بسم الله الرحمن الرحيم

١٤٤٤٨٢

دانشگاه تربیت معلم

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض (آنالیز)

عنوان

قاب‌های مخلوط و g- قاب‌ها در فضای هیلبرت

تدوین

حمزه ابراهیمی

استاد راهنما

پروفسور امیر خسروی

بهمن ۱۳۸۷

تاریخ: ۸۷/۱۱/۱۵
شماره: ....
پیوست: ....
واحد: ....

بسمه تعالی

دانشکده علوم ریاضی
و
کامپیوتر

دانشگاه تربیت معلم

صورتجلسهٔ دفاع از پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد

جلسهٔ دفاع از پایان‌نامهٔ آقای حمزه ابراهیمی دانشجوی دورهٔ کارشناسی ارشد رشتهٔ ریاضی محض تحت عنوان:

قاب‌های مخلوط و g-قاب‌ها در فضاهای هیلبرت

در روز سه‌شنبه مورخ ۸۷/۱۱/۱۵ در دانشکدهٔ علوم ریاضی و کامپیوتر تشکیل گردید و نتیجهٔ آزمون به شرح زیر تعیین می‌گردد. نمرهٔ این آزمون هیجده و نیم (۱۸/۵) می‌باشد.

۱ـ عالی ☒
۲ـ بسیار خوب ☐
۳ـ خوب ☐
۴ـ قابل قبول ☐
۵ـ غیرقابل قبول ☐

۱۳۸۹/۸/ ۲

استاد راهنما	داور خارجی	داور داخلی
دکتر امیر خسروی	دکتر عبدالرسول پورعباس	دکتر علیرضا مدقالچی

اسماعیل بابلیان
رئیس دانشکدهٔ علوم ریاضی
و کامپیوتر

تقدیم به

پدر و مادر عزیز

و

خانوادهٔ مهربانم

تقدیر و تشکر

((حقیقت امر ...

... این است که ما کاره‌ای نیستیم. بدین نکته معترف نبودن خامی و پوچی بسیار می‌خواهد. و پرسشی پیش می‌آید که پس چه می‌گویی ؟

برای این پرسش پاسخی اندیشیده‌ایم. از هر چه بگذریم بالاخره ماهم یک تماشاییِ این زندگی و زمانه‌ایم.))

بر خود لازم می‌دانم که در این مجال، از زحمات استاد بزرگوار و ارجمندم جناب آقای دکترامیرخسروی که با راهنمایی های عالمانه ایشان این پایان‌نامه را تدوین کردم تقدیر و سپاسگزاری کنم و همچنین اساتید ارجمند جناب آقای دکتر علیرضامدقالچی، خانم دکتر ماهیار و آقای دکتر علی اکبر عالم زاده که در محضر ایشان تلمذ نموده‌ام کمال سپاس و قدردانی را دارم و امیدوارم همیشه موفق و مؤید باشند.

از جناب آقای دکتر عبدالرسول پورعباس و آقای دکترعلیرضا مدقالچی که قبول زحمت فرموده و داوری این پایان‌نامه را پذیرفتند تشکر می کنم. آز خانم اسکندرزاده و خانم گلزاری (مسئولین آموزش دانشکده) و خانم رحیمی و خانم دونده (مسؤلین کتابخانه) به خاطر زحمات بی‌دریغشان تشکر می‌کنم.

از دوستان گرامی‌ام آقایان مجید راهرو زرگر، علی جباری، مرتضی آقابابایی،محمد فزونی،حمید طاهری‌زاده و سعید یگانه که در این چند سال همیشه نسبت به اینجانب لطف داشته‌اند صمیمانه تشکر می‌کنم و موفقیت‌شان را در تمام مراحل زندگی از خداوند منّان خواستارم.

در پایان از خانواده‌ی دلسوز و مهربانم که در تمام مراحل زندگی همیشه پشتیبان و همراهم بوده‌اند تشکر کرده و امیدوارم جوابگوی محبت‌هایشان باشم.

