بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته ی ریاضی محض گرایش آنالیز

نظریه دوگانگی برای مسائل برنامه ریزی نیم نامتناهی محدب

استاد راهنما:

دکتر صغری نوبختیان

استادمشاور:

دکترمحمدرضاپوریای ولی

پژوهشگر:

یاسرکیانی چلمردی

شهریور ماه ۱۳۸۸

کلیه حقوق مادی مرتبط بر نتایج مطالعات، ابتکارات و نوآوری های ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه متعلق به دانشگاه اصفهان است.

شیوه نگارش پایان نامه
رعایت شده است.
تحصیلات تکمیلی دانشگاه اصفهان

بسمه تعالی

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش آنالیز آقای یاسر کیانی چلمردی

تحت عنوان:

نظریه دوگانگی برنامه ریزی نیم نامتناهی محدب

در تاریخ ... ۸۸/۶/۱۶...... توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه ......بسیار خوب...... به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه	دکتر صغری نوبختیان	با مرتبه علمی دانشیار	امضاء
۲- استاد مشاور پایان نامه	دکتر محمدرضا پوریای ولی	با مرتبه علمی دانشیار	امضاء
۳- استاد داور داخل گروه	دکتر علی داوری	با مرتبه علمی استادیار	امضاء
۴- استاد داور خارج گروه	دکتر علی دلاور خلفی	با مرتبه علمی استادیار	امضاء

مهر و امضای مدیر گروه ....

تشکر و قدردانی

حال که به یاری پروردگار موفق به طی دوره کارشناسی ارشد شدم، بجاست از افرادی که در این مقطع از وجودشان بهره جستم، یاد کنم. ابتدابوسه میزنم بر دستان پدرو مادرم که هرچه دارم از آنها دارم واز خداوند منان برایشان عمر باعزت خواستارم. از سرکارخانم دکتر نوبختیان که با صبر و بردباری در این سالها بنده را از راهنمایی های خود بهره مند ساختند، صمیمانه تشکر می کنم همچنین از جناب آقای دکتر پوریای ولی قدردانی کرده و برایش آرزوی توفیق روز افزون دارم. همین طور باید از اساتید محترم گروه ریاضی دانشگاه اصفهان و از داوران داخلی و خارجی خودم آقایان دکتر داوری و دکتر دلاور خلفی سپاسگزاری کنم. از دوستان دوره کارشناسی ارشدم آقایان قاسم ستوده، بهزادسلیمان زاده، ساسان امیری، محسن امینی، علی موسوی،... که وجودشان همواره برای من موجب دلگرمی بوده است، ممنونم. برای برادر عزیزم محمدعلی که همواره در کنار من بوده، آرزوی موفقیت می کنم. ازآقایان محمد گلستانی و حمید شاهوردی به خاطر کمک های بی منتشان تشکر می کنم. در نهایت از همه دوستانی که باید از آنها یاد می شد، ولی نامشان به هر دلیلی از قلم افتاد، طلب پوزش کرده و بهترین آرزوها را برایشان دارم.

یاسرکیانی چلمردی

شهریور ۱۳۸۸

تقدیم به : همه کسم

پدرم

که نصایحش روشنایی بخش راهم بود

و مادرم

که صفا و صمیمیتش درس فداکاری به من آموخت

و خواهرانم و برادرم

که با گذشت های خود به من درس ایثار آموختند

وتقدیم به تمام کسانی که دوستشان دارم ...

چکیده

در این رساله، ما خواص دوگانگی ضعیف و قوی از مسائل برنامه ریزی نیم نامتناهی محدب را مطالعه می کنیم. در ادامه مسائل برنامه ریزی نیم نامتناهی و نیم معین (SDSIP) که شامل برنامه های نیم نامتناهی خطی و نیم معین است را بیان می کنیم.

واژه های کلیدی

برنامه ریزی نیم نامتناهی، دوگانگی ضعیف و قوی، دوگانگی لاگرانژ، مسائل مین ماکس.

فهرست مطالب

فهرست مطالب

مقدمه

برنامه ریزی نیم نامتناهی در فضای اقلیدسی متناهی البعد با تعداد نامتناهی قیود نامساوی در زمینه های متفاوت مهندسی مانند طراحی سیستم های کنترل ، تقریب بهینه سازی چند هدفه و...کاربرد دارد. در این پایان نامه به بررسی قضایای دوگانگی روی مسائل برنامه ریزی نیم نامتناهی و نیم معین تحت شرایط گوناگون می‌پردازیم.

