الله

بسم الله الرحمن الرحيم

ن والقلم وما يسطرون

۲۵۵۱۴

12674 ,۲

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم پایه

بخش ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض

موضوع :

رده‌ای در ابرساختارها به همراه پیچش‌هایی برروی ابرساختارهای ضعیف

علی زارعی

استاد راهنما :

دکتر علی ایرانمنش

استاد مشاور :

دکتر سید احمد موسوی

زمستان ۱۳۷۷

۲۵۵۱۴

۲۰ /۴/ ۱۳۷۸

تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد

مرکز اطلاعات و مدارک علمی ایران
تهیه مدارک

اعضای هیئت داوران نسخهٔ نهایی پایان نامه خانم / آقای علی زارعی

تحت عنوان: **رده‌ای در ابرساختارها به همراه پیچش‌هایی روی ابرساختارهای ضعیف**

را از نظر فرم و محتوی بررسی نموده و پذیرش آنرا برای تکمیل درجه کارشناسی ارشد پیشنهاد می‌کنند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	رتبهٔ علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	آقای دکتر علی ایرانمنش	استادیار	
۲- استاد مشاور	آقای دکتر سید احمد موسوی	استادیار	
۳- نماینده تحصیلات تکمیلی	آقای دکتر مجتبی منیری	استادیار	
۴- استاد ناظر	آقای دکتر علیرضا اشرفی	استادیار	
۵- استاد ناظر	آقای دکتر دارا معظمی	استادیار	

بسمه تعالی

تاریخ: ....

شماره: ....

پیوست: ....

دانشگاه تربیت مدرس

آیین نامهٔ چاپ پایان نامه (رساله) های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظربه اینکه چاپ و انتشار پایان‌نامه (رساله) های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس مبیّن بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه، دانش‌آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

مادهٔ ۱ در صورت اقدام به چاپ پایان نامه (رساله) ی خود، مراتب را قبلاً به طورکتبی به مرکز نشر دانشگاه اطلاع دهد.

مادهٔ ۲ در صفحهٔ سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه)، عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد/رسالهٔ دکتری نگارنده در رشتهٔ ریاضی‌محض است که در سال ۱۳۷۷ در دانشکدهٔ علوم پایه دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی سرکار خانم/ جناب آقای دکتر علی ایرانمنش و مشاورهٔ سرکارخانم/جناب آقای دکتر احمد موسوی از آن دفاع شده است.»

مادهٔ ۳ به منظور جبران بخشی از هزینه‌های نشریات دانشگاه تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت چاپ) را به مرکز نشر دانشگاه اهدا کند دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر در معرض فروش قرار دهد.

مادهٔ ۴ در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت‌مدرس تأدیه کند.

مادهٔ ۵ دانشجو تعهد و قبول می‌کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در مادهٔ ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه‌شدهٔ نگارنده برای فروش، تأمین نماید.

مادهٔ ۶ اینجانب علی زارعی دانشجوی رشته ریاضی‌محض مقطع کارشناسی ارشد تعهد فوق و ضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می‌شوم.

تقدیم به

پدر و مادر بزرگوارم، آنها که چون شمع می‌سوزند تا روشنایی‌بخش زندگانی فرزندان خویش باشند و آنان که دعای خیرشان همواره بدرقه راهم بوده و نگاهشان مشوق زندگانیم.

همسر عزیزم، او که با ورودش به زندگانیم بارقه‌ای از عشق و امید را در من روشن کرد و به زندگی سرد و خاموشم گرما و نور بخشید.

استاد ارجمندم، که از هر گونه همکاری با من در هر مرحله از تحصیل دریغ نورزیدند.

خواهر و برادران محترمم، آنان که همواره پشتیبان من در تمام مراحل زندگانیم بوده و هستند.

با تشکر و قدردانی :

منت خدای را عز و جل که طاعتش موجب قربت است به شکراندرش مزید نعمـــت .

سپاس خدای مهربان را که با تمام مشکلاتی که در این پایان‌نامه داشته‌ام آن را به پایان رسانیدم.

