بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه الزهراء (س)

دانشکده علوم‌پایه

پایان‌نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی‌ارشد

رشته‌ی فیزیک نظری

عنوان

فاز هندسی در سیستم های قطبیده

استاد راهنمای اول

دکتر محمد مهرآفرین

استاد راهنمای دوم

دکتر احمد شریعتی

دانشجو

حمیده بالاجانی طالقانی

شهریور ۱۳۸۸

تقدیم به مادر

و پدر عزیزم

و همسرم

قدردانی و تشکر

قبل از هر چیز لازم می دانم از راهنمایی های ارزشمند آقای دکتر مهرآفرین و همچنین زحماتی که در طول مدت این تحقیق متحمل شدند، سپاسگذاری نمایم. بعلاوه از آقای دکتر شریعتی نیز به خاطر همکاریشان متشکرم.

در انتها از خانواده عزیزم، پدر و مادرم و همچنین همسرم، به خاطر صبر و حمایتهایشان که مرا در به پایان رساندن این رساله یاری رساندند، نهایت قدردانی و تشکر را دارم.

چکیده

در مسائل ترابرد اسپینی اگر در حین ترابرد امواج قطبیده در یک محیط، برخی پارامترهای محیط به آرامی تغییر کند(تغییر بی دررو[1])، یک فاز هندسی ظاهر شده که بر دینامیک ترابردی سیستم تأثیر می‌گذارد. در این رساله ما ادبیات مربوط به اثر فاز هندسی در ترابرد امواج قطبیده اپتیکی و آکوستیکی را مرور می‌کنیم. سپس یک مسئله خاص، ترابرد اسپینی امواج قطبیده اپتیکی پیرامحور[2] در محیطی با ناهمگنی آرام[3] را مورد بررسی قرار می‌دهیم. معادلات ماکسول در فرم دیراک گونه برای مطالعه ترابرد امواج اپتیکی پیرامحور در محیطی با ناهمگنی آرام بسیار مناسب می‌باشد. با استفاده از این فرم و از طریق تکنیک تبدیل فولدی—ووتایسنِ[4] معادله دیراک، بخش های اثر فاز بری را استنتاج می‌نمائیم که منجر به اثر هال اسپینی و قانون چرخش صفحه قطبش ریتو برای ترابرد باریکه پیرامحور قطبیده می‌شوند.

[1] Adiabatic

[2] Paraxial

[3] Smooth

[4] Foldy-Wouthuysen

فهرست

۲ فاز هندسی در سیستم های قطبیده

۳ ترابرد اسپینی پرتوهای پیرامحور

پیوست

فصل اول

معرفی فاز هندسی

۱.۱ فاز هندسی بری

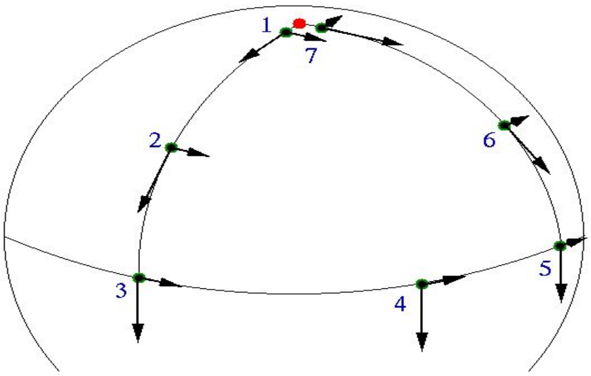
هر شئ برداری که به صورت موازی[۱] در روی یک مسیر بسته منتقل می‌شود، ممکن است نسبت به جهت اولیه‌اش قبل از انتقال، زاویه پیدا کند، این زاویه یک خصوصیت هندسی است.

