بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه قم

دانشکده علوم پایه

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

موضوع

الگوریتم دوگانی برای مسئله جریان با کمترین هزینه

استاد راهنما

دکتر غلام‌حسن شیردل

استاد مشاور

دکتر علی اصغر فروغی

نگارنده

زهره کاکایی

پائیز ۱۳۸۷

تاریخ: ۸۷/۱۰/۸
شماره: ۱۱/۸۴۲
پیوست:

بسمه تعالی

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه قم

«صورت جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد»

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر *«عجل الله تعالی فرجه الشریف»*

جلسه دفاعیه پایان نامه کارشناسی ارشد خانم : **زهره کاکایی** رشته : **ریاضی**

تحت عنوان : **الگوریتم های دوگان برای مسأله جریان باکمترین هزینه**

با حضور هیأت داوران در محل دانشگاه قم در تاریخ ۸ / ۱۰ /۸۷ تشکیل گردید .

در این جلسه، پایان نامه با موفقیت مورد دفاع قرار گرفت و نامبرده نمره با عدد ۱۸/۷۵ با حروف هیجده و هفتاد و پنج صدم

با درجه : عالی ● بسیار خوب ○ خوب ○ قابل قبول ○ دریافت نمود .

نام و نام خانوادگی	سمت	مرتبه علمی	امضاء
آقای غلامحسن شیردل	استاد راهنما	استادیار	
آقای علی اصغر فروغی	استاد مشاور	استادیار	
آقای مهدی احمدی نیا	استاد ناظر	استادیار	
آقای عزیزا... معماریانی	استاد ناظر	استاد	
آقای ولی ا... شاه سنایی	نماینده کمیته تحصیلات تکمیلی	استادیار	۸۷/۱۰/۸

مدیر امور آموزش و تحصیلات تکمیلی
نام و امضاء :

معاون آموزشی و پژوهشی دانشکده
نام و امضاء :
علیرضا باوی ...

نشانی:
قم، جاده قدیم اصفهان، دانشگاه قم
کدپستی: ۳۷۱۶۱۴۶۶۱۱
تلفن: ۲۸۵۳۳۱۱
دورنویس:
معاونت آموزشی ۲۸۵۵۶۸۴
معاونت اداری ۲۸۵۵۶۸۶
معاونت دانشجویی ۲۸۵۵۶۸۸

تقدیم به:

دادگر عدل و عدالت مهدی موعود(عج)

و

مادر مهربان

پدر فداکار

و همسر عزیزم

تقدیر و تشکر

جایی نرسد کس به توانایی خویش   الا تو چراغ رحمتش داری پیش

با تشکر فراوان از خداوند به پاس محبت‌های بی‌پایانش.

و تشکر از **پدر و مادرم** که دل به سپاس نبستند و جاذبه عشق و الفتشان در بی‌چشم داشتی است. خالصانه‌ترین و سبزترین سپاس خود را نثار این دو بزرگوار می‌کنم که وجود مقدسشان همیشه دوران مایه پشتگرمی و آرام بخش روح و روانم بوده است و زبانم از وصف الطاف خالصانشان عاجز است سایه‌شان مستدام و برقرار و توفیقاتشان افزون بواد.همچنین سپاس فراوان از همسر مهربان و عزیزم که با صبر و بردباری مرا در پیمودن این راه یاری نمود و بحق از هیچ کوششی دریغ ننمود و هیچ نمی‌توانمشان گفت جز اینکه هر کجا هست خدایا به سلامت دارش.

دوم بار جناب استاد. از زحمات و لطف بی‌پایان اساتید گروه ریاضی دانشگاه قم و تمامی عزیزانی که در طی این سالها از محضرشان فیض بردم سپاسگزارم.