و با سپاس از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر علی ایرانمنش که از هر گونه همکـاری برای به‌پایان رسانیدن این رساله در هر مرحله کوتاهی نکردند.

همسر عزیزم که در نوشتن و ویرایش آن پاپای من پیش آمدند و با تمام مشکلات من چه از نظر مالی و معنوی صبر پیشه کردند.

از آقای هاشمی و خانوادهٔ گرامیشان که همواره پشتیبان من در زندگی بوده و هستند.

پدر دلسوز ، مادر مهربان و برادران ارجمندم که در تمام مراحل تحصیل یار و یاور من بوده‌اند.

چکیده:

مارتی در سال ۱۹۳۴ مقاله‌ای در کنفرانس ریاضیدانان استکهلم ارائه داد. او در آن مقاله برای اولین بار مفهوم ابرگروهها را به‌عنوان تعمیم گروهها معرفی کرد. در سال ۱۹۹۰ وجیوکلیس در چهارمین کنفرانس بین‌المللی ابرساختار جبری مفهوم H_V- گروهها و H_V- حلقه‌ها را بیان کرد. ابر ساختارها توجه افراد زیادی را به خود جلب کرده است.

و آن‌ها کارهای بسیار زیبایی بر روی این مفاهیم انجام دادند. ما در این پایان‌نامه به جنبه‌های خاصی از ابر ساختارها خواهیم پرداخت.

در فصل اول که با عنوان H_V- ساختارهای ضعیف است به بیان مفاهیم اولیه مانند ابرگروه، ابرعمل و ... می‌پردازیم که بخش یک فصل اول را شامل می‌شود برای این بخش از مراجع [۱] ، [۳] ، [۵] ، [۱۰] استفاده شده است.

یکی از مباحث با اهمیت در ابرساختارها رابطه اساسی β^* می‌باشد، وجیوکلیس در کتاب خود رابطه β^* را برای H_V- گروهها بصورت زیر تعریف می‌کند :

اگر فرض کنیم $(H, \circ)$ یک H_V - گروه می‌باشد. β^* کوچکترین رابطه هم‌ارزی است به طوریکه H/β^* یک گروه می‌شود. این مفهوم در قسمتهای مختلف ابرساختارها بکار رفته است. بدین لحاظ ما احتیاج به دیدی فراتر از آنچه وجیوکلیس در کتاب خود آورده بود داشتیم. بدین سبب از مراجع [۳] ، [۶] ، [۱۰] استفاده کردیم. البته کار اصلی خویش را در این بخش بر روی مرجع [۶] قرار داده‌ایم.

در بخش آخر از فصل اول به مفهوم همریختی‌ها پرداختیم. همریختی‌های ضعیف، قوی، شمول و ... را بیان کردیم. برای این بخش از مراجع [۱] ، [۱۰] ، [۱۱] استفاده کرده‌ایم. فصل دوم پایان‌نامه به رده‌ای خاص از ابرساختارهای اختصاص داده شده است. ابرساختارهای کوچک یکی از مباحث مهم در ابر ساختارها می‌باشد. ابرگروهوار خیلی کوچک ابرساختاری است که

ساختار آن به ساختار گروهها بسیار نزدیک است. این فصل شامل سه بخش می‌باشد بخش اول H_v- نیم گروههای خیلی کوچک می‌باشد. بیشترین مطالب این بخش از مرجع [۳] می‌باشد. بخش دوم و سوم به ترتیب H_v-گروههای خیلی کوچک و H_v- حلقه‌های خیلی کوچک می‌باشد. برای این بخش از مراجع [۲] ،[۱۰] و [۱۱] استفاده کرده‌ایم .

