بەنام خدا

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده‌ی فیزیک

# بررسی ساختار هامیلتونی ذره نسبیتی اسپین‌دار

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد فیزیک

مهدی حاجی هاشمی جزی

استاد راهنما

دکتر احمد شیرزاد

۱۳۸۹

**دانشگاه صنعتی اصفهان**

دانشکده‌ی فیزیک

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی فیزیک

تحت عنوان

# بررسی ساختار هامیلتونی ذره نسبیتی اسپین‌دار

توسط

مهدی حاجی هاشمی جزی

در تاریخ۸۹/۱۲/۱۷ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهایی قرار گرفت.

| | |
|---|---|
| ۱–استاد راهنمای پایان‌نامه | دکتراحمد شیرزاد |
| ۲–استاد مشاور پایان‌نامه | دکتر بهروز میرزا |
| ۳–استاد ممتحن داخلی | دکتر منصور حقیقت |
| ۴–استاد ممتحن خارجی | دکتر مهدی دهقانی |
| سرپرست تحصیلات تکمیلی | دکتر فرهاد شهبازی |

شکر و سپاس بی حد خداوندی که ما را نعمت وجود و ادراک تا بی‌کران‌ها بخشید.

با تشکر و قدر دانی

از

خانواده‌ی عزیزم که همیشه مشوق اصلی من در تحصیل بوده‌اند،

استاد راهنمای بزرگوارم دکتر شیرزاد

به خاطر راهنمایی‌های موثر و مفید ایشان در طول انجام این پایان‌نامه،

استاد مشاور این پایان‌نامه دکتر میرزا

به خاطر راهنمایی‌ها و پیشنهادات ایشان در راستای انجام این پروژه،

اساتید داور این پایان‌نامه دکتر حقیقت و دکتر دهقانی

به جهت مطالعه و داوری این پایان‌نامه،

دوستان عزیزم، آقای صادق ، آقای حسن پور و آقای ماهانی که مرا در رسیدن به اهدافم یاری کردند و به این حقیر ابراز محبت داشته‌اند.

**کلیه‌ی حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات،**

**ابتکارات و نو آوری‌های ناشی از تحقیق موضوع این**

**پایان‌نامه متعلق به دانشگاه صنعتی اصفهان است.**

**تقدیم به**

**پدر و مادر مهربانم**

**و به آنکه سبب اتصال زمین و آسمان است.**

# فهرست مندرجات

## چکیده

مدل کلاسیکی برای ذره نسبیتی اسپین‌دار در فضایی حاصل ضربی نوشته می شود. منظور از مدل سازی در فضای حاصل ضربی این است که لاگرانژی مناسبی برای توصیف ذره نسبیتی اسپین‌دار ارائه کنیم. این مدل با دو فرمول‌بندی متفاوت ارائه شده است که هم‌ارز بودن این دو فرمول‌بندی در این پایان نامه نشان داده شده است. در این پایان نامه ابتدا روندی را که منجر به به ارائه لاگرانژی اولیه برای این مدل شده است را طی می‌کنیم سپس معادلات اویلر— لاگرانژ را برای این لاگرانژی می‌نویسیم که البته بسیار پیچیده است. . در گام بعدی روشی برای به دست آوردن لاگرانژی با استفاده از تقارن بازپرمایه بندی سیستم ارائه می‌کنیم که با مقدمه‌ای که در ابتدای فصل ۴ در مورد لاگرانژی ذره نسبیتی بدون اسپین ارائه کرده‌ایم به خوبی ارتباط این مدل با مدل ذره نسبیتی بدون اسپین را مشخص می‌کند. هر مسئله کلاسیک را می‌توان از دو منظر تحلیل کرد. تحلیل لاگرانژی و تحلیل هامیلتونی. تحلیل لاگرانژی این مسئله در فصل ۳ این پایان‌نامه بررسی شده است و تحلیل هامیلتونی در فصل ۵ مورد توجه واقع شده است. در روند تحلیل هامیلتونی متوجه می‌شویم با یک مسئله قیدی مواجه هستیم بنابراین تحلیل هامیلتونی مسئله متضمن تحلیل قیدی آن است. استخراج قیود و تعیین نوع اول بودن و نوع دوم بودن آن در فصل ۵ انجام شده است. می دانیم در مسائلی که ساختار قیدی دارند هر قید نوع اول یک آزادی پیمانه‌ای ایجاد می کند و برای به دست آوردن جواب در تحلیل هامیلتونی باید دست به تثبیت پیمانه بزنیم. مسئله تثبیت پیمانه برای این مسئله نیز در فصل ۵ انجام شده است.


