بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه حکیم سبزواری

دانشگاه حکیم سبزواری

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر - گروه ریاضی

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد در ریاضی محض

عنوان

زوجهای دوگان صریحی از قاب های گابور

استاد راهنما

دکتر علی اکبر عارفی جمال

استاد مشاور

دکتر قدیر صادقی

نگارش

مریم رودسرابی

تابستان ۱۳۹۲

دانشگاه حکیم سبزواری

فرم ۱۱۶ – ت

سوگند نامه دانش آموختگان دانشگاه تربیت معلم سبزوار

اینک که به خواست آفریدگار پاک ، کوشش خویش و بهره گیری از دانش استادان و سرمایه های مادی و معنوی این مرز و بوم، توشه ای از دانش و خرد گردآورده ام، در پیشگاه خداوند بزرگ سوگند یاد می کنم که در به کارگیری دانش خویش، همواره بر راه راست ودرست گام بردارم. خداوند بزرگ، شما شاهدان، دانشجویان و دیگر حاضران را به عنوان داورانی امین گواه می گیرم که ازهمه دانش و توان خود برای گسترش مرزهای دانش بهره گیرم و از هیچ کوششی برای تبدیل جهان به جایی بهتر برای زیستن، دریغ نورزم. پیمان می بندم که همواره کرامت انسانی را در نظر داشته باشم و همنوعان خود را در هر زمان و مکان تا سر حد امکان یاری دهم. سوگند می خورم که در به کارگیری دانش خویش به کاری که با راه و رسم انسانی، آیین پرهیزگاری، شرافت و اصول اخلاقی برخاسته از ادیان بزرگ الهی، به ویژه دین مبین اسلام، مباینت دارد دست نیازم. همچنین در سایه اصول جهان شمول انسانی و اسلامی، پیمان می بندم از هیچ کوششی برای آبادانی و سرافرازی میهن و هم میهنانم فروگذاری نکنم و خداوند بزرگ را به یاری طلبم تا همواره در پیشگاه او و در برابر وجدان بیدار خویش و ملت سرافراز ، بر این پیمان تا ابد استوار بمانم.

مریم رودسرابی

تاییدیه ی صحت و اصالت نتایج

بسمه تعالی

اینجانب مریم رودسرابی به شماره دانشجویی ۹۰۱۳۱۲۲۰۵۰ رشته ریاضی محض مقطع تحصیلی کارشناسی ارشد تایید می نمایم که کلیه نتایج این پایان نامه حاصل کار اینجانب و بدون هرگونه دخل و تصرف و موارد نسخه برداری شده از آثار دیگران را با ذکر کامل مشخصات منبع ذکر کرده ام در صورت اثبات خلاف مندرجات فوق و به تشخیص دانشگاه مطابق با ضوابط و مقررات حاکم (قانون حمایت از حقوق مولفان و مصنفان، قانون ترجمه و تکثیر کتب و نشریات و آثار صوتی ضوابط و مقررات آموزشی پژوهشی و انضباطی ...) با اینجانب رفتار خواهد شد. و حق هرگونه اعتراض در خصوص احقاق حقوق مکتسب و تشخیص و تعیین تخلف و مجازات را از خویش سلب می نمایم . در ضمن مسئولیت پاسخگویی به اشخاص اعم از حقیقی و حقوقی و مراجع ذی صلاح(اعم از اداری و قضایی) به عهده اینجانب خواهد بود و دانشگاه هیچ گونه مسئولیتی در این خصوص نخواهد داشت.

نام و نام خانوادگی:

تاریخ و امضاء:

مجوز بهره برداری از پایان نامه

بهره برداری از این پایان نامه در چاچوب مقررات کتابخانه و با توجه به محدودیتی که توسط استاد راهنما به شرح زیر تعیین می شود بلامانع است:

- بهره برداری ازاین پایان نامه برای همگان بلامانع است
- بهره برداری از این پایان نامه با اخذ مجوز از استاد راهنما بلامانع است
- بهره برداری ازاین پایان نامه تا تاریخ ....ممنوع است.