بویژه ارادت بی‌کران و مراتب امتنان و سپاس خود را نثار استاد فرزانه و بزرگوارم جناب **دکتر غلام‌حسن شیردل** می‌سازم که راهنمایی بنده را در نگارش این پایان‌نامه بر عهده داشتند و شاگردی در محضر ایشان باعث افتخار اینجانب است و راهنمایی‌های ایشان و سعه صدرشان در رفع اشکالات این تقریر جای تقدیر و ستایش فراوان دارد و زبان قادر به سپاسگویی نیست فقط حافظانه چنین بایدش گفت : کافرین بر نظر پاک خطاپوشش باد.

همچنین از ارشادات و نظرات ارزنده جناب **دکتر فروغی** که رهگشای بنده در تدوین این پایان‌نامه بود کمال تشکر و قدردانی دارم و سپاسگزارم از جناب **دکتر عزیزالله معماریانی** و **دکترمهدی احمدی نیا** که با وجود مشغله فراوان داوری این پایان‌نامه را برعهده گرفتند.

در پایان از دوستان و همکلاسی‌هایم که لحظه‌های زیبا و لبریز از صداقتی را با یکدیگر سپری کردیم تشکر می‌کنم و امیدوارم همیشه شاد و سربلند باشند.

غرض نقشی است کز ما بازماند   که گیتی را نمی‌بینم بقایی

وگر صاحب‌دلی روزی به رحمت   کند بر درویشان دعایی

چکیده

در این پایان نامه یک الگوریتم دوگان جدید برای مسئله جریان با کمترین هزینه مطرح می‌کنیم. این الگوریتم با الگوریتم شناخته‌شده اورلین[1] که دارای مرتبه‌زمانی چندجمله‌ای است متناظر است و همان پیچیدگی زمانی $O(m\log m(m+n\log n))$ را دارد. m,n بترتیب تعداد راس ها و تعداد یال ها را نشان می‌دهد.

این الگوریتم در مقایسه با الگوریتم اورلین مستقیما با ظرفیت شبکه کارکرده(الگوریتم اورلین هر مسئله را به مسئله حمل و نقل تبدیل می‌کند) و مسئله های کلی بیشتری را در برمی‌گیرد و از نظر عملی موثرتر است. الگوریتم ما می‌تواند الگوریتم برش[2] حذفی را تفسیرکند و بهترین کران قویا چندجمله‌ای را برای این کلاس مهم از الگوریتم‌ها بهبود دهد.

کلمات کلیدی: مسئله جریان با کمترین هزینه، الگوریتم قویا چند جمله‌ای، الگوریتم های دوگان، برش حذفی، دوگان سیمپلکس شبکه

1.Orline
2.Cut canceling

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فهرست اشکال

عنوان | صفحه

مقدمه

مسائل شبکه جریان از بهترین نوع مسائل بهینه سازی هستند([۲] را ببینید). اینگونه مسائل کاربرد زیادی دارند. در این پایان‌نامه روی مسئله جریان با کمترین هزینه متمرکز می‌شویم. الگوریتم‌های این مسئله به دو دسته الگوریتم‌های اولیه و دوگان تقسیم می‌شوند. الگوریتم‌های اولیه همیشه جواب شدنی دارند و بدنبال حذف‌کردن دورهای با هزینه منفی در گراف مانده[۱] هستند. در الگوریتم‌های دوگان همیشه یک پتانسیل شدنی در گراف مانده برقرار است و به سمت شدنی اولیه حرکت می‌کند.

هسین[۲] کشف کرد که تعداد زیادی از الگوریتم‌های دوگان می‌توانند الگوریتم معروف به برش حذفی را تعبیرکنند که این شامل الگوریتم اولیه – دوگان، الگوریتم اوت – آف – کیلتر[۳] و دوگان سیمپلکس شبکه است. الگوریتم برش حذفی تقریبا ساده است و در مسائل زیادی کاربرد دارد (مانند زیر مدول.جریان). ایواتا[۴] و مک کرمیک[۵] ، ایرولینا[۶] و مک کرمیک و شایگنا[۷] الگوریتم‌های برش حذفی قوینا چندجمله‌ای با مرتبه‌زمانی $O(m^2 \log m(m+n\log n))$ را مطرح نموده‌اند.