این پایان نامه شامل ۴ فصل می‌باشد.

فصل اول شامل تعاریف، قضایا و نتایجی است که در اثبات قضایا و نتایج فصول بعدی استفاده می‌شوند.

در فصل دوم ابتدا به بررسی دوگانگی ضیف و دوگانگی قوی می‌پردازیم. وشرایطی را بیان می‌کنیم که تحت آن مقدار بهینه مساله اولیه و دوگان با هم برابرند.

در فصل سوم حالت های مختلف از یک مساله برنامه ریزی نیم نامتناهی (برنامه ریزی درجه دو، برنامه ریزی خطی ،...) را بررسی می کنیم و به بیان مسائل دوگان دورن و ولف [۱] و کاربرد این مسائل در برنامه ریزی نیم نامتناهی می‌پردازیم.

در فصل چهارم هدف ما بیان یک نوع رابطه بین مسائل برنامه ریزی نیم نامتناهی و نیم معین است . سپس شرایطی را بیان می‌کنیم که دوگانگی یکنواخت برقرار باشد.

---

[۱] Dorn, Wolfe

فصل ۱

مفاهیم اولیه

این فصل شامل تعاریف، قضایا و نتایجی است، که در اثبات قضایا و نتایج فصول بعدی به کار رفته‌اند. در این فصل از مراجع [۱۱، ۱۰، ۹، ۸، ۲، ۱] استفاده شده‌است.

تعریف ۱.۱ . فضای برداری حقیقی مجموعه ای است مانند V که عناصرش را بردار می‌نامیم و در آن دو عمل به نام های جمع وضرب اسکالر تعریف شده و دارای خواص جبری زیر است.

الف) به هر جفت بردار x و y بردار $x+y$ چنان نظیر است که

$$x+y=y+x \quad , \quad x+(y+z)=(x+y)+z.$$

ب) V شامل بردار منحصر به فرد ۰ (بردار صفر) است به طوری که به ازای هر $x \in V$

$$x+0=x.$$

ج) به هر $x \in V$ بردار منحصر به فرد $-x$ چنان نظیر است که

$$x+(-x)=0.$$

د) به هر جفت (α, x) که $x \in V$ و α اسکالر (عدد حقیقی) است بردار $\alpha x \in V$ چنان نظیر است که $1x=x$ و $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$.

و) دو قانون پخش پذیری زیر برقرار است

$$(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x \quad , \quad \alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y.$$

تعریف ۲.۱ . فضای متریک مجموعه‌ای است مانند X همراه با یک تابع فاصله(متریک) مانند $d: X \times X \longrightarrow R$ با خواص زیر:

الف) به ازای هر x, y، $0 \leq d(x,y) < \infty$، یعنی فاصله همواره عدد نامنفی است.

ب) $d(x,y)=0$ اگر و فقط اگر $x=y$

پ)به ازای هر x, y در X، $d(x,y)=d(y,x)$

ت)به ازای هر x, y, z در X داریم:

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y).$$

که این خاصیت را خاصیت مثلثی گوییم.

تعریف ۳.۱ . فضای برداری حقیقی X را یک فضای خطی نرمدار حقیقی نامیم، اگر به هر $x \in X$ یک عدد حقیقی نامنفی $\|x\|$، به نام نرم چنان مربوط شده باشد که:

الف)به ازای هر x, y داشته باشیم $\|x + y\| \leq \|x\|+\|y\|$.

ب)اگر $x \in X$ و α عدد حقیقی باشد، آن‌گاه $\|\alpha x\|=|\alpha|\ \|x\|$.

پ) $\|x\| =0$ تساوی $x = 0$ را ایجاب کند.

بنابر(الف) خاصیت مثلثی برقرار است، زیرا اگر:

$$\|x - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| \quad , \ x, y, z \in X.$$

این مطلب در تلفیق با (ب) و (پ) نشان می‌دهد که هر فضای خطی نرمدار را می‌توان یک فضای متریک درنظر گرفت، که در آن فاصله‌ی بین x, y مساوی $\|x - y\|$ است.

تعریف ۴.۱ . در فضای متریک X دنباله $\{x_n\} \subset X$ را کشی گوییم هرگاه

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists N, \ \forall m, n > N, \ \ d(x_m, \ x_n) < \epsilon$$

تعریف ۵.۱ . فضای متریک X را تام گوییم هرگاه هر دنباله کشی از عناصر X در این فضا همگرا باشد.