استاد راهنما:استاد راهنمای اول

تاریخ و امضاء:

تقدیم به

مادرم به خاطر صبوریش
و
همسرم به پاس بزرگواریش

قدردانی

سپاس خداوندی که آموختن را وسیله ای برای رسیدن به کمال در اختیار انسان قرار داد تا بیاموزد و پنجره های بسته را به سوی روشنایی وجودش باز کند و سپاس خداوندگاری که بار دیگر این پنجره را به رویم گشود و این قدرت را به من ارزانی داشت تا بیاموزم واین مهم را به انجام برسانم. اکنون که با فضل و عنایتش موفق به تنظیم و تدوین این پایان نامه شدم، وظیفه ی خود میدانم مراتب امتنان و احترام خود را به تمامی بزرگوارانی که مرا از سرچشمه ی معرفت و آموخته هایشان بهره مند ساختند، برسانم. در اینجا سپاس صمیمانه ام را تقدیم استاد ارجمندم جناب آقاي دکتر علي اکبر عارفی جمال می نمایم که همواره و بی دریغ مرا مرهون راهنمایی ها و الطافشان قرار دادند و بردبارانه راهگشای اینجانب بودند. همچنین از جناب آقای دکتر قدیر صادقي که زحمت مشاوره این پایان نامه را تقبل کردند، سپاسگذارم. از استاد ارجمند سرکار خانم دکتر طیبه لعل شاطری که داوری این پایان نامه را بر عهده گرفتند صمیمانه قدردانی می‌کنم.

فرم چکیده‌ی پایان‌نامه‌ی دوره‌ی تحصیلات تکمیلی

مدیریت تحصیلات تکمیلی

دانشگاه حکیم سبزواری

نام خانوادگی دانشجو: رودسرابی	**نام:** مریم	**ش دانشجویی:** ۹۰۱۳۱۲۲۰۵۰
استاد راهنما: آقای دکتر علی اکبر عارفی جمال	**استاد مشاور:** آقای دکتر قدیر صادقی	
دانشکده: ریاضی و علوم کامپیوتر	**رشته:** ریاضی محض	**گرایش:** آنالیز
مقطع: کارشناسی ارشد	**تاریخ دفاع:** ۱۳۹۲/۶/۱۰	**تعداد صفحات:** ۸٤

عنوان پایان‌نامه: زوج های دوگان صریحی از قاب های گابور

کلیدواژه‌ها: قاب.قاب گابور.دوگان قاب گابور.دوگان غیرکانونی قاب گابور.قاب گابور بسل

چکیده

فرض کنید که $\{g_n ;n\epsilon\acute{Z}\}$ یک مجموعه مولد از توابع در$L^2(\acute{R})$ است و$b>0$. خواص قاب را برای سیستمی از توابع داده شده به صورت$\{E_{mb}g_n ; m,n\epsilon\acute{Z}\}$ در نظر گرفته و شرایطی را می یابیم که این سیستم یک قاب با دوگان هایی به فرم$\{E_{mb}h_n ; m,n\epsilon\acute{Z}\}$ است کهh_n با یک فرمول صریح داده شده است. همچنین نتایج در مواردی به کار می روند کهg_n ها B-یک اسپلاین باشند. به علاوه نشان داده می شود در یک فضای هیلبرت دنباله های بسل به یک جفت قاب دوگان گسترش می یابند. این روش در مقایسه با توسیع دنباله های بسل به قاب های چسبان سروکاری با محاسبه ی ریشه ی مجذور عملگرها ندارد. در ادامه مثال های ساده ای بیان میشود که نشان می دهد توسیع یک جفت قاب دوگان از نظر محاسباتی کارآمدتر از توسیع قاب چسبان است. همچنین دنباله های بسلی در$L^2(\acute{R})$ در نظر گرفته می شود که شاختار گابور دارند و ثابت می شود این دنباله های بسل گابور به یک جفت قاب دوگان گابور گسترش می یابند و اگر مولدهای دنباله های بسل گابور دارای تکیه گاه فشرده باشند مولدهای قاب های دوگان نیز می توانند با تکیه گاه فشرده انتخاب شوند.

امضای استاد راهنما

فهرست مطالب

پیشگفتار

مفهوم قاب برای اولین بار در سال ۱۹۵۲ توسط دافین [۱] و شافر[۲] ارائه شد. بعد ها یانگ [۳]کتابی کامل در مورد قاب ها منتشر کرد. نظریه قاب ها در بسیاری از شاخه های علوم نظیر پردازش سیگنال و آنالیز داده ها به کار می روند. در این میان، قاب های گابور و موجک بیش از پیش مورد توجه قرار گرفته اند. این قاب ها در سال ۱۹۴۶ میلادی توسط گابور [۴] معرفی شد ولی پیش از آن، با عنوان ویل - هایزنبرگ[۵] شناخته می شدند و امروزه به دلیل کاربرد زیاد در علوم مختلف مورد توجه محققان قرار گرفته است. ایده به کار بردن قاب ها در فضای هیلبرت، جهت باز سازی عناصر $L^2(\mathbb{R})$ توسط گراسمن [۶] مطرح شد و اغلب نتایج این بخش نیز توسط دبیشی[۷] و گراسمن و میر [۸] ارائه شده اند که می توانیم آن ها را در مراجع [۱۱]