چکیده

فرض کنیم $\mathcal{W} = \{W_i\}_{i\in I}$ دنباله‌ای از زیرفضاهای بسته‌ی فضای هیلبرت جدایی پذیر H باشد و $w = \{w_i\}_{i\in I} \in \ell^{\infty}(I)$ دنباله‌ای از وزن‌ها باشد، یعنی برای هر $i \in I$، $w_i > ۰$. دنباله $\mathcal{W}_w = (w_i, W_i)_{i\in I}$ را یک قاب مخلوط (FS) برای H گوییم، اگر $۰ < A_{\mathcal{W}_w} \leq B_{\mathcal{W}_w} < \infty$ موجود باشند به طوری که به ازای هر $f \in H$،

$$A_{\mathcal{W}_w}\|f\|^{۲} \leq \sum_{i\in I} w_i^{۲}\|P_{W_i}f\|^{۲} \leq B_{\mathcal{W}_w}\|f\|^{۲}$$

که در آن P_{W_i} تصویر متعامد H روی W_i است. دراین پایان نامه رابطه بین عملگرها، تصویرها، پایه‌های متعامد، پایه‌های ریس و قاب‌ها را با قاب‌های مخلوط و g–قاب‌ها مطالعه خواهیم کرد. تظریف یا تصفیه یک قاب مخلوط را برای به دست آوردن نتایجی درباره مازاد یک قاب معرفی خواهیم کرد. همچنین $\mathcal{P}(\mathcal{W})$ را تحت عنوان مجموعه‌ی وزن‌های قابل قبول برای یک دنباله‌ی مولد از زیر فضاها بررسی خواهیم کرد و بعضی از نتایج نظریه‌ی قاب‌ها را به قاب‌های مخلوط وg–قاب‌ها تعمیم خواهیم داد.

واژه‌های کلیدی : قاب، قاب زیر فضاها، قاب مخلوط، g–قاب، عملگرهای فضای هیلبرت، تصویر مایل، اضافی یک قاب مخلوط.

رده بندی موضوعی ریاضی ۲۰۰۰ : $۰۶D۲۲$.

فهرست مطالب

پیشگفتار

ایده‌ی نمایش یک تابع بر حسب مجموعه‌ی کاملی از توابع، اولین بار توسط ژوزف فوریه[1] ریاضیدان و فیزیکدان فرانسوی بین سال‌های ۱۸۰۶ - ۱۸۰۲ طی رساله‌ای در آکادمی علوم راجع به انتشار حرارت، برای نمایش توابع به کار گرفته شده بود. در واقع برای آن که یک تابع $f(x)$ به شیوه‌ای ساده و فشرده نمایش داده شود فوریه اساساً ثابت کرد که می‌توان از محورهایی استفاده کرد که به کمک مجموعه‌ای نامتناهی از توابع سینوسی و کسینوسی به شکل $sin(ax)$ و $cos(ax)$ نمایش داد. ایده‌های فوریه به‌صورت ابزارهایی اساسی با کاربردهای فوق العاده متواتر در علوم در آمده‌اند، زیرا برای نمایش انواع متعددی از توابع ودر نتیجه کمیت‌های فیزیکی فراوان بکار می‌روند، به طوری که در مخابرات تجزیه پیام های مخابراتی بوسیله سری‌های فوریه انجام می‌گرفت و ضرایب این سری ارسال می‌گردید و در مقصد سری مجدداً به پیام بر گردانده می‌شد. اما در طی این تبدیلات پیام، اطلاعات مربوط به ابتدا و انتهای پیام از بین می‌رفت و دلیل این نقص این بود که ضرایب در تجزیه به روش فوریه منحصر بفرد بودند. با گذشت زمان ضعف تبدیلات فوریه نمایان شد، به عنوان مثال دانشمندان پی بردند نمایش توابع سینوس وار در مورد سیگنال‌های پیچیده نظیر تصاویر، نه تنها ایده‌ال نیستند بلکه از شرایط مطلوب دورند. به عنوان مثال به شکل کارآمدی قادر به نمایش ساختارهایی گذرا نظیر مرزهای موجود در تصاویر نیستند. همچنین آن‌ها متوجه شدند تبدیلات فوریه فقط برای توابع پایه مورد استفاده قرار می‌گیرد و برای توابع غیر پایه کار آمد نیستند. البته در سال ۱۹۴۶، گابور[2] شیوه‌ای برای تجزیه سیگنال‌ها به سیگنال‌های مقدماتی ارائه داد که منجر به تبدیل فوریه‌ی پنجره‌ای شد که این مشکل را بر طرف کرد و به خاطر این موفقیت بزرگ گابور در سال ۱۹۷۱ جایزه نوبل گرفت. در سال ۱۹۵۱، زمانی که در نظریه سری‌های فوریه‌ی غیر هارمونیک به مسائل مشکلی برخورد کردند که به وسیله اطلاعات گذشته قابل حل نبودند، دافین [3] و شیفر [4] روش گابور را بکار بردند و علیرغم انتظار همگان مشکل با این روش حل شد. با این ایده و انگیزه دافین و شیفر آنچه را که گابور طرح کرده بود به صورت مجرد و انتزاعی بر فضای هیلبرت[5]، به عنوان قاب بیان