تعریف ۶.۱ . فضای باناخ یک فضای خطی نرمدار است که با متر تعریف شده به وسیلهٔ نرمش تام است.

تعریف ۷.۱ . هرگاه X,Y دو فضای برداری باشند نگاشت $A:X\to Y$ را یک عملگر خطی گوییم هرگاه
$$\forall x,y\in X,\ \alpha\in C,\ A(\alpha x+y)=\alpha A(x)+A(y)$$

تعریف ۸.۱ . فرض کنید X,Y دو فضای برداری نرم دار باشند در این صورت عملگر خطی $A:X\to Y$ را کراندار گوییم هرگاه یک ثابت M وجود داشته باشد به طوری که

$$||Ax||\le M||x||$$

تعریف ۹.۱ . فضای نرمدار از همه عملگرهای خطی و کراندار ازفضای نرم دار X به فضای نرم دار Y را با $B(X,\ Y)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۱۰.۱ . فرض کنید X,Y فضاهای نرمدار باشند و $A\in B(X,\ Y)$ عملگر الحاق $A^*:Y^*\to X^*$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\langle x,A^*y^*\rangle=\langle Ax,\ y^*\rangle$$

تعریف ۱۱.۱ . گردایهٔ $\mathcal{M}$ از زیر مجموعه های مجموعهٔ X را یک $\sigma-$جبر در X نامیم اگر $\mathcal{M}$ از خواص زیر بهره مند باشد:

(یک) $X\in\mathcal{M}$

(دو) هرگاه $A\in\mathcal{M}$، آنگاه $A^c\in\mathcal{M}$، که $A^c\in\mathcal{M}$ متمم A نسبت به X است.

(سه) هر گاه $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ و به ازای $n = 1, 2, 3, \cdots$، $A_n \in \mathcal{M}$، آنگاه $A \in \mathcal{M}$.

تعریف ۱۲.۱ . گردایه τ از زیرمجموعه‌های X را یک توپولوژی در X گوییم، اگر τ دارای سه خاصیت زیر باشد:

الف) $\emptyset \in \tau$ و $X \in \tau$

ب) هرگاه به‌ازای $i = 1, 2, \cdots, n$، $v_i \in \tau$ آن‌گاه $v_1 \cap \cdots \cap v_n \in \tau$ باشد.

پ) هرگاه $\{v_\alpha\}$ گردایه‌ی دلخواهی از اعضای τ (متناهی، شمارش پذیر و یا شمارش ناپذیر) باشد، آن‌گاه $\bigcup_\alpha v_\alpha \in \tau$ است. هرگاه τ یک توپولوژی در X باشد، آن‌گاه جفت (X, τ) را یک فضای توپولوژیک و اعضای τ را مجموعه‌های باز گویند.

تعریف ۱۳.۱ . هرگاه $\mathcal{M}$ یک σ−جبر در X باشد، آنگاه X را یک فضای اندازه پذیر و اعضای $\mathcal{M}$ را مجموعه های اندازه پذیر در X می‌نامیم.

تعریف ۱۴.۱ . اگر $\mathcal{M}$ یک σ−جبرروی مجموعه S و μ یک اندازه روی $\mathcal{M}$ باشد آنگاه ۳تایی $(S, \mathcal{M}, \mu)$ را یک فضای اندازه گویند و اعضای $\mathcal{M}$ را مجموعه های اندازه پذیر گویند.

تعریف ۱۵.۱ . هر گاه X یک فضای اندازه پذیر، Y یک فضای توپولوژیک، و f نگاشتی از X به توی Y باشد، آنگاه گوییم f اندازه پذیر است اگر به ازای هر مجموعهٔ باز V در Y، $f^{-1}(V)$ یک مجموعهٔ اندازه پذیر در X باشد.

تعریف ۱۶.۱ . اگر $0 < p < \infty$ و f یک تابع اندازه پذیر مختلط بر X باشد، تعریف می کنیم

$$\| f \|_p = \left\{ \int_X |f|^p d\mu \right\}^{\frac{1}{p}}$$

و $L^p(\mu)$ از تمام fهایی تشکیل شده باشد که

$$\| f \|_p < \infty$$

ما $\| f \|_p$ را نرم L^pی f می‌نامیم.

تعریف ۱۷.۱ . الف) X یک فضای هاسدورف[1] است در صورتی که شرط زیر برقرار باشد هرگاه $p \in X$، $q \in X$، و $p \neq q$، آنگاه p همسایگی مانند U و q همسایگی مانند V وجود داشته باشد به طوری که $U \cap V = \emptyset$.