---

[۱] Duffin

[۲] Schaeffer

[۳] Young

[۴] D. Gabor

[۵] Weyl-Heisenberg

[۶] A. Grossmann

[۷] Daubechies

[۸] Meyer

و [۱۰] بیابیم. از لحاظ کارایی، خارج فضای $L^2(\mathbb{R})$ محدودیت هایی وجود دارد. عمومیت بخشیدن و نتایج جدیدی که از تلفیق روش های به کار برده شده روی $L^2(\mathbb{R})$ و فچینگر[۹]- گروچنیگ [۱۰]حاصل شد، منسوب به والنت است که در مرجع [۳۰] آمده است. یکی از مشکلات اساسی، محاسبه عملگر قاب گابور بود که توسط والنت[۱۱] مورد بررسی قرار گرفت. وی سری هایی را معرفی کرد که تحت شرایطی خاص، به سرعت به تابع مولد قاب همگرا شود. نمایش والنت برای عملگر قاب اغلب اوقات محاسبات را ساده می کرد و کار با آن آسان تر بود. اخیرا کاسازا[۱۲] و کریستنسن[۱۳] شرایط ضعیف تری برای تابع مولد قاب ارائه نموده اند که ایجاب می کند سیستم ویل- هایزنبرگ متناظر از بالا کران دار باشد. اگر یک قطعه موسیقی را به عنوان یک سیگنال تصور کنیم، این طیف شامل فرکانس های مختلفی است که در طول زمان جریان دارد. تصور ما چنین است که گوش در هر لحظه ترکیبی از فرکانس های مختلف را می شنود. از نظر تئوری می توان یک سیگنال را توسط تبدیل فوریه [۱۴] نظیرش، باز سازی کرد. تجزیه و تحلیل فرکانس نسبت به زمان توسط تبدیل گابور و موجک انجام می شود به این ترتیب که با تقسیم یک فرکانس به قطعات متوالی و کوتاه تر می توان ضرایب فوریه ی هر قطعه را محاسبه کرد. اگر $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$یک قاب گابور باشد می توان با انتخاب یک دوگان مناسب مانند $\{E_{mb}T_{na}h\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ فرمول بازسازی را برای $f \in L^2(\mathbb{R})$ به صورت زیر نوشت

$$f = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \langle f, E_{mb}T_{na}h\rangle E_{mb}T_{na}g, \qquad \forall f \in L^2(\mathbb{R}).$$

فصل اول شامل هفت بخش می باشد که در بخش اول قاب ها را به طور عام معرفی می کنیم و در بخش های بعدی عملگر و دوگان قاب، انواع قاب و ویژگی آشفتگی و پایداری قاب را روی فضای هیلبرت معرفی

[۹] Feichtinger

[۱۰] Grochenig

[۱۱] Walnut

[۱۲] Casazza

[۱۳] Christensen

[۱۴] Fourier

می کنیم. فصل دوم مشتمل بر پنج بخش می باشد که در بخش اول قاب گابور را معرفی و در بخش دوم عملگر قاب گابور معرفی می شود. بخش سوم را را نیز به دوگان قاب گابور اختصاص داده ایم و دو بخش پایانی در مورد قاب دوگان هایی است که مولد صریح دارند و یا مولد آن ها یک B - اسپلاین باشد.

درآخرین فصل هم سیستمی از توابع که به صورت مدولاسیون يك دسته از توابع است را در نظر گرفته و شرایطی را بررسي مي كنيم كه اين سيستم يك قاب باشد. همچنین دوگانهای آن را مي يابيم. بنابراین بخش اول قابهایی به فرم $\{E_{mb}g_n\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ و با دوگان های صریحا داده شده را بررسی می کنیم. بخش دوم مربوط به یافتن زوج های دوگان برای دنباله های بسل و بخش آخر را به یافتن زوج های دوگان برای دنباله های بسل گابور اختصاص داده ایم. این پایان نامه بر گرفته از مقالات زیر است:

1. O.Christensen, *Explicitly given pairs of dual frames with compactly supported generators and applications to irregular B-spline.* J. Appl. 15 (2008), 155-163.

