیم‌حلقه R را یک **پادحلقه**[۲] می‌گویند، هرگاه:

$$\forall a,b \in R \quad a+b=\circ \quad \Longrightarrow \quad a=b=\circ.$$

که در کتاب [۸] تحت عنوان نیم‌حلقه‌های فاقد وارون جمعی[۳] آورده شده است. با این شرط در واقع حلقه بودن R غیر ممکن می‌شود.

مثال ۱.۱.۱۸. مجموعه اعداد صحیح مثبت $\mathbf{Z}^+$، مجموعه اعداد گویای مثبت $\mathbf{Q}^+$، مجموعه اعداد حقیقی مثبت $\mathbf{R}^+$، همراه با جمع و ضرب معمولی هرکدام تشکیل یک پادحلقه می‌دهند.

قضیه ۱.۱.۱۹. *فرض کنید R نیم‌حلقه باشد. شرط کافی برای اینکه R یک پادحلقه باشد، این است که عنصر $t \in R$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $t+۱=۱$.*

[۱] Bourn relation
[۲] antiring
[۳] zerosumfree

برهان. فرض کنید به ازای $a, b \in R$ داشته باشیم $a + b = \circ$. بنابراین:

$$\circ = (a+b)\cdot t = a\cdot t + b\cdot t = a(\text{۱}+t) + b(\text{۱}+t)$$
$$= a(\text{۱}+t) + b(\text{۱}+\text{۱}+t) = (a+b) + b + (a+b)t = b$$
$$\Longrightarrow \quad a = \circ \quad \Rightarrow \quad b = \circ$$

پس R یک پادحلقه است. $\square$

گزاره ۲۰.۱.۱. *هر نیم حلقه R دارای یک پادحلقه ضریب است.*

برهان. فرض کنید I ایده‌آلی از R شامل تمام عناصری که دارای وارون جمعی در R باشد و ρ رابطه بورن تولید شده توسط ایده‌آل I باشد. در این صورت نیم‌حلقه $\frac{R}{\rho}$ یک پادحلقه ضریب از R است. $\square$

تعریف ۲۱.۱.۱. عنصر a متعلق به نیم‌حلقه R را **بی‌کران**[۱] می‌گویند، هرگاه به ازای هر r متعلق به R، $r + a = a$.

گزاره ۲۲.۱.۱. *عنصر بی‌کران پادحلقه در صورت وجود یکتاست.*

برهان. فرض کنید a و a' دو عنصر بی‌کران نیم‌حلقه R باشند. در این‌صورت رابطه زیر نتیجه می‌شود.

$$a = a + a' = a' + a = a'.$$

$\square$

تعریف ۲۳.۱.۱. عنصر $a \in R$ را **حذف شدنی**[۲] می‌گوییم، هرگاه به ازای هر $a,\ b,\ c \in R$ تساوی $a + c = b + c$ ایجاب کند $a = b$. عناصری که دارای وارون جمعی در R می‌باشند،

[۱] infinite
[۲] cancellable