پایان نامه کارشناسی ارشد

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

گرایش ریاضی محض

یک ساختار سیمپلکتیک از سوپر معادلات اویلر– لاگرانژ

از:

علی زمانی

استاد راهنما:

دکتر اسماعیل عزیزپور

شهریور ۱۳۸۹

بسم اللّه الرّحمن الرّحیم

حضرت علی (ع): دانایی ریشه‌ی همه‌ی خوبی‌ها و نادانی ریشه‌ی همه‌ی بدی‌هاست .

تقدیر و تشکر

منّت خدای را عزّ و جلّ که طاعتش موجب قربتست و به شکر اندرش مزید نعمت . هر نفسی که فرو می رود ممدّ حیاتست و چون بر می آید مفرّح ذات . پس در هر نفسی دو نعمت موجودست و بر هر نعمتی شکری واجب .

بر خود لازم می دانم از زحمات پدر و مادر عزیزم که در دوران تحصیل همواره پشتیبان و مشوق اینجانب بوده‌اند کمال تشکر را بنمایم . همچنین از زحمات اساتید محترم گروه ریاضی دانشگاه گیلان بویژه استاد گرامی جناب آقای دکتر اسماعیل عزیزپور که با راهنمایی های خود راهگشای اینجانب بوده اند کمال تشکر و سپاسگزاری را دارم .

چکیده

یک ساختار سیمپلکتیک از سوپر معادلات اویلر– لاگرانژ

علی زمانی

در این پایان نامه با استفاده از مفاهیمی مانند شبه اسپری و میدان برداری لیوویل، سوپر معادلات اویلر – لاگرانژ را از دیدگاه سوپر فرم ها ی پوانکاره – کارتان مورد بررسی قرار می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: سوپر معادله ی اویلر – لاگرانژ، سوپر فرم پوانکاره – کارتان، شبه اسپری مدرج.

Abstract

symplectic structure of Euler-Lagrange superequations

Ali zamani

In this thesis, by using the concepts of semispray and Liouville vector filed, we study the graded Euler-Lagrange equation from the viewpoint of graded Poincare-Cartan forms.

Key words: Euler-Lagrange superequation, graded Poincare-Cartan form, graded semispray.

فهرست مندرجات

مقدمه و تاریخچه

با فرض وجود یک منیفلد کلاسیک M، که قالب فضای یک سیستم فیزیکی را نمایش می دهد، ساختار سیمپلکتیک متعارف کلاف مماس دوگان اجازه می دهد تا دینامیک های همیلتن آن سیستم را در یک روش خیلی مختصر و دقیق گسترش دهیم. روش مشابهی نیز از نظریه‌ی لاگرانژی حاصل می شود که در آن تئوری فوق بر روی کلاف مماس از یک منیفلد زمینه‌ای تعریف می شود که فرم سیمپلکتیک معرفی شده روی آن متعارف نبوده و به طور مستقیم به انتخاب تابع لاگرانژی برای تشریح سیستم، وابسته است.

این نظریه‌ی کلاسیک از سیستم های دینامیکی به روش های زیادی تعمیم می یابد. یکی از آنها شامل متغیرهای غیر جابجایی می شود که برای توضیح تاثیر کوچک چنین چرخشی مناسبند. در این راستا کارهای زیادی وجود دارند که مطالعات بر روی مکانیک همیلتنی مدرج، حساب تغییرات و ... را نشان می دهند. در قانون طلایی تعمیم یافتن به اثبات های حالت مدرج متغیر های جابجایی و غیر جابجایی به طور دقیق باید مورد بررسی قرار بگیرند، اما در اکثر فهرست ها، زمانیکه با پارامتر های ریشه یاب سروکار داریم با یک بی تقارنی مواجه می شویم که در آن مولفه زمان، t، بعنوان یک پارامتر زوج، بدون هیچ پارامتر فردی در مقابل، تلقی می شود. به این موضوع در مرجع [۱۰] پرداخته شده است، که در آن نظریه ی همیلتنی مدرج با در نظر گرفتن سوپر منیفلد $R^{1,1}$ به عنوان یک فضا برای پارامترهای ریشه یاب (s,t) ، با این فرض که s متغیر نا آبلی باشد توسعه می یابد. دلیل این انتخاب صرفا به خاطر زیبایی نیست بلکه دارای دلایل قوی ریاضی است. همانطور که در مرجع [۱۳] اثبات شد، ضرورت این امر با انتگرالگیری بر روی سوپر میدان های برداری دلخواه مشخص می شود، یعنی بخواهیم سوپر سیستم های دلخواه، همانطور که در مرجع [۱۶] آمده است، را توصیف کنیم.