2. O. Christensen., R. Young Kim, *On dual Gabor frame pairs generated by polynomials.* J. Fourier Anal. Appl., 16 (2010), 1-16.

3. O. Christensen, *Pairs of dual Gabor frames with compact support and desired frequency localization.* Appl. Comput. Harmon. Anal., 20 (2006), 403–410.

4. C.E. Heil, D.F. Walnut, *Continuous and discrete wavelet transforms.* SIAM Rev., 31(4) (1989), 628–666.

فصل ۱

مقدمه

در این فصل به بررسی مفهوم قاب در فضای هیلبرت می پردازیم. قاب ها را می توان حالت عمومی تری از پایه ریس و پایه متعامد یکه در نظر گرفت. به ویژه هر پایه ریس و پایه متعامد یکه یک قاب است. در بخش اول عملگر قاب را معرفی می کنیم سپس تجزیه قاب را از طریق دوگان کانونی بررسی کرده و در ادامه شرایط قاب و خواص قاب دوگان را بررسی می کنیم. برای مباحث تکمیلی و اثبات اکثر قضایا به یکی از مراجع [۷]یا [۱۳]رجوع کنید.

۱.۱ معرفی قاب ها

در این بخش به معرفی قاب ها درفضاهای هیلبرت $\mathcal{H}$ و برخی از ویژگی های آن ها را می پردازیم. در سرتاسر این فصل $\mathcal{H}$ معرف یک فضای هیلبرت جدایی پذیر است.

تعریف ۱.۱. فرض کنید $U : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ یك عملگر كران دار و دوسویی باشد، تصویر هر پایه متعامد یکه

تحت U را یك پایه ریس [۱] برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ می نامیم.

تعریف ۲.۱. دنباله $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ از بردار ها در فضای باناخ X را در نظر بگیرید:

۱) دنباله ی $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک پایه (شودر [۲]) برای X است هرگاه برای هر $f \in X$ ضرایب عددی منحصر به فرد $\{c_i(f)\}_{i=1}^{\infty}$ موجود باشد به طوری که

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} c_i(f) e_i.$$

۲) پایه $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ از فضای باناخ X را یك پایه غیر شرطی یا نامشروط [۳] گوییم هرگاه هر سری به صورت $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$ به طور غیر شرطی همگرا باشد. به عبارتی هر تجدید آرایش $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{i(k)} e_{i(k)}$ از سری فوق همگرا باشد.

دنباله $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ درفضای هیلبرت $\mathcal{H}$ کامل [۴] نامیده می شود هرگاه

$$\overline{span\ \{f_k\}_{k=1}^{\infty}} = \mathcal{H}.$$

بدیهی است که $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ در $\mathcal{H}$ کامل است اگر برای هر $k \in \mathbb{N}$ که $\langle f, f_k \rangle = 0$ آنگاه $f = 0$.

تعریف ۳.۱. دنباله $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$درفضای هیلبرت $\mathcal{H}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ نامیده می شود، اگر مقادیر ثابت و مثبت B و A موجود باشند به طوری که

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq B\|f\|^2, \qquad \forall f \in \mathcal{H}. \tag{1.1}$$

[۱] Riesz basis

[۲] Schauder basis

[۳] Unconditional basis

[۴] Complete

در این تعریف A و B به ترتیب کران های پایین و بالای قاب نام دارند. ثابت های A و B یکتا نیستند. مثلا اگر B يك کران بالای قاب باشد هر عدد حقیقی بزرگتر از B می تواند يك کران بالای قاب باشد. سوپریمم همه ی کران های پایین قاب نیز يك کران پایین است و کران پایین بهینه نام دارد. اینفیمم تمام کران های بالا هم يك کران بالا است که کران بالای بهینه نام دارد. اگر در تعریف بالا $A = B$، آنگاه قاب را چسبان مي نامیم. در حالتی که $A = B = ۱$ قاب را چسبان نرمال می نامیم.