---

[1] Joseph Fourier

[2] Gabor

[3] Duffin

[4] Schaeffer's

[5] Hilbert

کردند. نتیجه‌ی این تلاش رسیدن به دنباله‌هایی وسیع تر از پایه مُتعامد بود با این ویژگی که هر عضو فضای هیلبرت بر حسب این دنباله قابل تجزیه بود. البته در این حالت بر خلاف تجزیه براساس پایه متعامد یکه، ضرایب منحصر بفرد نیست و همین ویژگی باعث ترجیح قاب بر پایه متعامد یکه شد. مقاله‌ی دابچیز[۶]،گراسمان [۷] و میِر[۸] در ۱۹۸۶ باعث رونق قاب‌ها شد که از آن به بعد مورد توجه قرار گرفت[۱۵]. در طی ۲۰ سال گذشته تئوری قاب‌ها رشد چشمگیری داشته است به طوری که قاب‌ها برای فضاهای باناخ نیز تعریف شده‌اند، قاب‌های گابور معرفی شدند که اغلب با نام قاب‌های ویل–هایزنبرگ نیز شناخته می‌شوند و زمینه‌ای برای آغاز آنالیز طیفی به حساب می‌آید و اکنون از این نوع قاب در هر قسمت که به تجزیه سیگنال مرتبط است استفاده می‌شود. به عنوان مثال در مخابرات، اپتیک، پردازش تصاویر، بانک های جداساز و... . در سال‌های اخیر نوع دیگری از قاب ها به نام قاب زیرفضاها که اخیراً به نام قاب‌های مخلوط تغییر نام یافته است معرفی شدند ،که به جای بررسی قاب بودن روی کل فضای هیلبرت روی زیرفضاهای آن بررسی می شوند و سپس با پیوند این قاب‌های زیرفضاها یک قاب برای کل فضا بدست می‌آید. این مفهوم که در سال ۲۰۰۴ توسط کاسازا[۹] و همکارانش معرفی شد مورد توجه قرار گرفت و در طی چند سال اخیر مقالاتی در این زمینه نوشته شده‌است. مزیت این روش سادگی محاسبات و بررسی قاب بودن روی زیر فضاهای کوچکتری از فضای کل می‌باشد که کارایی و دقت را بیشتر می‌کند. برای اطلاعات بیشتر در این زمینه به مراجع [۱۰]،[۱۲] و [۲۱] مراجعه کنید.

در این پایانامه به بررسی خواص قاب‌های زیرفضاها یا قاب‌های مخلوط، دنباله مینیمال ، دنباله کامل، دنباله بسل زیر فضاها، دنباله وزن‌های قابل قبول، تظریف و مازاد قاب‌های مخلوط، g–قاب‌ها و حلال واحد می‌پردازیم.

برای ارائه این مفاهیم از مقالات زیر به عنوان مقاله اصلی استفاده شده است .

[30] M. Ruiz, D. Stajanoff, Some properties of frames of subspaces obtained by operator theory method, J. Math. Anal. 343 (2008) 366-378.

[26] A. Khosravi, M.S. Musazadeh, Fusion frames and g-frames, J.Math. Anal. Appl.

[۶] Daubechies
[۷] Grossmann
[۸] Meyer
[۹] Casazza

342 (2008) 1068-1083.