۱.۱.۱ یک مثال در هندسه‌ی مقدماتی

یک مثال کلاسیکی مستقیم از چنین موقعیتی، انتقال موازی یک بردار روی یک کره می‌باشد. هر دو بردار در شکل (۱—۱)، در تمام لحظات مماس بر سطح منحنی‌اند. از قطب شمال شروع کرده، و در طول مسیر انتقال می‌یابند، به گونه ای موازی مسیر حرکت می‌کنند که در همه ی لحظه‌ها پیکان بردار بزرگ به سمت جنوب و پیکان بردار کوچک به سمت شرق است. بعد از اتمام مسیر، با وجود این که بردارها به طور موازی انتقال یافتند، اما نسبت به حالت اولیه‌ی خود چرخیده‌اند. هر چقدر مسیر بسته‌کوتاهتر باشد،

[۱] Parallel transport

زاویه‌ی چرخش کوچکتر است. در شکل (۱—۱)، مسیر بسته $\frac{1}{8}$ کره می‌باشد. زاویه‌ی چرخش به دست آمده $90^{\cdot}$ است. برای یک مسیر طولانی تر، مثلاً $\frac{1}{4}$ کره، بردارهای موازی به اندازه‌ی $180^{\cdot}$ می‌چرخند و حتی درحلقه‌های به اندازه نیمی از کره، زاویه‌ی چرخش $360^{\cdot}$ است، یعنی چرخش اتفاق نمی‌افتد.علت چرخش، کاملاً هندسی توپولوژیکی می‌باشد وبه انحناء ذاتی کره مربوط است. زاویه‌ی چرخش در حقیقت به انتگرال انحناء سطحی که با مسیر بسته محدود شده، مربوط است. چنین زاویه‌ی‌چرخشی به عنوان فاز بری شناخته شده است. م. بری[۲] در سال ۱۹۸۴ مقاله‌ای منتشر کرد که در آن فاز هندسی مسیر بسته در مسائل مکانیک کوانتومی را اسلوبندی کرد[۱].



شکل ۱—۱

۲.۱.۱ تغییر بی درو

یک اسپین با دامنه ی S را در یک میدان مغناطیسی مستقل از زمان در نظربگیرید. به دلیل اندازه حرکت مغناطیسی وابسته به اسپین، تراز های انرژی به $2S+1$ سطح تقسیم می‌شوند. با تحول زمانی، کت

[۲] M. Berry

حالت $|n>$ با ویژه مقدار انرژی E_n بدین صورت تغییر می‌کند:

$$|n\rangle \to e^{\frac{-iE_n t}{\hbar}}|n\rangle \tag{1.1}$$

این رابطه، تحول زمانی یک حالت پایا را نشان می‌دهد. حال فرض کنید جهت میدان مغناطیسی را به آهستگی تغییر می‌دهیم. به تبع آن، جهت اسپین نیز عوض می‌شود، هر چند که ما مؤلفه‌ی اسپین در جهت میدان مغناطیسی را ثابت در نظر می‌گیریم. بنابراین عدد کوانتومی اولیه‌ی n با تغییر میدان، تغییر نخواهد کرد. این یک نمونه از قضایای بی‌دررو در مکانیک کوانتومی است.

به طور کلی، قضیه‌ی بی‌دررو [۲] بیانگر این مطلب است که تحت تغییرات خارجی آهسته روی یک سیستم مکانیکی، ناورداهای مکانیکی وجود خواهد داشت. مثلاً آنتروپی در سیستم های ترمودینامیکی و انتگرال کنش در مکانیک کلاسیک، از این دست هستند. در اینجا ما تغییر بی دررو را به صورت یک تغییر زمانی در مقایسه با زمان حرکت سیستم (مثل دوره‌ی تناوب نوسان) در نظر می‌گیریم. اگر تغییر $\langle n|$ را تحت تغییر بی دررو بررسی کنیم، مشاهده می‌شود که جدا از رابطه (۱.۱)، یک فاکتور فاز ضصص وابسته به مسیر فرآیند بی دررو نیز وجود دارد[۳].