بنابراین تفسیر ما از قانون طلایی ذکر شده، جایگزین کردن فضای پارامتری کلاسیک $R \equiv R^{1,0}$ با $R^{1,1}$ است. این روند در فیزیک، جدید نیست که در آن $R^{1,1}$ تحت نام $(1,1)-$ سوپر فضا استفاده می شود و حتی ساده ترین مدلهای بر پایه ی آن، کاربردهای جالبی را نتیجه میدهند. قبل از این در سال ۱۹۸۲ ، ویتن پیشنهاد کرد که فرمول اندیس را می توان از یک سیستم مکانیک کوانتومی سوپر متقارن فهمید که فضای پارامتری آن با جفت (t,θ)، t پارامتر بوسونیک[1] و θ پارامتر فِرمیونیک[2]، در نظر گرفته می شود. دیدگاه او از آن پس در مقاله های

[1] bosonic
[2] fermionic

زیادی گسترش یافت. از آن جمله در مرجع [۲]، برای ساختن یک مدل کوانتومی برای یک سوپر ذره، از آن استفاده شده است. و همچنین مقدمه ای از $R^{1,1}$ در مرجع [۳] داده شده است.

مطابق با این دیدگاهها، نظریه لاگرانژین مدرج را به صورت زیر گسترش می دهیم : از سوپر کلاف $R^{1,1} \times (M, A) \to R^{1,1}$ و سوپر کلاف متناظر با آن، یعنی ۱ $-$ بخش های نمایش داده شده به وسیله $J_G^1(\pi)$، شروع کرده، یک سوپر لاگرانژی L روی آن تعریف می کنیم (که به مختصات $\{t, s, x^a, x_t^a, x_s^a\}$ وابسته است)، یک سوپر ۱ $-$ فرمی معین وابسته به L می سازیم و سپس با استفاده از $L^G_{\frac{d}{ds}}$ ، سوپر مشتق لی نسبت به $\frac{\partial}{\partial s}$، به $J_G^2(\pi)$ می رسیم. ۱ $-$ فرمی پوانکاره $-$ کارتان این مجوز را به ما می دهد تا یک ۲ $-$ فرمی سوپر سیمپلکتیک بسازیم که بر روی زیر کلاف مناسبی که فضای جوابها(با مختصات $\{t, s, x^a, x_t^a, x_s^a, x_{ts}^a\}$) می باشد، تصویر می شود . در نتیجه فرم Ω_L به گونه ایست که منحنی انتگرال سوپر میدان برداری همیلتنی آن ، جوابهای سوپر معادلات اویلر $-$ لاگرانژ را به دست می دهد.

در فصل اول تعاریف و مفاهیم اولیه را می آوریم.

در فصل دوم رابطه ی بین یک رده از میدان های برداری ، که روی فضای توسیع یافته ی یک سیستم اتلاف گر کلاسیک تعریف می شوند و همینطور مجموعه ی انتگرال های اول آن سیستم را مورد بررسی قرار می دهیم. در معرفی یک سیستم اتلاف گر برحسب لاگرانژین ، معادلات حرکت به فرم زیر داده می شوند:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = Q_i \quad i = 1, ..., n \quad (a)$$

به طوریکه $Q_i = Q_i(t, q^i, \dot{q}^i)$.

در فصل سوم یک ساختار سیمپلکتیک از سوپر معادلات اویلر $-$ لاگرانژ را ارائه می دهیم.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱.۱ کلاف های جت

۱.۱.۱ تعریف. (منیفلد تاری)[۱] یک منیفلد تاری، سه تایی (E,π,M) است که E و M منیفلد هستند و $\pi : E \to M$ یک سابمرشن[۲] پوشاست. E فضای تام [۳] ، π تصویرگر [۴] و M فضای پایه [۵] نامیده می‌شود. برای هر نقطه $p \in M$ ، زیرمجموعه‌ی $\pi^{-۱}(p)$ از E تار[۶] روی p نامیده می شود و معمولاً با E_p نشان داده می‌شود.

۲.۱.۱ تعریف. (سیستم مختصات تطبیقی[۷]) فرض کنید (E,π,M) یک منیفلد تاری باشد بطوریکه dim M=m و dimE=m+n و $y : U \to R^{m+n}$ یک سیستم مختصاتی روی مجموعه‌ی باز $U \subset E$ باشد. سیستم مختصاتی y یک سیستم مختصاتی تطبیقی نامیده می‌شود اگر به ازای هر $a,b \in U$، $\pi(a)=\pi(b)=p$، آنگاه $pr_۱(y(a))=pr_۱(y(b))$ (بطوریکه $pr_۱ : R^{m+n} \to R^m$).