**لغات کلیدی** : گروه پوانکاره، عملگر کازیمیر، چاربردار پائولی — لبانسکی، ساختار قیدی، تثبیت پیمانه

# فصل ۱

# مقدمه

مدل نویسی برای ذره نسبیتی اسپین‌دار تاریخچه طولانی دارد. گام‌های نخست توسط هنسن و رِجی برداشته شد [۱]. مدل آن‌ها اسپین و جرم ذره را به طور مستقل ارائه نمی‌کرد که این ایراد بعدها برطرف شد[۲]. برای مطالعه مدل‌های کلاسیک ذره نسبیتی اسپین‌دار می‌توانید به [۵، ۴، ۳] مراجعه کنید.

مدل کلاسیک برای ذره نسبیتی اسپین‌دار در سال ۱۹۹۴ توسط لیاخویچ، سگال و کوزنکو مطرح شده است[۷]. اساس این مدل بر این ایده اساسی ویگنر متکی است که دستگاه‌های طبیعی باید در چارچوب نمایش‌های تقلیل ناپذیر گروه پوانکاره طبقه‌بندی شوند[۹]از این ایده استفاده می‌شود برای توجیه این مطلب که عملگرهای کازیمیر گروه پوانکاره در مدل باید پارامترهای ثابت مسئله باشند. به طور کلی چه در مکانیک کلاسیک و چه در مکانیک کوانتومی برای توصیف اسپین نیاز به این داریم که فضایی که در آن کار می‌کنیم را گسترش دهیم. در مکانیک کوانتومی یک فضای برداری $c^{2}$ در فضای هیلبرت ضرب می‌کنیم در این مدل نیز بعد از بازنویسی که توسط استراژکویچ در سال ۲۰۰۸ ارائه شد [۸] یک زیر فضای نور گونه مینکوفسکی در فضای مینکوفسکی معمولی ضرب می‌کنیم. به این ترتیب فضایی که در آن مدل‌سازی را انجام می‌دهیم به دست می‌آید.

نمایش‌های گروه پوانکاره به وسیله دو مقداری که برای کازیمیرهای گروه پوانکاره ارائه می‌کنند متمایز می‌شوند.