از مقاله‌های زیر نیز به عنوان مقالات فرعی استفاده شده است:

[10] P.G. Casazza, G. Kutyniok, Frames of subapaces, in: Wavelet, Frames and operator theory, in: Contemp. Math., vol. 345, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004, pp. 87-113.

[3] J.A. Antezana, G. Corach, M. Ruiz, D. Stojanoff, Oblique projection and frames, Proc. Amer. Math. Soc. 134 (2006) 1031-1037.

[31] W. Sun, G-frames and G-Riesz bases, J. Math. Anal. Appl. 322 (2006) 437-452.

در فصل اول تعاریف و مفاهیم اولیه و قضایای مور نیاز مربوط به فضای هیلبرت، کسینوس و سینوس زاویه بین دو زیر فضا و مدول مینیمم تحویل یافته‌ی یک عملگر بیان شده است .

در فصل دوم قاب، مفاهیم اولیه مربوط به آن، ارتباط آن با عملگرها، همچنین عملگرقاب، عملگر ترکیبی و آنالیز قاب و... بیان شده است .

در فصل سوم به معرفی و بررسی قاب زیر فضاها یا قاب مخلوط و ارتباط عملگرهای فضای هیلبرت با قاب‌های مخلوط می‌پردازیم.

در فصل چهارم دنباله‌های قابل قبول از وزن‌ها و مازاد یک قاب مخلوط را معرفی وبه بررسی و توسیع قضیه هان—لارسون تحت شرایطی دیگر می‌پردازیم. ودر نهایت مفهوم تظریف یا تصفیه یک قاب را تعریف و چند نتیجه و قضیه دراین مورد بیان می‌کنیم.

در فصل پنجم قاب‌های تعمیم یافته یا g—قاب‌ها، دنباله‌های g—بسل، g—کامل ، حلال واحد و تجزیه ریس را معرفی و قضایایی را در مورد آن‌ها بررسی خواهیم کرد.

فصل ۱

مفاهیم و مقدمات اولیه

در این فصل به معرفی نمادها و بیان تعریف‌ها و قضیه‌های اساسی مورد نیاز که در فصل‌های بعدی از آن‌ها استفاده می‌کنیم می‌پردازیم. توجه شود که مجموعه اعداد طبیعی و صحیح را به ترتیب با نمادهای $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ نشان می‌دهیم. همچنین مجموعه اندیس گذار I را همواره متناهی یا شمارش پذیر فرض می‌کنیم .

۱.۱ فضاهای نرمدار

تعریف ۱.۱ . فرض کنید X یک فضای برداری مختلط باشد، نگاشت $\|.\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ را یک **نیم نرم** روی X می‌نامیم هر گاه برای هر $x, y \in X$ و برای هر $\alpha \in \mathbb{C}$،

(الف). $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

(ب). $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

از (الف) نتیجه می‌شود که اگر $\alpha = \circ$ آنگاه $\|\circ\| = \circ$.همچنین طبق (ب) داریم :

$$\circ = \|\circ\| = \|x + (-x)\| \leq \|x\| + \|-x\| = ۲\|x\|$$

این نتیجه می‌دهد برای هر $x \in X$، $\|x\| \geq \circ$.

تعریف ۲.۱ .اگر نیم نرم $\|.\|$ دارای این خاصیت باشد که $\|x\| = \circ$ ایجاب کند، $x = \circ$،آن را یک **نرم** می‌نامیم همچنین فضای برداری X را همراه با نرم $\|.\|$ یک **فضای نرمدار**

می نامیم.

قضیه ۲.۱ . فرض کنید X یک فضای نرمدار باشد در این صورت :

نگاشت $x \longrightarrow \|x\|$ پیوسته است .

برهان.ر.ک.[۲۹]

تعریف ۳.۱ . فرض کنید X یک فضای نرمدار باشد و $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ دنباله‌ای در X باشد .

(الف). گوییم $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ به $x \in X$ **همگراست** هرگاه $\lim_{n\longrightarrow\infty} \|x_n - x\| = 0$ یعنی به ازای هر $\varepsilon > 0$، یک $N_{(\varepsilon)} \in \mathbb{N}$ موجود باشد به طوری که برای هر $n \geq N_{(\varepsilon)}$، $\|x_n - x\| < \varepsilon$.