این تعریف به‌این معنی است که نقاط روی یک تار $E_p \bigcap U$ دارای m مولفه‌ی برابر هستند و تفاوت آنها در n مولفه‌ی باقیمانده است. توجه داشته باشید که اگر x^i $(۱ \le i \le m)$ توابع مختصاتی روی M باشند آنگاه توابع مختصاتی روی E را بصورت زیر نشان می‌دهیم

$$(x^i,u^\alpha) \qquad ۱ \le i \le m \quad , \qquad ۱ \le \alpha \le n \, .$$

[۱] مطالب این بخش از [۱۵] برگرفته شده است
[۲] submersion
[۳] total space
[۴] projection
[۵] base space
[۶] fibre
[۷] adapted coordinat

۳.۱.۱ تعریف. (کلاف [۸]) اگر (E,π,M) یک منیفلد تاری باشد و $p\in M$، آنگاه یک بدیهی‌سازی [۹] موضعی از π حول p، سه تایی (W_p,F_p,t_p) است که W_p یک همسایگی از p، F_p یک منیفلد و $t_p:\pi^{-1}(W_p)\to W_p\times F_p$ یک دیفئومورفیسم است که در شرط زیر صدق می‌کند

$$pr_1\ o\ t_p=\pi|_{\pi^{-1}(W_P)}\ .$$

منیفلدی که حداقل دارای یک بدیهی‌سازی موضعی حول هر نقطه از فضای پایه آن باشد موضعاً بدیهی [۱۰] نامیده می‌شود و بعنوان یک کلاف شناخته می‌شود.

۴.۱.۱ تعریف. (بخش [۱۱]) فرض کنیم سه تایی (E,π,M) یک منیفلد تاری باشد. نگاشت $\phi:M\to E$ را یک بخش از π گوییم هرگاه $\pi o\phi=id_M$. مجموعه ی این بخش ها را به صورت $\Gamma(\pi)$ نمایش می دهیم.

توصیف مختصاتی بخش: اگر $\phi\in\Gamma(\pi)$ و (x^i,u^α) یک خانواده از توابع مختصاتی حول $a\in E$ باشد آنگاه چون $\pi\ o\ \phi=id_M$، داریم

$$x^i(\phi(a))=x^i(\pi(\phi(a)))=x^i(a).$$

بطوریکه m مولفه‌ی اول از $\phi(a)$ بوسیله‌ی مولفه‌های a مشخص می‌شوند. بنابراین فقط n مولفه باقیمانده در توصیف ϕ نقش دارند. در نتیجه برای نمایش ϕ در این سیستم مختصاتی از توابع حقیقی مقدار ϕ^α که بصورت زیر تعریف می‌شوند استفاده می‌کنیم

$$\phi^\alpha=u^\alpha\ o\ \phi.$$

۵.۱.۱ تعریف. (بخش موضعی) اگر (E,π,M) یک منیفلد تاری باشد آنگاه یک بخش موضعی از π، تابع $\phi:W\to E$ است که در رابطه $\pi\ o\ \phi=id_W$ صدق می کند و W یک زیرمنیفلد باز از M است و به صورت $\Gamma_W(\pi)$ نمایش می دهیم. اگر $p\in M$ آنگاه مجموعه‌ی تمام بخش های موضعی از π که دامنه‌ی آنها شامل p است با $\Gamma_p(\pi)$ نشان داده می‌شود.

۶.۱.۱ تعریف. (۱− جت از ϕ در p) فرض کنید (E,π,M) یک کلاف باشد و $p\in M$. بخش های موضعي $\psi,\phi\in\Gamma_p(\pi)$ درp، ۱ −معادل نامیده می‌شوند اگر $\phi(p)=\psi(p)$ و در یک سیستم مختصات تطبیقی (x^i,u^α) حول $\phi(p)$ داشته باشیم

$$\frac{\partial\phi^\alpha}{\partial x^i}\ |_p=\frac{\partial\psi^\alpha}{\partial x^i}\ |_p\qquad 1\leq i\leq m\quad,\quad 1\leq\alpha\leq n.$$

---

[۸] bundle
[۹] trivialisation
[۱۰] locally trivial
[۱۱] section

کلاس هم ارزی شامل ϕ را، ۱− جت از ϕ در p گوییم و با $j_p^1\phi$ نشان می‌دهیم.

۷.۱.۱ تعریف. (اولین جت منیفلد از π) اولین جت منیفلد از π ، مجموعه‌ی $\{j_p^1\phi : p \in M, \phi \in \Gamma_p(\pi)\}$ است که با $J^1\pi$ نشان داده می‌شود. توابع $\pi_1, \pi_{1,0}$ به ترتیب تصویرگرهای مبدأ و مقصد نامیده می‌شوند که بصورت زیر تعریف می‌شوند

$$\begin{aligned} \pi_1 : \quad J^1\pi &\to M \\ j_p^1\phi &\mapsto p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_{1,0} : \quad J^1\pi &\to E \\ j_p^1\phi &\mapsto \phi(p). \end{aligned}$$