کازیمیر اول گروه پوانکاره مجذور چاربردار $p_\mu$ است که $p_\mu$ ها مولد انتقال هستند کازیمیر دوم مجذور چاربردار پائولی–لبانسکی است که به تفصیل در فصل دو در مورد آن صحبت خواهیم کرد. ایده‌ای که ویگنر در سال ۱۹۳۹ مطرح این بود که کلیه جواب‌های معادله دیراک بایستی در چارچوب نمایش‌های گروه پوانکاره طبقه‌بندی شوند. یعنی کلیه این جواب‌ها باید برای کازیمیرهای گروه پوانکاره مقادیری ارائه کنند که این مقادیر این جواب‌ها را از جواب‌های دیگر متمایز می‌کند. مقداری که این جواب‌ها برای کازیمیر اول ارائه می‌کنند جرم ذره و مقداری که برای کازیمیر دوم ارائه می‌کنند اسپین آن را معلوم می‌کند. مدل‌نویسی برای ذره نسبیتی اسپین‌دار تلاشی است برای به کار بردن این اصل در مکانیک کلاسیک نسبیتی. در این مدل ما نمایش گروه پوانکاره در فضای مینکوفسکی و نمایش گروه پوانکاره در قسمت نورگونه فضای مینکوفسکی را در هم ضرب کرده و نمایش جدیدی در فضای حاصل ضربی برای گروه پوانکاره به دست می‌آوریم. منظور از مدل نویسی در فضای جدید ارائه یک لاگرانژی در فضای جدید است به گونه‌ای که جواب‌های حاصل از این لاگرانژی مقادیر غیر صفری را برای کازیمیرهای گروه پوانکاره در فضای جدید ارائه کنند. مدل ذره نسبیتی بدون اسپین که در فضای مینکوفسکی معمولی نوشته می‌شود همان‌گونه که در ابتدای فصل دو نشان خواهیم داد مقداری که برای کازیمیر اول به دست می‌آید غیر صفر است اما مقداری که برای کازیمیر دوم به دست می‌آید صفر است. به همین دلیل می‌گوییم مدل ذره نسبیتی بدون اسپین را تشریح می‌کند. در مدلی که در فضای حاصل ضربی جدید ارائه می‌شود برای کازیمیر دوم هم مقداری غیر صفر داریم که این مقدار غیر صفر کازیمیر دوم به اسپین‌دار بودن ذره تعبیر می‌شود. در مدل ذره نسبیتی بدون اسپین پارامتر $m$ جرم ذره را مشخص می‌کند و مقدار کازیمیر اول گروه پوانکاره در این مدل برحسب این پارامتر به دست می‌آید. در مدل ذره نسبیتی اسپین‌دار علاوه بر $m$ پارامتر $l$ نیز وجود دارد که اندازه اسپین ذره را مشخص می‌کند و مقدار کازیمیر دوم بر حسب آن به دست می‌آید.

در این پایان نامه در فصل ۲ ابتدا روندی را که به نوشتن کنش برای ذره نسبیتی اسپین‌دار منتهی شده است را طی می‌کنیم. بین شکل اولیه مدل که در سال ۱۹۹۴ ارائه شد و شکل بازنویسی شده آن تفاوت زیادی وجود دارد که ما هم‌ارز بودن این دو بیان را به دست می‌آوریم. سپس در فصل ۳ تحلیل لاگرانژی که برای این مدل ارائه شده است [۱۰] را بررسی خواهیم کرد و تکنیک‌هایی را که برای غلبه بر پیچیدگی‌های معادلات اویلر–لاگرانژ ارائه شده است را مرور خواهیم کرد. در فصل ۴ با استفاده از تحلیل قیدی و همچنین تقارن بازپرمایه‌بندی

سیستم روشی نوین برای به دست آوردن کنش ذره نسبیتی اسپین‌دار معرفی می‌کنیم که نسبت به روشی که در فصل دو برای به دست آوردن کنش استفاده شده شکیل‌تر و منطقی‌تر است و در ضمن به شکل واضحی نشان می‌دهد نوشتن این مدل در واقع تعمیمی از مدل نویسی برای ذره نسبیتی بدون اسپین است.

در صورتی که قصد داشته باشیم فرمول‌بندی هامیلتونی هم ارز با فرمول‌بندی لاگرانژی را به‌دست آوریم مشاهده می‌کنیم لاگرانژی به‌دست آمده قیدی است و برای تحلیل هامیلتونی باید قیود لاگرانژی را استخراج کنیم و دست به تحلیل قیدی مسئله بزنیم که موضوع فصل ۵ این پایان نامه است. همچنین مسئله تثبیت پیمانه در فصل ۵ مورد توجه واقع شده است. در نهایت هم‌ارز بودن تحلیل لاگرانژی و تحلیل هامیلتونی بررسی شده است.

# فصل ۲

# مدل کلاسیکی برای ذره نسبیتی اسپین‌دار

در این فصل سعی خواهیم کرد با استفاده از دو فضای برداری که گروه پوانکاره در آن‌ها دارای نمایش است مدل کلاسیکی که برای ذره نسبیتی اسپین‌دار ارائه شده است را تشریح کنیم[۸]. ولی قبل از آن مدل کلاسیکی که برای ذره نسبتی بدون اسپین در فضای مینکوفسکی ارائه شده است را مرور می‌کنیم.