۳.۱.۱ اثبات قضیه‌ی بی‌دررو

همانطور که می‌دانیم معادله‌ی شرودینگر به فرم زیر است:

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H(t)|\psi(t)\rangle \tag{1.2}$$

و در پایه‌ی انرژی برای طیف غیر تبهگن داریم:

$$H|u_n(t)\rangle = E_n(t)|u_n(t)\rangle \tag{۱.۳}$$

از طرفی می‌دانیم که $|\psi(t)\rangle$ را می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n a_n(t)|u_n(t)\rangle e^{\frac{-i}{\hbar}\int_0^t E_n(t')dt'} \tag{۱.۴}$$

با جایگذاری این رابطه در معادله‌ی شرودینگر (۱.۲) خواهیم داشت:

$$i\hbar[\sum_n \dot{a}_n(t)|u_n(t)\rangle e^{\frac{-i}{\hbar}\int_0^t E_n(t')dt'} + \sum_n a_n(t)|\dot{u}_n(t)\rangle e^{\frac{-i}{\hbar}\int_0^t E_n(t')dt'}$$

$$-\sum_n a_n(t)|u_n(t)\rangle \frac{i}{\hbar}E_n(t)e^{\frac{-i}{\hbar}\int_0^t E_n(t')dt'}] = \sum_n a_n(t)E_n(t)|u_n(t)\rangle e^{\frac{-i}{\hbar}\int_0^t E_n(t')dt'}$$

عبارت سمت راست معادله با آخرین جمله سمت چپ حذف می‌شود و با ضرب $\langle u_n(t)|$ در دو طرف معادله به دست می آوریم:

$$\dot{a}_k(t) = -\sum_n a_n(t)\langle u_n(t)|\dot{u}_k(t)\rangle e^{-i\int_0^t \omega_{nk}(t')dt'} \tag{۱.۵}$$

که در آن $\omega_{nk} = \frac{E_n - E_k}{\hbar}$ می‌باشد. این معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت،

$$\dot{a}_k(t) = -a_k\langle u_k(t)|\dot{u}_k(t)\rangle - \sum_{n\neq k} a_n(t)\langle u_k(t)|\dot{u}_n(t)\rangle e^{-i\int_0^t \omega_{nk}(t')dt'} \tag{۱.۶}$$

از طرفی با مشتق گیری از معادله (۱.۳) خواهیم داشت:

$$H|\dot{u}_n(t)\rangle + \dot{H}|u_n(t)\rangle = E_n(t)|\dot{u}_n(t)\rangle \Rightarrow$$

$$\langle u_k(t)|\dot{u}_n(t)\rangle = \frac{\langle u_k(t)\dot{H}|u_n(t)\rangle}{\hbar\omega_{nk}} \qquad n \neq k \tag{۱.۷}$$

بنابراین با جای گذاری (۱.۷) در (۱.۶) به دست می آید:

$$\dot{a}_k(t) = -a_k(t)\langle u_k(t)|\dot{u}_k(t)\rangle - \sum_{n\neq k} a_n(t)\frac{\langle u_k(t)\dot{H}|u_n(t)\rangle}{\hbar\omega_{nk}} e^{-i\int_0^t \omega_{nk}(t')dt'} \tag{۱.۸}$$

حال اگر در طی انتگرال زمانی در نظر گرفته شده، داشته باشیم:

$$Max\left|\frac{\langle u_k(t)\dot{H}|u_n(t)\rangle}{\hbar\omega_{nk}}\right| \ll Min|\omega_{nk}| \tag{۱.۹}$$

آنگاه می‌توان از عبارات جمع‌بندی صرف نظر نمود. پس تحول a_k ها به صورت مستقل خواهد بود (تحول بی‌دررو). به شرط (۱.۹) شرط بی‌دررو می گویند و با استفاده از آن خواهیم داشت:

$$\dot{a}_k(t) \cong -a_k(t)\langle u_k(t) \mid \dot{u}_k(t)\rangle \;\Rightarrow\; a_k(t) = C_k e^{-\int_0^t \langle u_k(t')|\dot{u}_k(t')\rangle dt'} \tag{۱.۱۰}$$