1.Residual Graph
2.Hassin
3.Out-Of-Kilter
4.Iwata
5.McCormick
6.Irvolina
7.Shigeno

الگوریتم‌های سیمپلکس شبکه در عمل بسیار موثر هستند. سریع‌ترین الگوریتم شناخته‌شده تاکنون منسوب به آرمسترونگ[1] و جین[2] است که مرتبه‌زمانی $O(mn\log m(m+n\log n))$ را دارد.

یکی از قدیمی‌ترین الگوریتم‌های دوگان، الگوریتم کوتاهترین مسیر متوالی منسوب به ایری[3] [۲۱] و جول[4] [۲۲] است. ادموند[5] و کارپ[6] [۸] با استفاده از جواب دوگان و ترکیب الگوریتم کوتاهترین مسیر متوالی با مقیاس ظرفیت، اولین الگوریتم با مرتبه‌زمانی چندجمله‌ای را بدست آوردند.

اورلین ظرافت بیشتری بکاربرد و سریع‌ترین الگوریتم قویا چندجمله‌ای را برای مسئله جریان با کمترین هزینه بدست آورد. او برای مسئله جریان باکمترین هزینه و ظرفیت نامحدود، الگوریتم با مرتبه‌زمانی $O(n\log(m+n\log n))$ را با یک تبدیل استاندارد به مسئله ظرفیت محدود تبدیل کرد و مرتبه‌زمانی $O(m\log m(m+n\log n))$ را برای حالت کلی بدست آورد([۲۸] و[۲۹] را ببینید).

در این پایان‌نامه یک الگوریتم پایه‌ای جدید برای مسئله جریان با کمترین هزینه مطرح می-کنیم که ترکیبی از الگوریتم برش حذفی مثبت والگوریتم کلاسیک دوگان سیمپلکس شبکه است و نشان می‌دهیم که $O(n)$ مرحله از زیردنباله‌های الگوریتم پایه‌ای ما بوسیله جستجوی کوتاهترین مسیر اضافی انجام می‌گیرد. بنابراین الگوریتم ما که ترکیبی از این الگوریتم وصنورتی

1.Armestrong
2.Jin
3.Iri
4.Jewell
5.Edmond
6.Karp

از الگوریتم اورلین می‌باشد مرتبه‌زمانی $O(m \log m(m+n \log n))$ را دارد که بهترین کران شناخته شده تاکنون است .

اگر چه ما کران مرتبه‌زمانی را تغییر نمی‌دهیم اما معتقدیم که الگوریتم ما در عمل بهتر اجرا می‌شود. اولین مزیت الگوریتم ما به الگوریتم اورلین این است که این الگوریتم می تواند مستقیما مسئله ظرفیت‌دار را به کارگیرد در حالی که الگوریتم اورلین بر پایه تبدیل این مسئله به مسئله حمل و نقل استوار است. دوم اینکه این الگوریتم به طور طبیعی مسائل کلی بیشتری را بکار می‌گیرد. از آنجا که الگوریتم ما می‌تواند الگوریتم برش حذفی را تعبیرکند، پس بهترین کران چندجمله‌ای شناخته شده این کلاس مهم ازالگوریتم‌ها را با فاکتور m بهبود می‌بخشد. بعبارت دیگر این الگوریتم صورت دیگری ازالگوریتم دوگان سیمپلکس شبکه بوده و لذا سریعتر از الگوریتم جین و آرمسترونگ [۳] با فاکتور n است. در این پایان‌نامه از یک الگوریتم با پیچیدگی‌زمانی خطی برای پیداکردن $s-t$ جریان ماکزیمم در شبکه‌های معروف به شبکه‌های درخت‌گونه استفاده می کنیم و روش کوتاهترین مسیر دایگستری[1] را بعنوان یک زیر الگوریتم مهم برای این الگوریتم بکار می‌بریم.