می‌دانیم فضای مینکوفسکی از چاربردارهایی به شکل

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \qquad (۲-۱)$$

تشکیل شده است. همچنین متریک فضا به شکل زیر است:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (۲-۲)$$

منظور از ارائه مدل در این فضا ارائه یک لاگرانژی به شکلی است که دینامیک ذره را به صورت صحیح ارائه کند. چون ذره نسبیتی دارای تقارن پوانکاره است ابتدا خواص عمده گروه پوانکاره را در فضای مینکوفسکی بررسی می‌کنیم. گروه پوانکاره شامل تبدیلات لورنتس (سه دوران وسه خیز) و چهار تبدیل انتقال است. فرم کلی این

تبدیلات در فضای مینکوفسکی به شکل زیر است

$$x'^{\mu} = T_f x^{\mu} = x^{\mu} + f^{\mu}$$

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \qquad (٣-٢)$$

که در عبارات بالا $\Lambda^{\mu}_{\nu}$ معرف تبدیلات لورنتس و $T_f$ معرف انتقال در جهت چار بردار $f^{\mu}$ می‌باشد.به طور معمول مولدهای تبدیل انتقال را با $P^{\mu}$ و مولد های تبدیلات لورنتس را با $M_{\mu\nu}$ نشان می‌دهند.

می دانیم هر گروه لی دارای یک یا چند عملگر کازیمیر است. منظور از عملگر کازیمیر عملگری است که با همهٔ اعضای گروه جابه‌جا می‌شود. عملگرهای کازیمیری گروه پوانکاره نیز $P^{٢}$ و $W^{٢}$ می باشد که $W^{\mu}$ چار بردار پائولی− لبانسکی [١] است و با رابطه زیر تعریف می شود

$$W^{\mu} = ١/٢\, \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} M_{\nu\rho} P_{\sigma} \qquad (٤-٢)$$

در عبارت بالا $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ تانسور لوی چویتا چهار بعدی است. مدلی که در فضای مینکوفسکی برای ذره آزاد نسبیتی پیشنهاد شده با لاگرانژی زیر مشخص می‌شود

$$L = -m\sqrt{\dot{x}^{٢}} \qquad (٥-٢)$$

دینامیک سیستم بر حسب متغیر زمان ویژه $\tau$ بیان می‌شود. همچنین مشتق زمانی نیز نسبت به همین متغیر می‌باشند. بنابر این کنش سیستم به صورت زیر است:

$$S = -m \int \sqrt{\dot{x}^{٢}} d\tau \qquad (٦-٢)$$

که به وضوح تحت تبدیلات پوانکاره ناوردا است. این لاگرانژی در دستگاه واحدهای طبیعی($\hbar = c = ١$) نوشته شده است. متغیر $\tau$ یکتا نیست و می‌توان هر تابع دیگری از این متغیر را به جای آن جایگذین کرد. در واقع $\tau$ متغیری واسطه است که با تغییر آن مسیر ذره در فضا مشخص می‌شود. در صورتی که متغیر $\tau$ به گونه‌ای تعریف

[١] Pauli-lubanski

شود که $\dot{x_\circ} = ۱$ آنگاه با حل معادلات حرکت برای لاگرانژی (۲– ٦) به فرم آشنای دینامیک نسبیتی دست پیدا خواهیم کرد. از مکانیک کلاسیک به یاد داریم در صورتی که بخواهیم مسئله را در فرمول بندی هامیلتون بررسی کنیم به جای به دست آوردن دینامیک کمیت‌های $x^\mu(\tau)$ و $\dot{x}^\mu(\tau)$ باید دینامیک فضای فاز $p^\mu(\tau)$ و $x^\mu(\tau)$ را به دست آوریم که $p^\mu$ تکانه همیوغ مختصات $x^\mu$ است و از رابطه زیر تعریف می شود.