از آنجا که $\langle u_k(t) \mid \dot{u}_k(t)\rangle$ موهومی است $(\langle u_k(t) \mid u_k(t)\rangle = 1)$ معادله‌ی (۱.۱۰) را به صورت زیر می‌نویسیم،

$$a_k(t) = C_k e^{i\gamma_k(t)} \tag{۱.۱۱}$$

که در آن

$$\gamma_k(t) = i\int_0^t \langle u_k(t) \mid \dot{u}_k(t)\rangle dt' \tag{۱.۱۲}$$

می‌باشد، بنابراین با جای گذاری (۱.۱۱) در (۱.۴) خواهیم داشت:

$$|\psi\rangle = \sum_n C_n |u_n(t)\rangle e^{i\gamma_n(t)} e^{\frac{-i}{\hbar}\int_0^t E_n(t')dt'} \tag{۱.۱۳}$$

بنابراین اگر $C_n = \delta_{nm}$ باشد یعنی اینکه اگر حالت اولیه‌ی سیستم $|u_m(0)\rangle$ باشد آنگاه بعد از زمان t حالت نهایی آن $|u_m(t)\rangle$ خواهد بود. بدین معنا که در همان کت اولیه باقی مانده است اما با این تفاوت که علاوه بر فاز دینامیکی یک فاز هندسی $C_m(t) = arg\langle u_m(0)|u_m(t)\rangle + i\int_0^t \langle u_m(t')|\dot{u}_m(t')\rangle dt'$ نیز کسب نموده است. توجه شود که $C_m(t)$ تحت تبدیل فاز دلخواه $|u_m(t)\rangle \to |u_m(t)\rangle e^{i\gamma(t)}$ ناورداست و لذا معمولاً فاز $|u_m(t)\rangle$ بگونه‌ای انتخاب می‌شود که $arg\langle u_m(0)|u_m(t)\rangle = 0$، در این صورت $C_m(t) = \gamma_m(t)$ است.

۴.۱.۱ فاز بری

حالت ها در مکانیک کوانتومی با بردارها در فضای مختلط خطی نمایش داده می‌شوند که می‌توانند به عنوان توابع موج متصور شوند. هیچ دلیلی وجود ندارد که آنها یک استثناء از « قانون عمومی » به دست آوردنِ فاز بعد از ترابرد موازی حول یک مسیر بسته باشند. یک فرمول استاندارد، هر چند کمی ساده شده، بدین صورت است: یک مجموعه از ویژه حالت های عملگر هامیلتونی را بر اساس پارامترهای خارجی کلاسیکی، $\mathbf{R}$، در نظر بگیرید. $\mathbf{R}$ را از نقطه‌ای به نقطه‌ی دیگر در فضای چند بعدی اش تغییر می‌دهیم، مجموعه حالت های پایا و ویژه انرژی های مرتبط H در مسیر عمومی کامل که منجر به ویژه سیستم کاملاً جدیدی می‌شوند، تغییر می‌کند. با فرض بستگی آرام H به پارامترهای خارجی $\mathbf{R}$، برای تغییر های بینهایت کوچک در پارامترها (تغییر بی‌دررو)، حالت ها با مقادیر کوچک تغییر می‌کنند. با تحمیل اینکه ضرب داخلی بین یک ویژه حالت در نقطه‌ی $\mathbf{R}$ و ویژه حالت تحول یافته در نقطه ی همسایه $\mathbf{R} + \triangle\mathbf{R}$، نزدیک ۱ باشد، ممکن است ترابرد موازی انجام شود، همچنانکه ممکن است. قانون صحیح برای «