(ب). گوییم $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ در X **کوشی** [۱] است هر گاه برای هر $\varepsilon > 0$ یک $N_{(\varepsilon)} \in \mathbb{N}$ موجود باشد به طوری که به ازای هر $m, n \geq N_{(\varepsilon)}$، $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$.

تعریف ۴.۱ . فضای نرمدار X را یک **فضای باناخ** [۲] (کامل) می‌نامیم، هر گاه هر دنباله کوشی در آن همگرا باشد.

مثال ۵.۱ .(الف). اگر (X, m, μ) یک فضای اندازه باشد آنگاه برای $1 \leq p < \infty$، فضای $L^p(X, \mu)$ متشکل از تمام توابع اندازه پذیر مختلط f که $\int_X |f|^p d\mu < \infty$ با نرم زیر یک فضای باناخ است .

$$\|f\|_p = (\int_X |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$$

(ب). برای $1 \leq p < \infty$، فضای ℓ^p متشکل از تمام دنباله‌های مختلط $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ که $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|^p < \infty$ با نرم زیر یک فضای باناخ است .

$$\|x\|_p = (\sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$$

---

[۱] Cauchy

[۲] Banach

(پ). فضای ℓ^∞ متشکل از تمام دنباله‌های مختلط $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ به طوری که $\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty$، با نرم $\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ یک فضای باناخ است .(در واقع یک نیم نرم است ولی با کلاس های هم ارزی نرم می شود.)

قضیه ۷.۱ . اگر $1 \leq p,q \leq \infty$ به‌طوری که $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$، آنگاه:

(الف).برای هر $f \in L^p(\mu)$ و هر $g \in L^q(\mu)$ **نامساوی هولدر** [۳] برقرار است یعنی:

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p.\|g\|_q$$

در حالتی که $p = q = 2$ آن را **نامساوی کوشی—شوارتز** [۴] می‌نامند.

(ب). برای هر $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^p$ و $y = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^q$ نامساوی هولدر به صورت زیر برقرار است:

$$\|xy\|_1 \leq \|x\|_p.\|y\|_q$$

برهان.ر.ک.[۲۸].

قضیه ۸.۱ . برای $1 \leq p < \infty$ و برای هر $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ و $y = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ از ℓ^p **نامساوی مینکوفسکی** [۵] به صورت زیر برقرار است :

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

برهان. ر.ک .[۶].

تعریف ۹.۱ . دو نرم $\|.\|_1$ و $\|.\|_2$ در فضای نرمدار X را معادل (هم ارز) می‌نامیم هر گاه اعداد ثابت و مثبت A و B موجود باشند به طوری که به ازای هر $x \in X$،

$$A\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq B\|x\|_1$$

[۳] Holder

[۴] Cauchy-Schwarz

[۵] Minkowski

قضیه ۹.۱ . فرض کنیم $\|.\|_1$ و $\|.\|_2$ دو نرم هم ارز روی فضای برداری X باشد،دراین صورت X با $\|.\|_1$ باناخ است اگروفقط اگر، X با $\|.\|_2$ باناخ باشد .

برهان. ر.ک.[۱].

قضیه ۱۰.۱ . (الف).در هر فضای نرمدار با بعد متناهی هر دو نرم دلخواه هم ارزند.

(ب).هر زیر فضای برداری با بعد متناهی فضای نرمدار،با توپولوژی حاصل از نرم بسته است .

(پ). یک فضای نرمدار با توپولوژی حاصل از نرم موضعاً فشرده است اگر و فقط اگر، با بعد متناهی باشد .

برهان. ر.ک.[۱]

۲.۱ فضای هیلبرت

تعریف ۱۱.۱ . یک فضای برداری مختلط H را یک **فضای ضرب داخلی** گوییم،اگرنگاشت $<.,.>: H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$ که $(x,y) \longmapsto <x,y>$ موجود باشد که به‌ازای هر $x,y,z \in H$ و هر $\alpha \in \mathbb{C}$ داشته باشیم :

(الف). $<y,x>=\overline{<x,y>}$

(ب). $<\alpha x+y,z>=\alpha<x,z>+<y,z>$

(پ). $<x,x>\geq 0$

(ت). $x=0 \Longleftrightarrow <x,x>=0$

به عدد مختلط $<x,y>$ ضرب داخلی x,y و نگاشت فوق را ضرب داخلی گوییم.