سیستم مختصاتی القائی روی $J^1\pi$: فرض کنید (E, π, M) یک کلاف و (U, u) یک سیستم مختصاتی تطبیقی روی E باشد که $u = (x^i, u^\alpha)$. سیستم مختصاتی القائی (U^1, u^1) بصورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} U^1 &= \{j_p^1\phi : \phi(p) \in U\} \\ u^1 &= (x^i, u^\alpha, u_i^\alpha) \end{aligned}$$

که $u^\alpha(j_p^1\phi) = u^\alpha(\phi(p)), x^i(j_p^1\phi) = x^i(p)$ و mn تابع جدید $u_i^\alpha : U^1 \to R$ بعنوان مولفه‌های مشتق بصورت زیر تعریف می‌شوند

$$u_i^\alpha(j_p^1\phi) = \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x^i} |_p .$$

۸.۱.۱ تعریف. (اولین امتداد[۱۲] از ϕ) اگر (E, π, M) یک کلاف و $W \subseteq M$ یک زیرمنیفلد باز باشد و $\phi \in \Gamma_W(\pi)$ ، آن گاه اولین امتداد از ϕ، یک بخش $j^1\phi \in \Gamma_W(\pi_1)$ است که برای هر $p \in W$ بصورت زیر تعریف می‌شود

$$j^1\phi(p) = j_p^1\phi.$$

[۱۲] prolongation

برای یافتن نمایش مختصاتی $j^1\phi$ باید ترکیب آن با توابع مختصاتی تاری u^α, u_i^α را بررسی کنیم که بصورت زیر است

$$u^\alpha(j^1\phi(p)) = u^\alpha(\phi(p)) = \phi^\alpha(p) \quad \Rightarrow \quad u^\alpha o j^1\phi = \phi^\alpha,$$
$$u_i^\alpha(j^1\phi(p)) = \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x^i}\mid_p \quad \Rightarrow \quad u_i^\alpha o j^1\phi = \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x^i},$$

بنابراین نمایش مختصاتی $j^1\phi$ بصورت زیر است

$$(\phi^\alpha, \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x^i}).$$

۹.۱.۱ تعریف. (۲− جت از ϕ در p) فرض کنید (E,π,M) یک کلاف باشد و $p \in M$. بخش های موضعي $\psi, \phi \in \Gamma_p(\pi)$ درp، ۲−معادل نامیده می‌شوند اگر $\phi(p) = \psi(p)$ و اگر در سیستم مختصات تطبیقی (x^i, u^α) حول $\phi(p)$ داشته باشیم

$$\frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x^i}\mid_p = \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial x^i}\mid_p, \qquad \frac{\partial^2 \phi^\alpha}{\partial x^i \partial x^j}\mid_p = \frac{\partial^2 \psi^\alpha}{\partial x^i \partial x^j}\mid_p \qquad {\scriptstyle 1 \le i,j \le m} \quad , \quad {\scriptstyle 1 \le \alpha \le n}.$$

کلاس هم ارزی شامل ϕ را،۲− جت از ϕ در p گوییم و با $j_p^2\phi$ نشان می‌دهیم .

۱۰.۱.۱ تعریف. (دومین جت منیفلد از π) دومین جت منیفلد از π ، مجموعه‌ی $\{j^2\phi : p \in M, \phi \in \Gamma_p(\pi)\}$ است که با $J^2\pi$ نشان داده می‌شود. توابع $\pi_2, \pi_{2,0}, \pi_{2,1}$ به ترتیب تصویرگرهای مبدأ ، مقصد و ۱ − جت نامیده می‌شوند که بصورت زیر تعریف می‌شوند

$$\begin{aligned} \pi_2 : \quad J^2\pi &\to M \\ j_p^2\phi &\mapsto p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_{2,0} : \quad J^1\pi &\to E \\ j_p^2\phi &\mapsto \phi(p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_{2,1} : \quad J^2\pi &\to J^1\pi \\ j_p^2\phi &\mapsto j_p^1\phi. \end{aligned}$$

سیستم مختصاتی القائی روی $J^2\pi$: فرض کنید (E,π,M) یک کلاف و (U,u) یک سیستم مختصاتی تطبیقی روی E باشد که $u=(x^i,u^\alpha)$. سیستم مختصاتی القائی (U^2,u^2) بصورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} U^2 &= \{j^2_p\phi : \phi(p)\in U\} \\ u^2 &= (x^i,u^\alpha,u^\alpha_i,u^\alpha_{ij}) \end{aligned}$$

که $x^i(j^2_p\phi)=x^i(p)$, $u^\alpha(j^2_p\phi)=u^\alpha(\phi(p))$, $u^\alpha_i(j^2_p\phi)=u^\alpha_i(j^1_p\phi)$ و $\frac{1}{2}mn(m+1)$ توابع جدید $u^\alpha_{ij}:U^2\to R$ بصورت زیر تعریف می‌شوند

$$u^\alpha_{ij}(j^2_p\phi)=\frac{\partial^2\phi^\alpha}{\partial x^i\partial x^j}\mid_p .$$

توابع u^α_{ij},u^α_i بعنوان مؤلفه‌های مشتق شناخته می شوند.