دنباله $\{f_k\}_{k=۱}^{\infty} \in \mathcal{H}$ را دنباله بسل [۵] گوییم هرگاه حداقل نامساوی دوم قاب برقرار باشد و B را کران بسل برای $\{f_k\}_{k=۱}^{\infty}$ می‌گوییم. فرض کنید $\{f_k\}_{k=۱}^{\infty}$ یک دنباله در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد، $\{f_k\}_{k=۱}^{\infty}$ را یک دنباله قاب [۶] نامیم هرگاه $\{f_k\}_{k=۱}^{\infty}$ یک قاب برای $\overline{span}\{f_k\}_{k=۱}^{\infty}$ باشد. دو دنباله ی $\{f_k\}_{k=۱}^{\infty}$ و $\{g_k\}_{k=۱}^{\infty}$ را هم متعامد [۷] نامیده می شوند هر گاه برای هر $i, j \in \mathbb{N}$ داشته باشیم

$$\langle f_k, g_j \rangle = \delta_{kj}.$$

تعریف ۴.۱. اگر $\{f_k\}_{k=۱}^{\infty}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ باشد و با حذف یک عضو دلخواه از آن، دنباله ی حاصل هم چنان یک قاب در $\mathcal{H}$ باشد، چنین قابی را قاب اضافی[۸]می نامیم و اگر با حذف یک عضو دلخواه از یک قاب، دنباله ی باقی مانده قاب نباشد، چنین قابی را یک قاب دقیق[۹] می نامیم.

تعریف ۵.۱. قاب های $\{f_k\}_{k=۱}^{\infty}$ و $\{g_k\}_{k=۱}^{\infty}$ روی فضاهای هیلبرت $\mathcal{H}$و $\mathcal{K}$ معادل هستند اگر و تنها اگر عملگر وارون پذیر و کران داری چون $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{K}$موجود باشد به طوری که برای هر $k \in \mathbb{N}$، $Tf_k = g_k$.

---

[۵] Bessel sequence

[۶] Frame sequence

[۷] Biorthonormal

[۸] Overcomplete

[۹] Exact

در حالت کلی هر دو پایه ریس معادل یکدیگرند ولی ممکن است دو قاب چنین نباشند. به عنوان مثال، پایه نرمال استاندارد$\mathbb{R}^2$ را به صورت $\{e_1, e_2\} = \{(1,0),(0,1)\}$ در نظر بگیرید. قاب های چسبان نرمال $\{e_1, e_2, 0, 0\}$ و $\{0, 0, e_1, e_2\}$ از لحاظ تعریف خواص یکسانی دارند اما معادل نیستند. واضح است که افزودن صفرها ساختگی بوده و نشان می دهد که شرایط معادل بودن قاب ها بسیار محدود است.

قضیه ۶.۱. *فرض کنیم $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک قاب برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ با کران هایA و B باشد و$U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ عملگری کران دار و پوشا باشد، آنگاه $\{Uf_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ با کران های $A\|U\|^2$ و $B\|U^\dagger\|^{-2}$ می باشد که $U^\dagger : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ نگاشت شبه وارون [10] نظیر U است و*

$$UU^\dagger x = x, \quad \forall x \in R_U$$

که در آن R_U برد [11] عملگر U است.

اثبات. نتیجه ۵.۳.۲ از مرجع [۵] را ببینید. □

۲.۱ عملگر قاب و دوگان قاب کانونی

در این بخش عملگر قاب را روی فضای هیلبرت تعریف و ویژگی های آن را معرفی می کنیم سپس به کمک آن دوگان کانونی قاب را تعریف می کنیم.

تعریف ۷.۱. اگر $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک دنباله بسل در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد عملگر Tبا ضابطه

$$T : \ell^2 \to \mathcal{H}, \quad T\{c_k\}_{k=1}^{\infty} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k f_k$$

[10] Pseudo inverse

[11] Range

را عملگر پیش قاب[۱۲] می نامیم. عملگر الحاقی T که به صورت

$$T^*:\mathcal{H}\to \ell^2,\quad T^*(f)=\{\langle f,f_k\rangle\}_{k=0}^{\infty}$$

نمایش داده می شود را عملگر تجزیه [۱۳] می نامیم. هم چنین عملگر

$$S:\mathcal{H}\longrightarrow \mathcal{H},\quad Sf=TT^*f=\sum_{k=1}^{\infty}\langle f,f_k\rangle f_k$$

را عملگر قاب[۱۴] می نامیم.