با توجه به تعریف ضرب داخلی، نرم را در فضای H چنین تعریف می‌کنیم:

$\|x\| = < x,x >^{\frac{1}{2}}$ یعنی به‌ازای هر $x \in H$ ریشه دوم ضرب داخلی $< x,x >$ که عددی نامنفی است ، برابر با نرم x است.

نتیجه ۱۲.۱ . به ازای هر $x,y,z \in H$ و $\alpha \in \mathbb{C}$، از تعریف فضای ضرب داخلی نتایج زیر به‌دست می آید.

(الف). $< 0,x >= 0$

(ب). $< z,\alpha x+y >= \overline{\alpha} < z,x > + < z,y >$

(پ). **نامساوی کوشی — شوارتز** :

$$| < x,y > | \leq \|x\|.\|y\|$$

. (ت). **نامساوی مثلثی** :

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

. (ث). **اتحاد متوازی الاضلاع** :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

از نامساوی مثلثی نتیجه می گیریم $\|x-z\| \leq \|x-y\| + \|y-z\|$. اگر فاصله بین x و y را با $\|x-y\|$ نشان دهیم ، H در تمام شرایط فضای متریک صدق می‌کند و از شرط (ت) تعریف (۱۲.۱) نتیجهٔ می‌گیریم اگر $\|x\| = 0$ آنگاه $x = 0$، لذا H یک فضای متریک است .

تعریف ۱۳.۱ . فضای ضرب داخلی H را یک **فضای هیلبرت** گوییم هر گاه با متر حاصل از ضرب داخلی یک فضای متریک کامل باشد .

مثال ۱۴.۱ .(الف). فضای برداری $\mathbb{C}^n$ با ضرب داخلی زیر یک فضای هیلبرت است.

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} \qquad x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{C}^n$$

(ب).فضای $L^2(X, \mu)$ با ضرب داخلی زیر یک فضای هیلبرت است .

$$< f, g >= \int_X f\overline{g} d\mu \qquad f, g \in L^2(X, \mu)$$

(پ).فضای $\ell^2(\mathbb{Z})$ با ضرب داخلی زیر یک فضای هیلبرت است .

$$< x, y >= \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n \overline{y_n} \qquad x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$$

تبصره ۱۵.۱ . فضاهای هیلبرت ردهی خاصی از فضاهای باناخ را تشکیل می دهند و تمام قضایای فضاهای باناخ در مورد فضاهای هیلبرت نیز برقرار است .هندسه فضاهای هیلبرت از جهاتی شبیه به هندسهی اقلیدسی وبسیار در دسترس‌تر از نظریه فضاهای باناخ است .

در سراسر این پایانامه فضای هیلبرت را با H نشان می‌دهیم .

تعریف ۱٦.۱ . زیر فضای بسته از فضای هیلبرت H،زیر فضایی برداری است که با توپولوژی حاصل از نرم درH بسته باشد . در این پایانامه اگر M زیر فضای بسته H باشد آن را به طور خلاصه با $M \sqsubseteq H$ نشان می‌دهیم .

لم ۱۷.۱ . اگرM یک زیر فضای H باشد،آنگاه $\overline{M} \sqsubseteq H$

تعریف ۱۸.۱ .(الف).اگر $x, y \in H$ و $< x, y >= 0$ آنگاه x و y را**متعامد** نامیم و می‌نویسیم $x \perp y$.

(ب).$x^\perp = \{y :< x, y >= 0\}$ واگر $A, B \subseteq H$ آنگاه $A^\perp := \bigcap_{x\in A} x^\perp$. همچنین اگر برای هر $x \in A$ و $y \in B$ داشته باشیم $x \perp y$، آنگاه می نویسیم $A \perp B$.

قضیه ۱۹.۱ .اگر M یک زیر فضای دلخواه از فضای هیلبرت H باشد آنگاه :

(الف). $M^{\perp} \sqsubseteq H$.

(ب).$\overline{M}^{\perp} = M^{\perp}$ و $\overline{M} = (M^{\perp})^{\perp}$ و $M \bigcap M^{\perp} = \{0\}$.