فصل آخر پایان‌نامه با عنوان پیچش‌هایی بر روی ابرساختارهای ضعیف تنظیم شده است. این فصل شامل ۵ بخش می‌باشد. ابتدا اسکالرها و منفردها را معرفی کرده‌ایم. برای این بخش از مراجع [۱] ،[۵] ، [۱۰] و [۱۱] استفاده کرده‌ایم. بخش دوم معرفی چند ابرساختار می‌باشد. هدف ما از بیان این دو بخش استفاده آنها در چند بخش بعدی می‌باشد. آن هنگام که پیچش‌ها را بر روی $K[G]$ معرفی می‌کنیم. در بخش سوم که مجموعه‌های اساسی نام دارد، به بیان مجموعه‌هایی خاص در ابرساختارها پرداخته‌ایم. در این بخش مثال ۳-۳-۹ را ارائه می‌دهیم که H_v- گروه می‌باشد. اما H_v- گروه θ - WASS نباشد. در بخش چهارم پیچش را معرفی می‌کنیم و قضیه ۳-۴-۱۰ را بیان و اثبات می‌کنیم. و در بخش آخر قضیه ۳-۵-۱ را بیان و اثبات می‌کنیم. مراجع [۱] ، [۹] ، [۱۰] و [۱۳] در این بخش‌ها استفاده شده‌اند ولی کار اصلی ما بر روی مراجع [۱۰] و [۱۲] بوده است.

ابرساختارها گسترشی از ساختارهای جبری می‌باشند. ابتدا مفهوم ابرساختارها و H_v- ساختارها را بیان کرده‌ایم. پس از تعریف ابر ضرب اشتراکی و ω- ابر ضرب رابطه بین آنها را بدست آورده‌ایم.

مثال‌هایی ارائه داده‌ایم که H_v- نیم‌گروه، شرکت‌پذیر ناقص نباشد و ابرگروه‌واری که شرکت‌پذیر ناقص باشد و $\hat{\beta}^*$ منظم قوی نباشد.

در ادامه ابرساختارهای خیلی کوچک را مورد مطالعه قرار داده‌ایم. اهمیت ابرساختارهای خیلی کوچک در این است که ساختارشان در ابرگروهها، به ساختار گروهها خیلی نزدیک است.

ابرگروهوارهای خیلی کوچکی و ابرحلقه‌های خیلی کوچک مفاهیم دیگـری هستند کـه مـورد بررسی و مطالعه قرار گرفته‌اند.

پیچش در یک ابرگروه نیز در فصل آخر مورد مطالعه قرار گرفتـه اسـت . و نشـان داده‌ایـم کـه چگونه می‌توان با استفاده از آن، یک ابرگروه جبر ساخت که H_v- حلقه باشد.

کلمات کلیدی :

ضرب اشتراکی ، ω- ابرضرب، ابرحلقه، H_v- نیم‌گروه، شـرکت‌پذیر نـاقص، $\hat{\beta}^*$ ، مقطـم قـوی ابرگروهوارهای خیلی کوچک، شرکت‌پذیر ضعیف، خـاصیت تکثیری، ابرحلقـه، ابرحلقـه‌های خیلی کوچک، پیچش ابرگروه جبر و H_v- حلقه

فهرست مطالب

عنوان | صفحه

فصل اول

ابر ساختارهای ضعیف

۱-۱- H_v- گروهها و H_v- حلقه‌ها

داستان ابرگروهها با نوشته‌های مارتی که درسال۱۹۳٤ ارا ئه داد، شروع شد. ایـدهٔ اصلـی آن از یک ساختار جبری بدست می آید. او با مطالعه همدسته‌های چپ یک گـروه G و زیرگـروه S یعنی $H = \{xS : x \in G\}$ کار خود را شروع کرد.

ما می‌دانیم که اگر S یک زیر گروه نرمال باشد آن گاه H به طور طبیعی با عمل زیر یک گـروه می‌شود :

$$xS \,.\, yS = xyS \qquad (۱)$$

اما اگر S یک زیرگروه نرمال نباشد آن گاه دو طرف (۱) یکسان نیستند و نمی‌تـوان یـک عمـل روی آن تعریف کرد.

بنابراین اول باید یک ابرعمل روی H تعریف کنیم.یعنی یک نگاشت :

$$H^2 \to p^*(H)(:= p(H) \setminus \{\varnothing\})$$

به‌صورت زیر :

$$xS.yS = \{zS : z \in xyS\}$$

می‌توان دید که برای همه xS، yS و zS در H این ابرعمل شرکت پذیراست. یعنی که :

$$(xS.yS)zS=xS.(yS.zS)$$

تذکر: اگر A و B دو زیرمجموعه از H باشند آنگاه :

$$A.B = \bigcup_{\substack{a\in A\\ b\in B}} a.b$$

تعریف ۱-۱-۱ : مجموعه H و ابرعمل $o: H^2 \to p^*(H)$ را یک ابرگروهوار گوییم. باید توجه داشت که $p^*(H)$ مجموعه تمام زیر مجموعه ها ناتهی H می‌باشد.