۲.۱ سوپر منیفلد

۱.۲.۱ تعریف . [13](سوپر فضای برداری) فرض کنیم $Z_2=\{\bar{0},\bar{1}\}$ میدان مانده ها به پیمانه ۲ باشد. یک فضای خطی M را سوپر فضای برداری می نامیم اگر تجزیه ای به صورت زیر داشته باشد

$$M=M_{\bar{0}}\oplus M_{\bar{1}}$$

عناصر $M_{\bar{0}}$ و $M_{\bar{1}}$ به ترتیب عناصر همگن زوج و فرد M نامیده می شوند. اگر $v\in M_i; i\in Z_2$ آنگاه می نویسیم $|v|=i$ و $|v|$ را درجه v می نامیم.

۲.۲.۱ تعریف . (سوپر جبر)A را یک سوپر جبر گوییم هرگاه A یک سوپر فضای برداری باشد و یک ضرب مانند $o:A\times A\to A$ روی A تعریف شود که در خاصیتهای زیر صدق کند

$$A_0 o A_0\subseteq A_0 \qquad A_0 o A_1\subseteq A_1 \qquad A_1 o A_0\subseteq A_1 \qquad A_1 o A_1\subseteq A_0$$

۳.۲.۱ تعریف . یک سوپر جبر A را جابجایی می نامیم هرگاه

$$a.b=(-1)^{|a||b|}b.a \qquad \forall a,b\in A.$$

[13] مطالب این بخش از [۸] بر گرفته شده است.

۴.۲.۱ تعریف. (هومورفیسم سوپر جبرها) فرض کنیم V و W دو فضای برداری باشند و $f : V \to W$ یک تابع خطی باشد، و همچنین فرض کنیم $a \in V$ دارای درجه باشد، در اینصورت f را یک هومورفیسم سوپرفضاهای برداری می نامیم هر گاه f در شرایط زیر صدق کند،

اگر f زوج باشد آنگاه $|f(V)| = |V|$ و این معادل است با اینکه بگوییم

$$|f(a)| = |f| + |a| = ۰ + |a| = |a| \qquad \forall a \in V$$

واگر f فرد باشد آنگاه $|f(V)| = |V| + ۱$ و این معادل است با اینکه بگوییم

$$|f(a)| = |f| + |a| = ۱ + |a| \qquad \forall a \in V.$$

۵.۲.۱ تعریف . فرض کنیم A یک سوپر جبر جابجایی باشد در اینصورت $f : A \to A$ را یک سوپر مشتق می نامیم هر گاه f یک هومورفیسم سوپر فضاهای برداری باشد و در خاصیت لایبنیتس به صورت زیر صدق کند

$$f(a.b) = f(a).b + (-۱)^{|a||f|} a.f(b) \qquad \forall a, b \in A.$$

۶.۲.۱ تعریف . (هومورفیسم جبرها) فرض کنیم A, B دو سوپر جبر باشند، در اینصورت تابع $f : A \to A$ را یک هومورفیسم سوپرجبرها گوییم هر گاه f یک هومورفیسم سوپرفضاهای برداری باشد و در شرط زیر صدق کند

$$f(a.b) = (-۱)^{|f||a|} f(a)f(b) \qquad \forall a, b \in A.$$

۷.۲.۱ تعریف . (شیف) فرض کنیم X یک فضای توپولوژیکی باشد و همچنین فرض کنیم برای هر زیر مجموعه ی باز $U \subset X$ یک مجموعه ی $f(U)$ وجود داشته باشد و برای هر زیر مجموعه ی باز $U \subset V$ یک تابع تحدید $r_U^V : f(V) \to f(U)$ وجود داشته باشد به طوریکه برای هر زیر مجموعه های باز $U \subset V \subset W$ داشته باشیم $r_U^V o r_V^W = r_U^W$. $f(\emptyset)$ یک مجموعه ی تک عضوی و r_U^U نگاشت همانی است.

اغلب به جای $f(U)$ می نویسیم $\Gamma(U, f)$ و به جای $r_U^V(\xi)$ می نویسیم $\xi|_U$ برای هر $\xi \in f(V)$.

یک خانواده f از مجموعه های $F(U)$ و نگاشت های r_U^V یک شیف نامیده می شود اگر برای هر گردایه ی $\{U_i\}$ از مجموعه های باز X به طوریکه $U = \cup U_i$ شرایط زیر برقرار باشند

۱) اگر $\xi, \eta \in F(U)$ و $\xi|_{U_i} = \eta|_{U_i}$ ، آنگاه $\xi = \eta$

۲) اگر $\xi_i \in F(U_i)$ و برای هر i و j داشته باشیم $\xi_i|_{U_i \cap U_j} = \xi_j|_{U_i \cap U_j}$ در اینصورت $\xi \in f(U)$ موجود باشد به طوریکه $\xi|_{U_i} = \xi_i$ برای هر i.