ب) اگر X یک فضای توپولوژیک و $\mathcal{B}$ کوچکترین σ−جبر در X بطوری باشد که هر مجموعهٔ باز در X متعلق به $\mathcal{B}$ است. اعضای $\mathcal{B}$ را مجموعه های بورل X می‌نامیم.

ج) مجموعهٔ E در یک فضای اندازه(با اندازه μ) دارای σ−اندازهٔ متناهی است اگر E اجتماع شمارشپذیری از مجموعه های E_i باشد که $\mu(E_i) < \infty$.

تعریف ۱۸.۱ . یک فضای برداری توپولوژیک X ، یک فضای برداری روی میدان F و یک توپولوژی روی X همراه با خواص زیر است:

الف) به ازای هر $x \in X$ مجموعه‌ی تک عضوی $\{x\}$ بسته است.

[1] Hausdorff

ب) تابع مجموع از $X \times X \to X$ با ضابطه‌ی $(x,y) \to x+y$ یک تابع پیوسته است.

پ) تابع ضرب اسکالر از $F \times X \to X$ با ضابطه‌ی $(\alpha, x) \to \alpha x$ یک تابع پیوسته است.

تعریف ۱۹.۱ . یک فضای توپولوژیک برداری X روی R موضعاً محدب نامیده می‌شود اگر یک فضای هاسدورف باشد، به طوری که هر همسایگی از هر نقطه‌ی $x \in X$ در یک همسایگی محدب از x قرار گیرد.

تعریف ۲۰.۱ S را یک زیرمجموعه‌ی دلخواه ازفضای متریک X در نظر می‌گیریم. نقطه‌ی x را متعلق به بستار S گوییم و می‌نویسیم $x \in clS$ ، اگر برای هر $\varepsilon > 0$، $S \cap N_\varepsilon(x) \neq \emptyset$ باشد که منظور از $N_\varepsilon(x)$ همسایگی به شعاع ε حول نقطه x می‌باشد.

اگر $S = clS$ آن‌گاه S را بسته گویند. به عبارت دیگر S بسته است اگر شامل تمام نقاط مرزیش باشد. همچنین توجه می‌کنیم که بستار S کوچکترین مجموعه‌ی بسته شامل S است و به علاوه $clS = S \cup \partial S$

تعریف ۲۱.۱ . اگر X یک فضای متریک باشد، x را یک نقطه‌ی درونی مجموعه‌ی $S \subset X$ گوییم اگر $\varepsilon > 0$ موجود باشد که $N_\varepsilon(x) \subset S$ باشد، مجموعه نقاط درونی S را با $intS$ نمایش می‌دهیم.

$intS$ بزرگترین مجموعه‌ی باز مشمول در S می‌باشد.

تعریف ۲۲.۱ . فرض می‌کنیم (X,d) یک فضای متریک باشد. تابع $f : X \to R \cup \{\infty\}$ را در نقطه‌ی $x_\circ$ نیم‌پیوسته بالایی[۲] گوییم، اگر برای هر $\varepsilon > \circ$ ، $\delta > \circ$ وجود داشته باشد، به‌طوری که

$$y \in B_\delta(x_o) \Rightarrow f(y) \leq f(x_\circ) + \varepsilon.$$

همچنین تابع f از فضای X به $R \cup \{\infty\}$ در نقطه‌ی $x_\circ$ نیم‌پیوسته بالایی گوییم، اگر و فقط اگر

$$\limsup_{x \to x_\circ} f(x) \leq f(x_\circ) \ .$$

توجه کنید به تابعی نیم‌پیوسته بالایی گوییم که در هر نقطه‌ی $x \in X$ نیم‌پیوسته بالایی باشد.

همچنین f نیم پیوسته پایینی است اگر $-f$ نیم پیوسته بالایی باشد.

تعریف ۲۳.۱ . اگر X یک فضای برداری باشد، مجموعه‌ی $S \subset X$ را محدب گوییم، اگر برای هر $x_\backslash, x_\Upsilon \in S$ داشته باشیم:

$$\lambda x_\backslash + (\backslash - \lambda) x_\Upsilon \in S \quad \forall \lambda \in [\circ, \backslash].$$

اشتراک هر خانواده از مجموعه‌های محدب، محدب است.