ترابرد موزای » همچنانکه در بالا ترسیم شد، منجر به محاسبه‌ی فاز هندسی می‌شود ، نتیجه تنها به هندسه‌ی مسیر بسته مربوط است. در این راستا گفته می‌شود که فاز بری یک « ناوردای پیمانه‌ای » است. با این توضیحات، فاز بری در سیستم های کوانتومی را از طریق محاسبات بدست می آوریم:

هامیلتونی سیستمی را با یک پارامتر وابسته به زمان $\mathbf{R}(t)$، به صورت $H(\mathbf{R}(t))$ در نظر بگیرید.

$$H(\mathbf{R}(t))|n(\mathbf{R}(t))\rangle = E_n(\mathbf{R}(t))|n(\mathbf{R}(t))\rangle \tag{۱.۱۴}$$

کت $|n(\mathbf{R}(t))\rangle$ نرمالیزه شده است. $\mathbf{R}$ طی زمان از حالت اولیه $\mathbf{R}_0$ تحول می‌یابد. فرض کنید در زمان t داریم، $|n(\mathbf{R_0}), t_0 = 0; t\rangle$. لذا معادله‌ی شرودینگر وابسته به زمان عبارت خواهد بود از:

$$H(\mathbf{R}(t))|n(\mathbf{R}_0, t_0; t)\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|n(\mathbf{R}_0), t_0; t\rangle \tag{۱.۱۵}$$

وقتی تغییر $\mathbf{R}(t)$ به حد کافی آرام باشد، از قضیه‌ی بی‌دررو انتظار می‌رود که $|n(\mathbf{R}_0), t_0; t\rangle$ متناسب با n امین ویژه کت انرژی، $|n(\mathbf{R}(t))\rangle$، از $H(\mathbf{R}(t))$ در زمان t باشد. بنابراین:

$$|n(\mathbf{R}_0), t_0; t\rangle = e^{\frac{-i}{\hbar}\int_0^t E_n(\mathbf{R}(t'))dt'} e^{i\gamma_n(t)}|n(\mathbf{R}(t))\rangle \tag{۱.۱۶}$$

اولین فاکتور در سمت راست رابطه، فاکتور فاز دینامیکی معمولی می‌باشد که روی تمام تغییرات فاز حالات پایا جمع زده می‌شود. توجه شود که اگر فقط از فاز دینامیکی استفاده نماییم، جواب مذکور در معادله شرودینگر صدق نخواهد کرد. از طرف دیگر با جایگذاری (۱.۱٦) در (۱.۱۵)، فاکتور فاز $e^{i\gamma_n(t)}$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{d}{dt}\gamma_n(t) = i\langle n(\mathbf{R}(t))\nabla_{\mathbf{R}}|n(\mathbf{R}(t))\rangle\frac{d}{dt}\mathbf{R}(t) \tag{۱.۱۷}$$

بنابراین $\gamma_n(t)$ با یک انتگرال مسیر در فضای پارامتر $(\mathbf{R})$ مشخص می‌شود:

$$\gamma_n(t) = i\int_{\mathbf{R}_\circ^C}^{\mathbf{R}_(t)} \langle n\mathbf{R}(t'))|\nabla_{\mathbf{R}}|n(\mathbf{R}(t'))\rangle d\mathbf{R}(t') \tag{۱.۱۸}$$

C مسیر فرآیند بی‌دررو است وقتی که پارامتر خارجی $\mathbf{R}$ از $\mathbf{R}_0$ تا $\mathbf{R}(t)$ تغییر می‌کند. با مشتق‌گیری بر حسب $\mathbf{R}$ از دو طرف رابطه نرمالیزاسیون