مطالب این پایان‌نامه به شرح زیر تنظیم شده است: در فصل یک به طور مختصر نمایش استاندارد و مفاهیم پایه‌ای مسائل کوتاهترین مسیر، ماکزیمم جریان و جریان با کمترین هزینه را نشان می‌دهیم. در فصل دو الگوریتم پایه‌ای خودمان را نشان می‌دهیم و صحت و درستی آن را ثابت می کنیم و آن را در زمینه الگوریتم برش حذفی و دوگان سیمپلکس شبکه تعبیر می کنیم و . در مرحله اصلی این الگوریتم، بیشترین برش نقض‌کننده را پیدا می کنیم و آن را به مسئله ماکزیمم جریان در یک شبکه درخت‌مانند تبدیل می کنیم. فصل سه را به این مطلب اختصاص

1.Dijkstra

می‌دهیم که چطور برای این مسئله یک الگوریتم با مرتبه‌زمانی خطی ارائه دهیم. در فصل چهار نشان می‌دهیم که $O(n)$ مرحله از زیردنباله‌های الگوریتم پایه‌ای ما بوسیله محاسبهٔ کوتاهترین مسیر اضافی انجام می‌گیرد. در فصل پنج یک مقیاس استاندارد برای ظرفیت الگوریتم‌مان بکار می‌گیریم و بالاخره در فصل شش یک الگوریتم قویا چندجمله‌ای با مرتبه‌زمانی $O(m\log m(m+n\log n))$ ارائه می‌کنیم.

فصل اول

مسائل شبکه جریان

۱. مسئله‌های شبکه جریان

ما ازنمایش استاندارد استفاده می‌کنیم([۲۴] راببینید). فرض می‌کنیم که با اصطلاحات پایه‌ای گراف آشنا هستیم. همه گراف‌ها جهت‌دار هستند و ممکن است شامل یال‌های چندگانه باشند اما هیچ حلقه‌ای ندارند مگر اینکه خلاف آن بیان شود. همه مسیرها و دورها جهت‌دار هستند.برای گراف $G = (V(G), E(G))$ و زیرمجموعه‌های مجزای $X, Y \subseteq V(G)$، $E(X,Y)$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$E(X,Y) := \{(x,y): \quad x \in X, \ y \in Y\} \tag{۱.۱}$$

و برای اختصار می‌نویسیم:

$$\delta^+(X) := E(X, V(G) \setminus X) \qquad \delta^-(X) := E(V(G) \setminus X, X) \tag{۲.۱}$$

هرجا که لازم باشدگراف یا زیرگراف را با یک اندیس مشخص می‌کنیم. برای یک زیرمجموعه $F \subseteq E(G)$ و راس $v \in V(G)$ به جای $\delta_G^+(\{v\}) \cap F$ از $\delta_F^+(v)$ استفاده می‌کنیم. در سراسر این پایان‌نامه از فاکتور m,n استفاده می‌کنیم که n تعداد راس‌ها و m تعداد یال‌های گراف مورد بررسی است.

سه مسئله شبکه عبارتند از مسئله کوتاهترین مسیر، مسئله ماکزیمم جریان و مسئله جریان با کمترین هزینه. چون در زیربرنامه‌های الگوریتم‌مان از الگوریتم این مسائل استفاده می‌کنیم مختصرا بعضی مفاهیم پایه‌ای و سریع‌ترین الگوریتم‌های شناخته‌شده آنها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱.۱ مسئله کوتاهترین مسیر