۸.۲.۱ تعریف . فرض کنیم R یک حلقه ی آبلی و مدرج باشد، یک $R-$ فضای حلقوی مدرج عبارتست از زوج (X, f) که X یک فضای توپولوژیک است و f شیف $R-$جبرهای جابجایی مدرج روی X می باشد.

۹.۲.۱ مثال. (ساختار شیف روی یک منیفلد) فرض کنیم $K = R$ و فرض کنیم M یک منیفلد هاسدورف با یک پایه ی شمارا و به طور موضعی با یک زیر مجموعه ی باز از K^m هomomorf باشد. و همچنین فرض کنیم که هر نقطه $p \in M$ یک همسایگی V داشته باشد و اینکه h_V از V به روی یک زیر مجموعه ی باز از K^m هومورفیسمی باشد به طوریکه برای هر مجموعه ی باز $U \subset V$ تابع $f : U \to K$ روی $h_V(U)$ دیفرانسیل پذیر باشد.

فرض کنیم $U = \cup U_i$ که U_i ها زیر مجموعه‌های باز از M هستند. نگاشت $f : U \to K$ را دیفرانسیل پذیر نامیم اگر $f|_{U_i}$ برای هر i دیفرانسیل پذیر باشد. فضای حلقوی (M, O_M) را یک منیفلد دیفرانسیل پذیر از بعد m می نامیم اگر $\Gamma(U, O_M)$ جبر توابع دیفرانسیل پذیر روی M باشد.

۱۰.۲.۱ تعریف. یک مورفیسم بین فضاهای حلقوی مدرج عبارتست از زوج (h, ϕ) به طوریکه $(h, \phi) : (X, f) \to (Y, g)$ که در آن $h : X \to Y$ پیوسته و $\phi : g \to h_* f$ یک مورفیسم زوج بین شیف $R-$ جبرهای جابجایی مدرج می باشد.

۱۱.۲.۱ تعریف. (سوپر دامنه) فرض کنیم (K^p, O_{k^p}) یک فضای حلقوی باشد. فضای حلقوی

$$K^{p,q} = (K^p, O_{K^{p,q}}) \quad s.t \quad \Gamma(U, O_{K^{p,q}}) = \Gamma(U, O_{k^p}) \otimes \Lambda(q)$$

را سوپر فضای دیفرانسیل پذیر می نامیم. به عبارت دیگر توابع روی $K^{p,q}$ توابعی روی K^p با مقادیر در $\Lambda(q)$ می باشند. K^p فضای زمینه $K^{p,q}$ نامیده می شود.

فرض کنیم $U \subset K^p$ و باز باشد، فضای حلقوی

$$U^{p,q} = (U, O_{K^{p,q}|_U})$$

را یک سوپر دامنه با بعد (p, q) می نامیم.

به عنوان یک مثال می خواهیم سوپر دامنه های حقیقی را در نظر بگیریم. در ابتدا به جای $O_{R^{p,q}}$ می نویسیم $O_{p,q}$ و به جای $\Gamma(U, O_{p,q})$ می نویسیم $C^\infty(U)$. هر تابع $f \in C^\infty(U)$ را به صورت یکتا می توان به شکل زیر نوشت

$$f(u, \xi) = \Sigma_{v=(v_1,...,v_q)} f_v(u) \xi_1^{v_1} ... \xi_q^{v_q} = \Sigma_v f_v \xi^v,$$

که در آن ۱ یا ۰ $= v_i$ و $f_v(u)$ تابع دیفرانسیل پذیر با مختصات $u = (u_1, ..., u_p)$ روی U است. توابع $u_1, ..., u_p \in C^\infty(U)_{\bar{0}}$ و $\xi_1, ..., \xi_q \in C^\infty(U)_{\bar{1}}$ مختصات روی U نامیده می شوند (u_i مختصات زوج و ξ_j مختصات فرد است.) مجموعه ی این توابع، سیستم مختصاتی روی U نامیده می شود.

۱۲.۲.۱ تعریف. (سوپر منیفلد) یک منیفلد مدرج (سوپر منیفلد) عبارتست از فضای حلقوی (M, O_M) به طوریکه O_M شیف سوپر جبرهای جابجایی روی منیفلد M است و در دو شرط زیر صدق می‌کند

۱) M فضای هاسدورف با پایه ی شمارا می باشد.

۲) هر $m \in M$ دارای یک همسایگی U است به طوریکه فضای حلقوی $(U, O_M(U))$ ایزومورف با یک سوپر دامنه می باشد.