$$\langle n(\mathbf{R}(t))|n(\mathbf{R}(t))\rangle = 1 \tag{۱.۱۹}$$

می‌بینیم که γ_n یک عدد حقیقی است ($\langle n|\nabla_{\mathbf{R}}|n\rangle$ موهومی محض است). اگر $\mathbf{R}$ یک چرخه‌ی بسته در فضای پارامتر را نشان دهد که پس از بازه‌ی زمانی T به نقطه‌ی شروع برمی‌گردد (یعنی $\mathbf{R}(T) = \mathbf{R}_0$) انتگرال مسیر بسیار ساده می‌شود. با استفاده از قضیه‌ی استوکس، انتگرال خطی در طول مسیر بسته C را به انتگرال سطحی $S(C)$ تبدیل می‌کنیم:

$$i\oint_C \langle n(\mathbf{R}(t))|\nabla_{\mathbf{R}}|n(\mathbf{R}(t))\rangle d\mathbf{R} = -\int\int_{S(C)} \mathbf{V}_n(\mathbf{R})\cdot d\mathbf{S} \tag{۱.۲۰}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_n(R) &= Im\nabla_{\mathbf{R}}\times\langle n(\mathbf{R}(t))|\nabla_{\mathbf{R}}|n(\mathbf{R}(t))\rangle = Im\langle\nabla_{\mathbf{R}}n(\mathbf{R})|\times|\nabla_{\mathbf{R}}n(\mathbf{R})\rangle \\ &= Im\sum_{m\neq n}\langle n(\mathbf{R})|\nabla_{\mathbf{R}}|m(\mathbf{R})\rangle\times\langle m(\mathbf{R})|\nabla_{\mathbf{R}}|n(\mathbf{R})\rangle \qquad (۱.۲۱)\end{aligned}$$

در رابطه‌ی فوق از اتحاد برداری زیر استفاده کردیم:

$$\nabla\times[f(x)\nabla g(x)] = (\nabla f(x))\times(\nabla g(x)) \tag{۱.۲۲}$$

ما عبارت $n=m$ در آخرین خط رابطه (۱.۲۱) را حذف کردیم زیرا $\langle n|\nabla_{\mathbf{R}}n\rangle$ موهومی محض است. فرض کنید $|n(\mathbf{R})\rangle$ با یک فاکتور فاز $e^{i\chi(\mathbf{R})}$ اصلاح شود. پس حتی اگر انتگرال خطی (۱.۲۰) به صورت زیر تغییر کند،

$$\langle n(\mathbf{R})|\nabla_{\mathbf{R}}|n(\mathbf{R})\rangle \quad \rightarrow \quad \langle n(\mathbf{R})|\nabla_{\mathbf{R}}|n(\mathbf{R}) + i\nabla_{\mathbf{R}}\chi(\mathbf{R}) \tag{۱.۲۳}$$

$\mathbf{V}_n(\mathbf{R})$ تغییر نخواهد کرد، زیرا $\nabla\times\nabla\chi=0$. حال عناصر غیر قطری $\langle m|\nabla_{\mathbf{R}}|n\rangle$ را می‌توان بدین صورت نمایش داد: ابتدا با مشتق گیری از رابطه ویژه مقداری (۱.۱۴) نسبت به پارامتر خارجی $\mathbf{R}$ به رابطه زیر می رسیم:

$$(\nabla_{\mathbf{R}}H(\mathbf{R}))|n(\mathbf{R})\rangle + H(\mathbf{R})(\nabla_{\mathbf{R}}|n(\mathbf{R})\rangle) = (\nabla_{\mathbf{R}}E(\mathbf{R}))|n(\mathbf{R})\rangle + E_n(\mathbf{R})(\nabla_{\mathbf{R}}|n(\mathbf{R})\rangle) \tag{۱.۲۴}$$

که اگر طرفین آنرا از چپ در $\langle m|$ ضرب کنیم، بدست می آید:

$$\langle m(\mathbf{R})|\nabla_{\mathbf{R}}|n(\mathbf{R})\rangle = \frac{\langle m(\mathbf{R})|\nabla_{\mathbf{R}}H(\mathbf{R})|n(\mathbf{R})\rangle}{E_n - E_m}, \qquad m \neq n \tag{۱.۲۵}$$