یک نمونه از مسئله کوتاهترین مسیر شامل گراف جهت‌دار G با راس معلوم $s \in V(G)$ و هزینه-های یال $c: E(G) \longrightarrow R$ است. با این فرض که G هیچ دور جهت‌دار با هزینه کلی منفی ندارد، شروع می‌کنیم در غیر اینصورت مسائل از نوع مسائل $NP-hard$ هستند. ما بدنبال پیداکردن یک عدد $\pi(v)$ و یک یال $\rho(v)$ برای هر $v \in V(G) \setminus \{s\}$ هستیم که $\pi(v)$ مینیمم هزینه یک $s-v$ مسیر جهت‌دار است و $\rho(v)$ آخرین یال چنین مسیری است (اگر وجود داشته-باشد) و یال آخر کافی است چون یک $s-v$ مسیر بدون یال آخر $\rho(v)=(w,v)$ باید یک کوتاهترین $s-w$ مسیر باشد. عدد π که پیدا می‌کنیم باید در رابطه

$$\pi(y) \leq \pi(x) + c(x,y) \qquad \forall \quad (x,y) \in E(G) \tag{۳.۱}$$

صدق کند. در اینصورت تابع π را یک پتانسیل شدنی گوئیم.

همچنین می‌دانیم که یک پتانسیل شدنی وجود دارد اگر و فقط اگر هیچ دور منفی وجود نداشته باشد. الگوریتم کلاسیک منسوب به مری[1] [۲۵] ، بلمن[2] [۴] و فورد[3] [۱۱] سریعترین الگوریتم برای حل کردن مسئله کوتاهترین مسیر(یا پیداکردن یک دور منفی) در حالت کلی است. این الگوریتم مرتبه‌زمانی $O(mn)$ را دارد و اگر هزینه همه یال‌ها اعداد صحیح داخل یک مجموعه مقادیر معین باشد، الگوریتم‌های سریعتری نیز وجود دارد. در موارد خاص که c نامنفی است، الگوریتم دایگستری که با روش جستجوی فیبوناچی انجام می‌شود پیچیدگی‌زمانی $O(m + n\log n)$ را دارد.

1.Moori
2.Bellman
3.Ford

۲.۱ مسئله ماکزیمم جریان

به مسائل جریان برمی‌گردیم. گراف جهت‌دار G با ظرفیت نامنفی $u:E(G)\longrightarrow R^{+}\cup\{\infty\}$ داده شده‌است، برای همه $e\in E(G)$ بدنبال پیداکردن یک جریان یعنی تابع $f:E(G)\longrightarrow R^{+}$ با $f(e)\le u(e)$ هستیم.

برای مسئله ماکزیمم جریان ما دو راس خاص $s,t\in V(G)$ داریم. چهارتایی (G,u,s,t) را یک شبکه گوییم و برای همه $v\in V(G)\setminus\{s,t\}$ بدنبال پیداکردن یک جریان با $f(\delta^{-}(v))=f(\delta^{+}(v))$ هستیم (یک $s-t$جریان) و می‌خواهیم $f(\delta^{+}(s))-f(\delta^{-}(s))$ ماکزیمم شود. این را مقدار جریان گوییم(برای تابع $f:X\longrightarrow R$ و زیرمجموعه $Y\subseteq X$ تعریف می‌کنیم $f(Y)=\sum_{y\in Y}f(y)$). قضیه مشهور مینیمم‌برش و ماکزیمم‌جریان بیان می‌کند که ماکزیمم مقدار یک $s-t$جریان مساوی مینیمم ظرفیت یک $s-t$برش است، یعنی:

$$\max\{f(\delta^{+}(s))-f(\delta^{-}(s))\}=\min\{u(\delta^{+}(A)),s\in A\subseteq V(G)\setminus\{t\}\} \qquad (۴.۱)$$

یک نمونه از مسئله جریان همیشه یک جواب شدنی دارد، مسئله جواب بیکران دارد اگر و فقط اگر یک $s-t$مسیر وجود داشته باشد که ظرفیت همه یال‌های آن نامتناهی باشد(این به آسانی با مرتبه‌زمانی $O(m+n)$چک می‌شود). موقعی که یک تابع $f:E(G)\longrightarrow R$ داریم (یعنی یک جریان) اغلب یک گراف مانده را بررسی می‌کنیم. برای تعریف گراف مانده ابتدا گراف $\overleftrightarrow{G}$ را معرفی می‌کنیم. گراف $\overleftrightarrow{G}$ گرافی است که برای هر $e=(v,w)\in E(G)$ شامل یال معکوس $\overleftarrow{e}=(w,v)$ است. ظرفیت‌مانده $u_f:E(\overleftrightarrow{G})\longrightarrow R$ نسبت به f برای همه $e\in E(G)$ بوسیله $u_f(e)=u(e)-f(e)$, $u_f(\overleftarrow{e})=f(e)$ تعریف می‌شود. گراف مانده G_f یک زیرگراف $\overleftrightarrow{G}$