فصل ۲

میدان‌های برداری تولیدکننده ثابت‌هابرای سیستم‌های اتلاف‌گرکلاسیک

۱.۲ سیستم های اتلاف گر

فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل پذیر n− بعدی حقیقی باشد که فضای زمینه ی یک سیستم مکانیکی را نمایش می دهد. مختصات موضعی روی M را به صورت $(q^1, ..., q^n)$ در نظر می گیریم. چون با سیستم های وابسته به زمان سروکار داریم بنابراین ابتدا فضای توسیع یافته ی $N = R \times TM$ را معرفی خواهیم کرد. مختصات طبیعی روی N به فرم $(t, q^i, \dot{q}^i)$ می‌باشد.

مفاهیم زیر مورد استفاده قرار خواهند گرفت.

مجموعه ی توابع دیفرانسیل پذیر ، میدان های برداری ، p- فرمی ها روی یک منیفلد دیفرانسیل پذیر N به ترتیب به صورت $C^\infty(N)$، $X(N)$، و $\Omega^p(N)$ نمایش داده می شوند. مشتق لی یک p- فرمی β نسبت به میدان برداری X به صورت $L_X\beta$ نشان داده می شود. در حالتی که β یک ۱− فرمی است ضرب درونی β و میدان برداری X را به صورت $< X, \beta >$ می نویسیم در غیر اینصورت می نویسیم $i_X\beta$. سرانجام مشتق لی یک تابع $f \in C^\infty(N)$ را به صورت $X(f)$ نشان می دهیم.

یک سیستم اتلاف گر به وسیله ی یک تابع $L \in C^\infty(N)$، یک لاگرانژین از یک سیستم، و یک ۱− فرمی ناپایای [1] $\tilde{\mu}$ روی TM، که می تواند وابسته به زمان باشد، مشخص می شود. نام دیگر یک فرم ناپایا، فرم افقی [2] است بنابراین

$$\tilde{\mu} = Q_i dq^i. \tag{1}$$

در واقع بدون عبارت $d\dot{q}^i$ بوده، اما توابع Q_i به متغیرهای $(t, q^i, \dot{q}^i)$ وابسته هستند. $\tilde{\mu}$ را می‌توانیم

[1] semi- basic
[2] horizontal

به صورت یک ۱ـ فرمی روی N نیز در نظر بگیریم. حال ۲ـ فرمی زیر را روی N معرفی می‌کنیم

$$\alpha = d\theta + \tilde{\mu} \wedge dt \qquad (۲)$$

که θ، ۱ـ فرمی کارتان مرتبط با L است و عبارتست از

$$Ldt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(dq^i - \dot{q}^i dt).$$

برای راحتی قرار می دهیم $\mu = \tilde{\mu} \wedge dt$.

بحث را به حالتی محدود می کنیم که L منظم است یعنی دترمینان ماتریس هسین [۳] $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}$ مخالف صفر باشد. به وضوح α یک ۲ـ فرمی با رتبه ی ماکسیمال، یعنی ۲n است. به ویژه $ker\alpha(p) = \{v \in T_pN : i_v\alpha(p) = 0\}$ یک زیر فضای یک بعدی از فضای مماس T_pN در $p \in N$ تعریف می کند. بعلاوه $ker\alpha(= \cup_{p\in N} ker\alpha(p))$، را به صورت یک کلاف روی N در نظر می گیریم. این یعنی اینکه یک میدان برداری غیر صفر $X \in X(N)$ وجود دارد که $ker\alpha(p)$ را در هر نقطه ی $p \in N$ تولید می کند.

یک محاسبه ی سر راست نشان می دهد که $< X, dt > \neq 0$ (در واقع می توان نشان داد که اگر $< X, dt >= 0$، آنگاه $i_X\alpha = 0$). این به نوبه ی خود وجود یک میدان برداری $\Delta \in X(N)$ را تضمین می کند که به صورت زیر مشخص می شود

$$i_\Delta \alpha = 0, \qquad (۳)$$

$$< \Delta, dt >= 1. \qquad (۴)$$

Δ بر حسب مختصات روی N به فرم زیر است

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial t} + q^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \Lambda^i \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} \qquad (۵)$$

که در آن

$$\Lambda^i \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} + \dot{q}^i \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial \dot{q}^i} + \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} \equiv Q_i.$$

برای اثبات آن به صورت زیر عمل می کنیم

$$\Delta \in X(N) \quad \Rightarrow \quad \Delta = a\frac{\partial}{\partial t} + b^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \Lambda^i \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}$$

جاییکه $a, b^i, \Lambda^i \in C^\infty(N)$.

چون $< \Delta, dt >= 1$ نتیجه می گیریم که $a = 1$.