(پ).$\overline{M} = H$ اگر و فقط اگر $M^{\perp} = \{0\}$.

برهان. ر.ک .[۳۴].

قبل از آن که تعریف بعدی را بیاوریم ، تابع زیر را معرفی می کنیم :

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

این تابع به **دلتای کرونکر** [6] معروف است .

تعریف ۲۰.۱ . اگر I یک مجموعه اندیس گذار باشد ، $\{x_i\}_{i\in I}$ را یک **مجموعه متعامد یکه** گوییم،اگر تمام اعضای آن دو به دو متعامد باشند وبرای هر $i \in I$، $\|x_i\| = 1$، یعنی برای هر $i, j \in I$ ($i \neq j$)، $< x_i, x_j >= \delta_{i,j}$.

قضیه ۲۱.۱ .اگر $\{x_k\}_{k=1}^{n}$ مجموعه‌ای متعامد در H باشد،آنگاه :

$$\|x_1 + ... + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + ... + \|x_n\|^2$$

برهان. ر.ک .[۲۸].

تعریف ۲۲.۱ .**زیر فضای تولید شده** توسط $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ عبارت است از تمام ترکیبات خطی متناهی از x_αها.یعنی:

$$Span_{\alpha\in I}\{x_\alpha\} = \{\sum_{i\in F} c_i x_i : \text{متناهی} F \subseteq I, c_i \in \mathbb{C}\}$$

تعریف ۲۳.۱ . گوییم $\{x_i\}_{i\in I}$ در H متعامد یکه ماکسیمال است اگربه طور سره درون هیچ مجموعه‌ی متعامد یکه دیگری از H قرار نگیرد.

---

[6] Kronecker delta

تعریف ۲۴.۱ . دنباله $\{x_i\}_{i\in I}$ را در H **کامل(مولد)** گوییم اگر تنها عضو عمود بر این خانواده صفر باشد یعنی: اگر $x \in H$ چنان باشد که برای هر $i \in I$، $<x, x_i> = 0$ آنگاه $x = 0$ و معادل است با این که $Span_{i\in I}\{x_i\}$ در H چگال باشد .

تعریف ۲۵.۱ . $\{x_i\}_{i\in I}$ یک **پایه متعامد یکه** است اگر یک مجموعه متعامد یکه ماکسیمال باشد. در این حالت به‌ازای هر $x \in H$ دنباله‌ی یکتای $c = \{c_i\}_{i\in I}$ موجود است که $x = \sum\limits_{i\in I} c_i x_i$. یعنی یک پایه باشد و در دو شرط زیر صدق کند :

۱) $<x_i, x_j> = 0$ بازای هر $i \neq j$.

۲) $\|x_i\| = 1$ بازای هر $i \in I$.

تعریف ۲۶.۱ . اگر H دارای زیر مجموعه چگال شمارش پذیری باشد H را **فضای هیلبرت جدایی پذیر** می‌نامیم .

قضیه ۲۷.۱ . هر مجموعه متعامد یکه $\{x_i\}_{i\in I}$ از H درون یک مجموعه‌متعامد یکه‌ی ماکسیمال از H قرارمی گیرد.

برهان. ر.ک .[۲۸].

قضیه ۲۸.۱ . خانواده متعامد یکه $\{x_i\}_{i\in I}$ در H ماکسیمال‌است اگر و فقط اگر، $\overline{Span_{i\in I}}\{x_i\} = H$.

برهان.از تعریف به راحتی نتیجه می‌شود .

قضیه ۲۹.۱ .فرض کنیم $\{x_i\}_{i\in I}$ یک مجموعه متعامد یکه در H باشد .در این صورت حکم های زیر هم ارزند :

(الف).$\{x_i\}_{i\in I}$ یک مجموعه یکه ماکسیمال (پایه متعامد یکه) برای H است .

(ب).برای هر $x \in H$ داریم: $\|x\|^{2} = \sum\limits_{i\in I} |< x, x_i >|^{2}$.که این تساوی به اتحاد پارسوال[۷] معروف است .

(پ). $\overline{Span}_{i\in I}\{x_i\} = H$.

(ت).برای هر $x \in H$ داریم : $x = \sum\limits_{i\in I} < x, x_i > x_i$.