است که شامل یال‌هایی با ظرفیت مانده مثبت است. f یک جریان است اگر و فقط اگر همه ظرفیت‌های مانده نامنفی باشند.

فرض می‌کنیم $f: E(G) \longrightarrow R$ یک جریان باشد و $e \in E(\overleftrightarrow{G})$. δ واحد جریان در طول یال e ارسال می‌کنیم، یعنی اگر $e \in E(G)$ ، $f(e)$ به اندازه δ واحد افزایش می‌یابد و اگر $r \in E(G)$ و $e = \overleftarrow{r}$ ، $f(e)$ به اندازه δ کاهش می‌یابد. اگر f یک جریان باشد و $\delta \leq u_f(e)$، f یک جریان باقی می‌ماند. اگر $\delta = u_f(e)$ ، δ یک جریان ارسالی اشباع‌کننده یال e است. یک f - مسیراضافی یک $s-t$ مسیر در گراف مانده G_f است که می‌توانیم جریان f را با ارسال جریان در طول چنین مسیری اضافه کنیم(افزایش در مقدار) و زمانی که هیچ f - مسیراضافی وجود نداشته‌باشد جریان بدست آمده جریان بهینه است. برعکس آن نیز درست است یعنی جریان f بهینه است(ماکزیمم مقدار را دارد) اگر هیچ f - مسیراضافی وجود نداشته باشد.

سریع‌ترین و رایج‌ترین الگوریتم برای مسئله جریان منسوب به کینگ[1] ، راو[2] و تارجان[3] [۲۳] است که مرتبه‌زمانی‌آن یک قویا چندجمله‌ای به صورت $O(mn \log_{2+m/n\log n} n)$ است و الگوریتم گلدبرگ[4] و راو [۱۷] برای زمانی که ظرفیت همه یال‌ها صحیح و حداکثر u است، سریع‌تراست و مرتبه‌زمانی $O(\min\{n^{2/3}, m^{1/2}\} m \log \frac{n^2}{m} U)$ را دارد.

۳.۱ مسئله جریان با کمترین هزینه

برای مسئله جریان با کمترین هزینه هیچ راس خاصی نداریم، اما اعداد را $b: V(G) \longrightarrow R$ داریم. اگر $b(v)$ مثبت باشد نشان‌دهنده عرضه و اگر $b(v)$ منفی باشد نشان‌دهنده تقاضا برای هر

1.King
2.Rao
3.Tarjan
4.Goldberg

راس است. ما بدنبال پیداکردن جریان f با

$$b_f(v) = b(v) - f(\delta^+(v)) + f(\delta^-(v)) \le 0 \qquad \forall \ \ v \in V(G) \qquad (۵.۱)$$

هستیم. این را یک b −جریان گوییم. همچنین هزینه‌های یال $c : E(G) \longrightarrow R$ را داریم و می‌خواهیم $\sum_{e\in E(G)} c(e)f(e)$ را بینیمم کنیم. تعریف ما از مسئله جریان با کمترین هزینه اندکی کلی‌تر از حالت معمول است که معادل حالتی است که $b(V(G)) = 0$. اگر چه، هر نمونه‌ای را می‌توان به حالتی با $b(V(G)) = 0$ تبدیل کرد. این کار حالت مناسب و راحتی را بوجود می‌آورد.