عملگر S خوشتعریف است زیرا $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$یک دنباله بسل نیز هست. هم چنین شرط (۱.۱) به صورت

$$A\|f\|^2\le \langle Sf,f\rangle \le B\|f\|^2$$

نوشته می شود زیرا

$$\langle Sf,f\rangle=\langle\sum_{k=1}^{\infty}\langle f,f_k\rangle f_k,f\rangle=\sum_{k=1}^{\infty}\langle f,f_k\rangle\langle f_k,f\rangle=\sum_{k=1}^{\infty}\langle f,f_k\rangle\overline{\langle f,f_k\rangle}=\sum_{k=1}^{\infty}|\langle f,f_k\rangle|^2.$$

عملگر قاب کران دار و خود الحاق است، پس

$$AI\le S\le BI$$

که در آن $\le$ یک ترتیب جزئی روی عملگرهای خودالحاق است. پس S مثبت و از پایین کران دار است و به طور معادل یک به یک و بردش بسته است. در لم بعدی خواهیم دید که S هم چنین معکوس پذیر است. فرض کنید $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک قاب و T عملگری کران دار و وارون پذیر روی $\mathcal{H}$ باشد. بنا به قضیه ی ۶.۱ دنباله $\{Tf_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک قاب است و بنا به تعریف ۵.۱ با قاب $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ معادل است. هم چنین هر قاب $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$

[۱۲] Pre-frame operator

[۱۳] Analysis operator

[۱۴] Frame operator

با یک قاب چسبان نرمال معادل است، پس قاب $\{S^{-1/2}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ را که در آن $S^{-1/2}$ ریشه دوم مثبت S^{-1} است با $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ معادل است و به سادگی نشان داده می شود که این قاب یک قاب چسبان نرمال با کران ۱ است.

برای اثبات حکم زیر قضیه ۵.۴.۱ از مرجع [۷] را ببینید.

قضیه ۸.۱. *دنباله $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ در $\mathcal{H}$ یک قاب است اگر و تنها اگر*

$$T : \ell^2 \longrightarrow \mathcal{H}, \quad \{c_k\} \longrightarrow \sum_k c_k f_k$$

عملگری کراندار از ℓ^2 بروی $\mathcal{H}$ باشد.

لم ۹.۱. [۸] *فرض $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک قاب روی $\mathcal{H}$ با کران های بهینه A و B و نیز S عملگر قاب وابسته به آن باشد، آن گاه گزاره های زیر برقرارند:*

(۱) عملگر S مثبت، وارون پذیر، کران دار و خودالحاق است و $B^{-1}I \leq S^{-1} \leq A^{-1}I$.

(۲) $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک قاب با کران های بهینه A^{-1} و B^{-1} است و S^{-1} عملگر قاب نظیر $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ است.

اثبات. برای اثبات نتیجه ۲.۱.۴ از مرجع [۱۷] را ببینید. □

یکی از مهم ترین خواص قاب ها خاصیتی موسوم به خاصیت بازسازی [۱۵] است. فرض کنیم $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک قاب با عملگر قاب S باشد، آنگاه

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, S^{-1}f_k \rangle f_k, \qquad \forall f \in \mathcal{H}. \tag{۲.۱}$$

[۱۵] Reconstruction

سری اخیر به صورت نامشروط همگراست. در لم قبل دیدیم که $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک قاب است و با $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ معادل است. دنباله $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ را دوگان کانونی[۱۶] قاب $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ می نامیم.

۳.۱ دوگان قاب

یکی از اهداف اصلی نظریه قاب ها یافتن ضرایب مناسبی به جای ضرایب $\{\langle f, S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ دررابطه ی (۲.۱) است. پاسخ نه چندان کاملی به این مبحث یافتن دوگان هایی برای یک قاب است. در این مبحث ضمن معرفی دوگان یک قاب به همراه مثال هایی شرایط وجود آن ها را نیز بررسی می کنیم.

تعریف ۱۰.۱. فرض کنید $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ و $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ دو دنباله بسل برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشند به طوری که برای هر $f \in \mathcal{H}$، داشته باشیم

$$f = \sum_k \langle f, g_k \rangle f_k, \tag{۳.۱}$$

آن گاه $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ را دوگان $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ می نامیم.

دوگان دارای خاصیت تقارنی است یعنی اگر $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ دوگان $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ باشد، $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ نیز دوگان $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ است. قاب $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ حداقل یک دوگان کانونی به صورت $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ دارد اما در حالت کلی می تواند بیش از یک دوگان داشته باشد.

چنین دوگان هایی را دوگان غیر کانونی (جایگزین[۱۷]) می نامند. فرمول (۳.۱) که فرمول باز سازی نیز خوانده می شود، یکی از مهم ترین ابزارها در کاربرد قاب ها است. متاسفانه در حالت دوگان کانونی با معکوس یک عملگر کران دار روی یک فضای هیلبرت عموما نامتناهی مواجه هستیم که این معکوس به

[۱۶] Canonical dual

[۱۷] Alternate