بنابراین انتگرالده انتگرال سطحی (۱.۲۰) با رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$\mathbf{V}_n(\mathbf{R}) = Im \sum_{m\neq n} \frac{\langle n(\mathbf{R})|\nabla_{\mathbf{R}}H(\mathbf{R})|m(\mathbf{R})\rangle \times \langle m(\mathbf{R})|\nabla_{\mathbf{R}}H(\mathbf{R})|n(\mathbf{R})\rangle}{(E_m(\mathbf{R}) - E_n(\mathbf{R}))^2} \tag{۱.۲۶}$$

در اینجا مشاهده می‌شود، بردار $\mathbf{V}_n(\mathbf{R})$ که از سطح $S(C)$ می گذرد، بر حسب فرم دیفرانسیلی مرتبه ۲ از هامیلتونی $H(\mathbf{R})$ بیان شده است. بنابراین جمع بندی مطالب ذکر شده آنست که پس از یک دور کامل، کت حالت با رابطه زیر داده می‌شود:

$$|n(\mathbf{R}_0), t_0 = 0; T\rangle = e^{\frac{-i}{\hbar}\int_0^T E_n(\mathbf{R}(t'))dt'} e^{i\gamma_n(C)} |n(\mathbf{R}_0)\rangle \tag{۱.۲۷}$$

$$\gamma_n(C) = -\int\int_{S(C)} \mathbf{V}_n(\mathbf{R}) \cdot d\mathbf{S} \tag{۱.۲۸}$$

در این جا $\gamma_n(C)$ فاز بری نام دارد و از تغییر بی‌دررو پارامتر خارجی به دست می آید. نشان خواهیم داد که این فاز با خواص هندسی در فضای پارامتر تعریف می‌شود.

۵.۱.۱ ملاحظات کلی در تقاطع دو ترازی

در حالت کلی، با پارامتر خارجی $\mathbf{R} = (x, y, z)$، با انتخاب $\mathbf{R}^*$ به‌عنوان مبدأ فضای پارامتر، فرض می‌کنیم که ویژه حالات انرژی $|+(\mathbf{R})\rangle, |-(\mathbf{R})\rangle$ در $\mathbf{R}^* = 0$ تبهگن هستند. هر ویژه مقدار را طوری انتخاب کنیم که $E_+(\mathbf{R}) \geq E_-(\mathbf{R})$ باشد و انرژی را از نقطه‌ی تبهگنی اندازه می‌گیریم. ما هامیلتونی $H(\mathbf{R})$ را حول مبدأ تا مرتبه‌ی اول در $\mathbf{R}$ بسط و یک تبدیل خطی مناسب انجام می‌دهیم. بنابراین هامیلتونی کلی که دو سطح را به هم وصل می‌کند با یک ماتریس 2×2 نشان داده می‌شود:

$$H(\mathbf{R}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} Z & X - iY \\ X + iY & Z \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\mathbf{R} \cdot \sigma \tag{۱.۲۹}$$

که $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ بردار ماتریسهای پائولی است. ویژه مقادیر انرژی به صورت $E_\pm(\mathbf{R}) = \pm\frac{1}{2}R$ هستند و دو سطح به صورت مخروطی در نقطه‌ی تبهگنی با هم تقاطع می‌کنند. $\nabla_{\mathbf{R}} H(\mathbf{R})$ برابر با $\frac{1}{2}\sigma$ است. بنابراین با انتگرال‌گیری روی سطح S:

$$\mathbf{V}_\pm(\mathbf{R}) = \pm\frac{\hat{R}}{2R^2} \tag{۱.۳۰}$$

فاکتور فاز هندسی برای حالت عمومی تقاطع دو سطح به صورت زیر درمی‌آید:

$$e^{i\gamma_{\pm}(C)} = e^{-i\int\int_{S(C)} \mathbf{V}_{\pm}(\mathbf{R})\cdot d\mathbf{S}} = e^{(\mp\frac{i}{2}\Omega(C))} \qquad (۱.۳۱)$$