تعریف ۱-۱-۲ : فرض کنید H یک مجموعه باشد. اگر ابرعمل (۰) روی H دارای خاصیت شرکت‌پذیری باشد آن‌گاه (H و۰) را نیم‌ابر گروه می‌گوییم.

$$(xy)z = x(yz) \qquad \forall (x,y,z) \in H^3$$

و چنانچه این شرط را ضعیف‌تر نماییم که به خاصیت شرکت‌پذیری ضعیف معروف است و با WASS نشان می‌دهیم، (H و۰) را یک H_V- نیم گروه می نامیم.

$$(xy)z \cap x(yz) \neq \varnothing \qquad \forall (x,y,z) \in H^3$$

مثال ۱-۱-۳ : روی مجموعه Z_{mn} ابرعمل ($\oplus$)را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\bar{o} \oplus m = \{\bar{o}, m\} \quad , \ x \oplus y = x + y \qquad \forall (x,y) \in Z^2_{mn} - \{(\bar{o}, m)\}$$

آن گاه $(Z_{mn}, \oplus)$ یک H_V- نیم‌گروه می‌شود.

در این مثال $\oplus$، WASS هست اما شرکت‌پذیر نیست چون : $\qquad k \notin mZ$

$$(\bar{o} \oplus m) \oplus k = \{\bar{o}, m\} \oplus k = \{k, m+k\}$$

$$\bar{o} \oplus (m \oplus k) = \bar{o} \oplus \{m+k\} = \{m+k\}$$

یعنی :

$$\bar{o} \oplus (m \oplus k) \neq (\bar{o} \oplus m) \oplus k$$

اما

$$\bar{o} \oplus (m \oplus k) \cap (\bar{o} \oplus m) \oplus k \neq \varnothing$$

تعریف ۱-۱-٤ : فرض کنید $(H,\circ)$ یک ابر گروهوار و دارای خاصیت تکثیری باشد یعنی اینکه:

$$xH = Hx = H \qquad \forall x \in H$$

در این صورت به $(H,\circ)$ یک شبه ابر گروه گوییم .

خاصیت تکثیری معادل رابطه زیر است :

$$\forall (a,b) \in H^2 \qquad \exists (c,d) \in H^2 : b \in c.a, b \in a.d$$

تعریف ۱-۱-۵ : اگر $(H,\circ)$ یک ابر گروهوار همراه با خاصیت تکثیری و شرکت‌پذیری باشد به آن ابرگروه گوییم.

و چنانچه دارای خاصیت تکثیری و wass باشد به آن H_V- گروه گوییم. پس هر ابر گروه یک H_V- گروه می‌باشد اما عکس آن درست نمی باشد.

مثال ۱-۱-٦ : $(Z_{mn},\oplus)$ که ابر عمل $\oplus$ به‌صورت زیر تعریف می شود یک H_V- گروه است ولی یک ابرگروه نیست .

$$\bar{o} \oplus m = \{\bar{o}, m\} \qquad x \oplus y = x + y \qquad \forall (x,y) \in Z_{mn} - \{(\bar{o}, m)\}$$

تعریف ۱-۱-۷ : اگر $(H,\circ)$ یک ابر گروهوار باشد و داشته باشیم $xy \cap yx \neq \varnothing$ آنگاه به آن خاصیت جابجایی ضعیف گوییم و با cow نشان میدهیم .

مثال ۱-۱-۸ : $(Z_{mn},\oplus)$ در مثال ۱-۱-٦ را در نظر می گیریم داریم :

$$\bar{o} \oplus m = \{\bar{o}, m\} \qquad , \qquad m \oplus \bar{o} = \{m\}$$

آن‌گاه داریم :
$$(\bar{o} \oplus m) \cap (m \oplus \bar{o}) \neq \varnothing$$