بدیهی است که جریان f یک b −جریان است اگر و فقط اگر عدم تعادلش صفر باشد یعنی:

$$\max(b_f(A) \quad A \subseteq V(G)) = 0 \qquad (۶.۱)$$

که $b_f(A) = \sum_{v\in A\subset V(G)} b_f(v)$

(عدم تعادل همیشه نامنفی است چون $b_f(\phi) = 0$)

به منظور آزمودن نشدنی بودن یک نمونه از مسئله جریان باکمترین هزینه می‌توانیم آن را به مسئله ماکزیمم جریان تبدیل کنیم که در اینصورت از قضیه زیر پیروی می‌کند ما آن را در شکل قویتری از حالت معمول بیان می‌کنیم و در مراحل بعد از آن استفاده خواهیم کرد.

قضیه ۱.۱. فرض می‌کنیم G یک گراف جهت‌دار با ظرفیت $u : E(G) \longrightarrow R^+$ است و قرار می‌دهیم $b : V(G) \longrightarrow R$ شبکه (N,u,s,t) که شبکه متعادل (G,u,b) نامیده می‌شود را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$V(N) := V(G) \cup \{s,t\}$$
$$E(N) := E(G) \cup \{(s,v) : v \in V(G), \ \ b(v) > 0\} \cup \{(v,t) : v \in V(G), \ \ b(v) < 0\}$$
$$u(s,v) := b(v) \qquad \forall v, \quad b(v) > 0$$
$$u(s,v) := -b(v) \qquad \forall v, \quad b(v) < 0$$

عدم‌تعادل‌مینیمم جریان در شبکه (G,u) را بصورت:

$$\max\{b(A)-u(\delta_G^+(A)) \quad A\subseteq V(G)\}$$

تعریف می‌کنیم. مجموعه‌های $A\subseteq V(G)$، $b(A)-u(\delta_G^+(A))$ را برطبق مینیمم‌ظرفیت $s-t$برش در (N,u) ماکزیمم می‌کند. بعلاوه یک تناظر یک‌به‌یک بین جریان f در (G,u) با مینیمم عدم تعادل و ماکزیمم $s-t$ جریان‌ها در (N,u) وجود دارد.

اثبات:

قرارمی‌دهیم $V^+ := \{v\in V(G): b(v)>0\}$. برای $A\subseteq V(G)$ ، $s-t$برش $\delta_N^+(\{s\}\cup A)$ ظرفیت $b(V^+)-b(A)+u(\delta_G^+(A))$ را دارد. چون یک تناظر یک‌به‌یک بین مجموعه‌های A که $b(A)-u(\delta_G^+(A))$ را ماکزیمم می‌کند و مینیمم ظرفیت $s-t$برش‌ها در (N,u) برقرار است، با استفاده از قضیه ماکزیمم جریان و مینیمم برش برای هر $s-t$جریان ماکزیمم g در (N,u)داریم:

$$g(\delta^+(\{s\}\cup X))-g(\delta^-(\{s\}\cup X))=b(V^+)-\alpha_{\max} \quad \forall \quad X\subseteq V(G) \tag{۷.۱}$$

که $\alpha_{\max}$ را بشکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\alpha_{\max} := \max\{b(A)-u(\delta_G^+(A)) : A\subseteq V(G)\} \tag{۸.۱}$$

از اینرو تحدید f به g در G برای هر $X\subseteq V(G)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} b_f(X) &= b(X)-g(\delta_G^+(X))+g(\delta_G^-(X)) \\ &= b(X)-g(\delta_N^+(\{s\}\cup X))+g(\delta_N^-(\{s\}\cup X))+\sum_{v\in V^+\setminus X} g((s,v))+\sum_{v\in X\setminus v^+} g((v,t)) \\ &= b(X)-b(V^+)+\alpha_{\max}+\sum_{v\in V^+\setminus X} g((s,v))+\sum_{v\in X\setminus v^+} g((v,t)) \\ &\le \alpha_{\max} \end{aligned} \tag{۹.۱}$$

از اینرو مینیمم عدم‌تعادل حداقل $\alpha_{\max}$ است.