که در آن $\Omega(C)$ زاویه فضایی است که مدار بسته C از نقطه تبهگنی $\mathbf{R}^*$ دیده می‌شود. توجه کنید که عبارت (۱.۳۰) برای بردار $\mathbf{V}_{\pm}(\mathbf{R})$ معادل با میدان مغناطیسی $\mathbf{B} = (\frac{e_M}{r^2})\hat{r}$ که با یک تک قطبی مغناطیسی در مبدأ تولید شده است، می‌باشد. از نظر ساختاری، تکینگی نقطه تبهگنی در فضای پارامتری و تکینگی تک قطبی مغناطیسی یکسان هستند و میدان مغناطیسی یک تک قطبی مغناطیسی نظیر فاز هندسی است. می‌توان از تشابه با میدان مغناطیسی، نکات دیگری هم بدست آورد. به عنوان نمونه، با مقایسه روابط زیر:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \qquad (۱.۳۲)$$

$$\mathbf{V}(\mathbf{R}) = Im\nabla_{\mathbf{R}} \times \langle n(\mathbf{R})|\nabla_{\mathbf{R}}|n(\mathbf{R})\rangle \qquad (۱.۳۳)$$

می توانیم $\langle n(\mathbf{R})|\nabla_{\mathbf{R}}|n(\mathbf{R})\rangle$را نوعی پتانسیل برداری که از تکینگی حاصل می‌شود، تفسیر کنیم. همانطور که در (۱.۲۳) نشان دادیم، این کمیت با پیمانه تغییر می‌کند اما $\mathbf{V}(\mathbf{R})$ که مطابق با چگالی شار مغناطیسی، $\mathbf{B}$، است مستقل از پیمانه می‌باشد.

۲.۱ نمونه هایی از فاز بری

دو مثال کلاسیکی از فاز بری در مکانیک کوانتومی (که مدت مدیدی پیش از اسلوبندی بری شناخته شده بود)؛

۱. چرخش یک اسپینور

۲. اثر بوهم–آهارانف [۳]

۱.۲.۱ چرخش یک اسپینور

اسپین در یک میدان مغناطیسی را در نظر بگیرید. هامیلتونی این سیستم به صورت زیر می‌باشد:

$$H(\mathbf{B}) = -g\mu\mathbf{S}\cdot\mathbf{B} \tag{۱.۳۴}$$

ویژه مقدار انرژی به این صورت می‌باشد:

$$E_m = -g\mu mB\hbar \tag{۱.۳۵}$$

$$\nabla_B H(\mathbf{B}) = -g\mu\mathbf{S} \tag{۱.۳۶}$$

نقطه‌ی تبهگنی در مبدأ فضای پارامتر، $\mathbf{B}=0$، قرار دارد. این یعنی جایی که $2S+1$ لایه تبهگنی وجود دارد. وقتی ما جهت میدان مغناطیسی را تغییر می‌دهیم و دامنه‌ی آن را ثابت نگه می داریم و سپس آن را به جهت اولیه‌اش بازمی‌گردانیم، بردار $\mathbf{B}$ در یک مسیر بسته روی کره‌ای به شعاع B حرکت می‌کند. سپس بردار $\mathbf{V}_m(\mathbf{B})$ از (۱.۲۶) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\mathbf{V}_m(\mathbf{B}) = Im\sum_{m\neq m'}\frac{\langle m(\mathbf{B})|\mathbf{S}|m'(\mathbf{B})\rangle\times\langle m'(\mathbf{B})|\mathbf{S}|m(\mathbf{B})\rangle}{B^2(m'-m)^2\hbar^2} \tag{۱.۳۷}$$

[۳] Aharonov-Bohm effect