$$p^\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\mu} \tag{۲–۷}$$

در این صورت معادلات حرکت به شکل زیر است

$$\begin{aligned} \dot{x}^\mu &= \frac{\partial H}{\partial p_\mu} \\ -\dot{p}^\mu &= \frac{\partial H}{\partial x_\mu} \end{aligned} \tag{۲–۸}$$

که‌در آن هامیلتونی $H$ از رابطه زیر تعریف می‌شود

$$H = \dot{x_\mu} p^\mu - L \tag{۲–۹}$$

با تعریف کروشه پواسون به شکل

$$\{U, V\} = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} \left(\frac{\partial V}{\partial x_\mu}\frac{\partial U}{p_\nu} - \frac{\partial U}{\partial x_\nu}\frac{\partial V}{p_\mu}\right) \tag{۲–۱۰}$$

مشاهده خواهیم کرد معادلات حرکت بندادی (۲–۸) به شکل زیر در می آید:

$$\begin{aligned} \dot{x^\mu} &= \{H, x^\mu\} \\ \dot{p^\mu} &= \{H, p^\mu\} \end{aligned} \tag{۲–۱۱}$$

به طور کلی در مکانیک کلاسیک ثابت می‌شود درصورتی که $G$ مولد تبدیلی خاص باشد و$\epsilon$ پارامتر این تبدیل به میزان بی‌نهایت کوچک باشد وردش مختصات فضای فاز بعد از اعمال این تبدیل بی‌نهایت کوچک به صورت زیر است:

$$\delta x^\mu = \epsilon\{G, x^\mu\}$$

$$\delta p^{\mu} = \epsilon\{G, p^{\mu}\} \qquad (۱۲-۲)$$

به این ترتیب می‌توان هر کمیت $G$ از فضای فاز را به عنوان عملگری در نظر گرفت که تحت عمل کروشه پواسون با توابع فضای فاز وردش $\delta_G$ آن‌ها را می‌دهد.
به عبارت دیگر رابطه (۲—۱۱) به این معنی است که عملگر هامیلتونی در مکانیک کلاسیک عملگر تحول زمانی سیستم است. این روابط به هر کمیتی که تابع مختصات فضای فاز باشد نیز قابل تعمیم است. از تعریف کروشه پواسون، همیوغی متغیرهای فضای فاز به دست می‌آید:

$$\{p_{\mu}, x_{\nu}\} = g_{\mu\nu} \qquad (۱۳-۲)$$

که بیانگر این مطلب است که در مکانیک کلاسیک تکانه همیوغ با تعریف (۲—۷) مولد تبدیل انتقال است.[۲] می‌توان ثابت کرد، در صورتی که $p_{\mu}$ مولد انتقال باشد مولد تبدیل لورنتس به شکل زیر خواهد بود

$$M_{\mu\nu} = x_{\mu}p_{\nu} - x_{\nu}p_{\mu}. \qquad (۱۴-۲)$$

با این تعریف جبر مولدهای گروه پوانکاره تحت کروشه پواسون به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
&\{p_{\mu}, p_{\nu}\} = 0\\
&\{M_{\mu\nu}, M_{\alpha\beta}\} = g_{\mu\beta}M_{\nu\alpha} + g_{\nu\alpha}M_{\mu\beta} + g_{\mu\alpha}M_{\beta\nu} + g_{\nu\beta}M_{\alpha\mu}\\
&\{M_{\mu\nu}, p_{\alpha}\} = g_{\nu\alpha}p_{\mu} - g_{\mu\alpha}p_{\nu}
\end{aligned} \qquad (۱۵-۲)$$

همان‌گونه که گفتیم عملگرهای کازیمیر با تمام اعضای گروه و در نتیجه با همه مولدهای گروه جابجا می‌شوند. اگر بخواهیم این مطلب را برای نمایش گروه پوانکاره در فضای مینکوفسکی و با فرمول‌بندی کروشه پواسون بیان کنیم با در نظر گرفتن عبارت (۲—۱۲) خواهیم داشت:

$$\{\{f(x_{\mu}, p_{\nu}), G\}, C\} = \{\{f(x_{\mu}, p_{\nu}), C\}, G\} \qquad (۱۶-۲)$$