---

[۳] Hessian

حال $i_\Delta\alpha = i_\Delta d\theta + i_\Delta(\tilde{\mu}\wedge dt)$ را محاسبه می کنیم. برای این کار ابتدا دقت می کنیم که

$$\begin{aligned} d\theta = \frac{\partial L}{\partial q^i}dq^i\wedge dt &+ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}d\dot{q}^i\wedge dt + \frac{\partial^۲ L}{\partial t\partial \dot{q}^i}dt\wedge dq^i + \frac{\partial^۲ L}{\partial \dot{q}^j\partial \dot{q}^i}d\dot{q}^j\wedge dq^i \\ &- \dot{q}^i\frac{\partial^۲ L}{\partial q^j\partial \dot{q}^i}dq^j\wedge dt - \dot{q}^i\frac{\partial^۲ L}{\partial \dot{q}^j\partial \dot{q}^i}d\dot{q}^j\wedge dt - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}d\dot{q}^i\wedge dt \\ &+ \frac{\partial^۲ L}{\partial q^j\partial \dot{q}^i}dq^j\wedge dq^i. \end{aligned}$$

با محاسبه ی $d\theta$ حال $i_\Delta\alpha$ را محاسبه می کنیم

$$\begin{aligned} i_\Delta\alpha &= b^i\frac{\partial L}{\partial q^i}dt - \frac{\partial L}{\partial q^i}dq^i + \Lambda^i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}dt - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}d\dot{q}^i + \frac{\partial^۲ L}{\partial t\partial \dot{q}^i}dq^i - b^i\frac{\partial^۲ L}{\partial t\partial \dot{q}^i}dt \\ &+ \Lambda^i\frac{\partial^۲ L}{\partial \dot{q}^j\partial \dot{q}^i}dq^i - b^i\frac{\partial^۲ L}{\partial \dot{q}^j\partial \dot{q}^i}d\dot{q}^j - b^i\dot{q}^i\frac{\partial^۲ L}{\partial q^j\partial \dot{q}^i}dt + \dot{q}^i\frac{\partial^۲ L}{\partial q^j\partial \dot{q}^i}dq^j - \Lambda^i\dot{q}^i\frac{\partial^۲ L}{\partial \dot{q}^j\partial \dot{q}^i}dt \\ &+ \dot{q}^i\frac{\partial^۲ L}{\partial \dot{q}^j\partial \dot{q}^i}d\dot{q}^j - \Lambda^i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}d\dot{q}^i \\ &+ b^iQ_idt - Q_idq^i = ۰. \end{aligned}$$

با توجه به عبارت بالا باید ضرایب $d\dot{q}^i, dq^i, dt$ برابر صفر باشند.
برای $d\dot{q}^i$ داریم

$$-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - b^i\frac{\partial^۲ L}{\partial \dot{q}^j\partial \dot{q}^i} + \dot{q}^i\frac{\partial^۲ L}{\partial \dot{q}^j\partial \dot{q}^i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = ۰$$

در نتیجه با توجه به اینکه ماتریس هسین $\frac{\partial^۲ L}{\partial \dot{q}^j\partial \dot{q}^i}$ مخالف صفر است نتیجه می گیریم $b^i = \dot{q}^i$.
اکنون ضرایب dt را برابر صفر قرار می دهیم

$$\dot{q}^i\frac{\partial L}{\partial q^i} + \Lambda^i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \dot{q}^i\frac{\partial^۲ L}{\partial t\partial \dot{q}^i} - (\dot{q}^i)^۲\frac{\partial^۲ L}{\partial q^j\partial \dot{q}^i} - \Lambda^i\dot{q}^i\frac{\partial^۲ L}{\partial \dot{q}^j\partial \dot{q}^i} - \Lambda^i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} + \dot{q}^iQ_i = ۰,$$

چون $\dot{q}^i \neq ۰$، لذا با تقسیم طرفین بر $\dot{q}^i$ به نتیجه ی مورد نظر می رسیم

$$Q_i = \Lambda^i\frac{\partial^۲ L}{\partial \dot{q}^j\partial \dot{q}^i} + \dot{q}^i\frac{\partial^۲ L}{\partial q^j\partial \dot{q}^i} + \frac{\partial^۲ L}{\partial t\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i}$$

در نتیجه ، میدان برداری Δ به درستی میدان دینامیکی مرتبط با سیستم اتلاف گر است که برای آن معادلات حرکت به طور موضعی به صورت زیر هستند

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = Q_i \qquad i = ۱, ..., n.$$

حال برای مشخص کردن بعضی از اصطلاحات علمی تعاریف زیر را بیان می کنیم.

۱.۱.۲ تعریف . $Y \in X(N)$ را تقارن دینامیکی Δ گوییم اگر و فقط اگر برای یک $h \in C^\infty(N)$، $[Y,\Delta] = h\Delta$.