تعریف ۲۴.۱ . به کوچکترین مجموعه‌ی محدبی که شامل مجموعه‌ی S باشد، غلاف محدب[۳] گویند و با $Co(S)$ نمایش می‌دهند یا به عبارت دیگر:

$$Co(S) = \left\{ \sum_{i=\backslash}^{k} \alpha_i x_i : \quad \alpha_i \geq \circ \ , \ \sum_{i=\backslash}^{k} \alpha_i = \backslash \ , \ x_i \in S \right\} \ .$$

[۲] upper semi-continuous

[۳] convex hull

تعریف ۲۵.۱ . فرض کنید $X_\circ \subset R^n$ یک مجموعه‌ی محدب باشد. تابع $f : X_\circ \to R$ را محدب می‌گویند هرگاه:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \quad \forall x, y \in X_\circ \ , \ \forall \lambda \in [0, 1].$$

حال اگر نامساوی به صورت اکید باشد، آن‌گاه تابع $f(\cdot)$ را به طور اکید محدب می‌گویند و همچنین اگر نامساوی فوق به صورت تساوی باشد، آن‌گاه تابع $f(\cdot)$ را آفین می‌گویند.

قضیه ۲۶.۱ .[۱] اگر $X_\circ$ یک مجموعه‌ی باز در R^n باشد و $f : X_\circ \to R$ تابعی مشتق پذیر باشد، حال اگر گرادیان نسبت به x را با نماد ∇ نمایش دهیم، تابع $f(\cdot)$ در نقطه‌ی $x_\circ \in X_\circ$ محدب است هرگاه

$$\forall x \in X_\circ \ , (x - x_\circ)^t \nabla f(x_\circ) \leq f(x) - f(x_\circ).$$

همچنین اگر تابع $f(\cdot)$ در نقطه‌ی $x_\circ$ به طور اکید محدب باشد، آن گاه نامساوی مذکور به صورت اکید می‌باشد.

تعریف ۲۷.۱ . یک بردار ξ را یک زیر گرادیان تابع f در نقطه x گوییم هرگاه برای هر $y \in \mathbb{R}^n$ $.f(y) \geq f(x) + \xi(y - x)$

مجموعه همه زیر گرادیان های f روی x را زیر دیفرانسیل f روی x گویند و با $\partial f(x)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۲۸.۱ . نگاشت چند مقداری $\partial f : x \to \partial f(x)$ را زیر دیفرانسیل از f می‌نامیم.

تذکر ۲۹.۱ . $\partial f(x)$ یک مجموعه محدب بسته است.

تعریف ۳۰.۱ . اگر $\partial f(x)$ تهی نباشد گوییم f زیر دیفرانسیل پذیر در x است.

تعریف ۳۱.۱ . اگر S یک زیرمجموعه‌ی محدب غیرتهی از R^n باشد، به تابع $f: S \to R$ شبه‌محدب [۴] گوییم، اگر برای هر $x_۱, x_۲ \in S$، نامساوی زیر برقرار باشد:

$$f(\lambda x_۱ + (۱-\lambda)x_۲) \leq \max\{f(x_۱), f(x_۲)\} \quad \forall \lambda \in (۰, ۱).$$

تعریف ۳۲.۱ . اگر S یک زیرمجموعه‌ی محدب غیرتهی از R^n باشد، به تابع $f: S \to R$ شبه‌محدب اکید گوییم، اگر برای هر $x_۱, x_۲ \in S$ و $f(x_۱) \neq f(x_۲)$ داشته باشیم:

$$f(\lambda x_۱ + (۱-\lambda)x_۲) < \max\{f(x_۱), f(x_۲)\} \quad \forall \lambda \in (۰, ۱).$$

تعریف ۳۳.۱ . مجموعه‌ی $K \subseteq R^n$ را مخروط می‌نامند، اگر به ازای هر $x \in K$ و هر عدد حقیقی مثبت α، $\alpha x \in K$ باشد.

قضیه ۳۴.۱ . [۱۰] $K \subset R^n$ یک مخروط محدب است اگر و تنها اگر:

الف) برای هر $\alpha > ۰$ و برای هر $x \in K$ ، $\alpha x \in K$.

ب) برای هر $x_۱, x_۲ \in K$ ، $x_۱ + x_۲ \in K$.

توجه کنید که:

۱) فوق صفحه‌های گذرنده از یک نقطه، مخروط محدب‌اند.

۲) اگر $K_۱$ و $K_۲$ مخروط محدب باشند، آن گاه $K_۱ \cap K_۲$ و $K_۱ + K_۲$ نیز مخروط محدب‌اند.

---

[۴] quasi convex