[۲] علت اینکه کروشه پواسون به این صورت تعریف می‌شود این است که متریک به شکل( ۱ − ,۱ − ,۱ − ,۱) تعریف شده است در صورتی که متریک در یک منفی ضرب شود جابجاگر نیز در یک منفی ضرب می‌شود

که $G$ یک مولد دلخواه گروه و $C$ یک عملگر کازیمیر است. همچنین $f$ یک کمیت دلخواه تابع مختصات فضای فاز است. عبارت (۲–۱۶) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\{C,\{f(x_\mu,p_\nu),G\}\}+\{G,\{C,f(x_\mu,p_\nu)\}\}=0 \qquad (۲–۱۷)$$

همچنین از اتحاد ژاکوبی می‌دانیم

$$\{C,\{f(x_\mu,p_\nu),G\}\}+\{G,\{C,f(x_\mu,p_\nu)\}\}+\{f(x_\mu,p_\nu),\{G,C\}\}=0 \qquad (۲–۱۸)$$

دو عبارت (۲–۱۷) و (۲–۱۸) نتیجه می‌دهد

$$\{f(x_\mu,p_\nu),\{G,C\}\}=0 \qquad (۲–۱۹)$$

و چون $f$ تابعی دلخواه است می‌توان نتیجه گرفت

$$\{G,C\}=0 \qquad (۲–۲۰)$$

بنابراین می‌توان گفت شکل عملگرهای کازیمیر باید به نوعی باشد که جابجاگر آن با همه مولدهای گروه صفر باشد. با توجه به شکل مولدهای گروه این تنها در صورتی امکان دارد که کازیمیرهای گروه بر حسب پارامترهای ثابت مسئله به دست آیند. برای اینکه درستی این مطلب را تحقیق کنیم با استفاده از روابط (۲–۷) و (۲–۴) و لاگرانژی ارائه شده در عبارت (۲–۵)، عملگرهای کازیمیر را حساب می‌کنیم. در مورد کازیمیر اول که به شکل $p^2$ بود داریم

$$p^2=\frac{-m\dot{x}_\mu}{\sqrt{\dot{x}^2}}.\frac{-m\dot{x}^\mu}{\sqrt{\dot{x}^2}}=m^2 \qquad (۲–۲۱)$$

که همان گونه که گفتیم بر حسب پارامتر ثابت مسئله به دست آمده است. اما در مسیر محاسبه کازیمیر $W^2$ برای ذره آزاد نسبیتی بدون اسپین مشاهده خواهیم کرد

$$W^\mu=\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}M_{\nu\rho}P_\sigma=\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho}M_{\nu\sigma}P_\rho$$

(۲–۲۲)

با استفاده از پادمتقارن بودن $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ تحت تعویض دو اندیس می‌توان گفت

$$\begin{aligned}
۲W^{\mu} &= \frac{۱}{۲}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}M_{\nu\rho}P_{\sigma} + \frac{۱}{۲}\varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho}M_{\nu\sigma}P_{\rho} \\
&= \frac{۱}{۲}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}M_{\nu\rho}P_{\sigma} - \frac{۱}{۲}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}M_{\nu\sigma}P_{\rho} \\
&= \frac{۱}{۲}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(M_{\nu\rho}P_{\sigma} - M_{\nu\sigma}P_{\rho}) \\
&= \frac{۱}{۲}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(x_{\nu}p_{\rho}p_{\sigma} - x_{\rho}p_{\nu}p_{\sigma} - x_{\nu}p_{\sigma}p_{\rho} + x_{\sigma}p_{\nu}p_{\rho}) \\
&= ۰
\end{aligned} \qquad (۲۳-۲)$$