(ث).اگر $x \in H$ و برای هر $i \in I$ داشته باشیم: $< x, x_i > = ۰$ آنگاه $x = ۰$.

برهان. ر.ک .[۲۸].

مثال ۳۰.۱ . فضای هیلبرت $H = \ell^{۲}$ که ضرب داخلی آن همان ضرب مؤلفه ای است را در نظر بگیرید و برای هر $n \in \mathbb{Z}$ قراردهید $e_n = (\delta_{ni})_{i\in\mathbb{Z}}$. آنگاه $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ یک پایه متعامد یکه برای $\ell^{۲}$ است. زیرا برای هر $m, n \in \mathbb{Z}$ که $m \neq n$ داریم : $< e_n, e_m > = ۰$ و اگر $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^{۲}$ چنان باشد که برای هر $n \in \mathbb{Z}$ داشته باشیم $< x, e_n > = ۰$ آنگاه برای هر $n \in \mathbb{Z}$ داریم $x_n = ۰$ در نتیجه $x = ۰$ و طبق (۳۰.۱) پایه بودن $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ نتیجه می‌شود.

قضیه ۳۱.۱ .(الف). هر فضای هیلبرت دارای پایه متعامد یکه است .

(ب). اگر $\{x_i\}_{i\in I}$ یک پایه متعامد یکه برای H باشد،آنگاه H با $\ell^{۲}(I)$ یکریخت است .

(پ). اگر X و Y دو پایه متعامد یکه برای H باشد آنگاه $cardX = cardY$ و این مقدار را بعد H می‌نامند و آن را با $dimH$ نشان می‌دهند.

برهان. ر.ک .[۲۸].

قضیه ۳۲.۱ . هر خانواده متعامد یکه در یک فضای هیلبرت جدایی پذیر شماراست .

برهان. ر.ک .[۲۸].

قضیه ۳۳.۱ .فرض کنید $x \in H$. در این صورت :

$$\|x\| = Sup\{|< x, y >|; y \in H, \|y\| = ۱\}$$

---

[۷] Parseval

برهان. $y \in H$ را دلخواه چنان انتخاب می‌کنیم که $||y|| = 1$ آنگاه از نامساوی کشی—شوارتز داریم:

$$| < x, y > | \leq ||x||.||y|| = ||x||$$

روی تمام yها با خاصیت $||y|| = 1$ از طرفین نامساوی فوق Sup می گیریم :

$$\sup_{||y||=1} | < x, y > | \leq ||x||$$

حال برای برای به دست آوردن طرف عکس نامساوی فوق فرض کنیم $x \neq 0$ (چون اگر $x = 0$ واضح است). قرار می دهیم $y_0 = \frac{x}{||x||}$ و داریم :

$$| < x, y_0 > | = | < x, \frac{x}{||x||} > | = \frac{1}{||x||} | < x, x > | = \frac{1}{||x||}.||x||^2 = ||x||$$

پس

$$||x|| = | < x, y_0 > | \leq \sup_{||y||=1} | < x, y > |$$

وتساوی مورد نظر بدست می آید .■

تعریف ۳۴.۱ .فرض کنیم X فضائی نرمدار و $M \sqsubseteq H$ ،اگر $N \sqsubseteq H$ موجود باشد به طوری که $M \bigcap N = \{0\}$ و $X = M + N$ آنگاه M رایک **زیر فضای متکامل** X می‌نامیم و می‌نویسیم $X = M \oplus N$.

تذکر ۳۵.۱ .اینجااین سوأل پیش می آید که اگر X یک فضای نرمدار و M یک زیر فضای بسته از آن باشد،آیا همواره یک زیر فضای بسته از X مانند N وجود دارد به طوری که X مجموع مستقیم Mو N باشد ؟ اگر X یک فضای هیلبرت باشد،جواب مثبت است،در این حالت N را **زیر فضای مکمل متعامد** M می‌نامیم و می نویسیم $N = M^\perp$. اما این امر برای فضاهای باناخ برقرار نیست. به عنوان مثال c_0 مجموعه‌ی همه‌ی دنباله‌های همگرا به صفر یک زیر فضای بسته از ℓ^∞ است. اما c_0 یک زیر فضای متکامل از ℓ^∞ نیست [۲۸].