یعنی عبارت $W^{۲}$ متحّد باصفر است. معمولا در نمایش های گروه پوانکاره، $P^{۲}$ را به جرم و $W^{۲}$ را به اسپین سیستم نسبت می‌دهند. اینکه مقدار $W^{۲}$ در مدل صفر به دست می آید نشانه این است که ذره توصیف شده در این مدل در فضای مینکوفسکی، بدون اسپین است. سعی ما بر این است که در مدلی که ارائه می کنیم با گسترش دادن فضای مینکوفسکی و وارد کردن پارامتر جدیدی مانند $m$ به مسئله که نشان دهنده اندازه اسپین باشد و همچنین باز تعریف مولدهای پوانکاره در فضای جدید مقدار غیر صفری بر حسب پارامتر جدید مسئله برای عملگر کازیمیر $W^{۲}$ به‌دست آوریم. و به این ترتیب مدلی به‌دست آوریم که ذره نسبیتی اسپین‌دار را توصیف کند. در مدلی که به دست خواهیم آورد اندازه چار بردار پائولی— لبانسکی اندازه اسپین و قسمت فضایی آن بردار اسپین را مشخص می‌کند. رهیافت کلی این است که فضای جدیدی که گروه پوانکاره در آن دارای نمایش است پیدا کنیم و با این فضای جدید و فضای پوانکاره یک فضای حاصل ضربی به‌دست آوریم. در فضای حاصل ضربی جدید گروه، پوانکاره دارای نمایش است. مدل‌سازی برای ذره نسبیتی اسپین‌دار در این فضای حاصل ضربی صورت می‌گیرد. فضای جدیدی که ما نمایش گروه پوانکاره را در آن به‌دست می آوریم فضای $S^{۲}$ (فضای روی سطح کره دو بعدی)می باشد.

## ۲—۱ نمایش گروه پوانکاره در فضای $S^۲$

برای آشنایی با فضای $S^۲$ و همچنین نحوه عمل تبدیلات پوانکاره در آن ابتدا باید با گروه تبدیلات ویژه خطی $SL(۲,C)$ آشنا شویم. اگر $x^\mu$ یک چار بردار در فضای مینکوفسکی باشد می‌توان با رابطه

$$X = \sigma_\mu . x^\mu \tag{۲—۲۴}$$

یک ماتریس ۲ × ۲ تشکیل داد در رابطه بالا $\sigma_۰ = I_{۲\times۲}$ و $\sigma_i$ $(i = ۱,۲,۳)$ ماتریس‌های پائولی هستند. شکل کلی ماتریس $X$ به صورت زیر خواهد بود:

$$X = \begin{pmatrix} x_۰ - x_۳ & -x_۱ + ix_۲ \\ -x_۱ - ix_۲ & x_۰ + x_۳ \end{pmatrix} \tag{۲—۲۵}$$

که به وضوح یک ماتریس هرمیتی است. مشاهده می‌کنیم که

$$detX = |x_۰|^۲ - |\overrightarrow{x}|^۲ \tag{۲—۲۶}$$

یعنی اندازه چاربردار $x^\mu$ با دترمینان ماتریس $X$ برابر است و چون تبدیلات لورنتس اندازه چار بردار را تغییر نمی‌دهند، این تبدیلات در فضای برداری ماتریس‌های ۲ × ۲ به شکل یک تبدیل خطی خواهند بود که هرمیتی بودن و دترمینان ماتریس $X$ را تغییر نمی‌دهد. یعنی به ازای هر تبدیل لورنتس در فضای مینکوفسکی یک ماتریس $A$ در فضای ماتریس های ۲ × ۲ وجود دارد به نحوی که وقتی،

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \tag{۲—۲۷}$$

آنگاه

$$X \longrightarrow X' = AXA^\dagger \tag{۲—۲۸}$$

به طوری که $A$ دترمینان و هرمیتی بودن $X$ را حفظ می‌کند. با انجام محاسبات زیر می توان نشان داد دترمینان $A$ فقط می تواند ۱± باشد

$$X' = AXA^\dagger \Longrightarrow detX' = detA.detX.detA^\dagger \Longrightarrow detA.detA^\dagger = ۱ \Longrightarrow |detA|^۲ = ۱$$

$$\Longrightarrow detA = \pm ۱ \tag{۲—۲۹}$$