دانشگاه شیخ‌بهایی

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی مالی

بررسی مدل‌های فرآیندهای لوی و تلاطم وابسته به زمان با توجه به داده‌های بازارهای مالی

پژوهشگر

مریم رستمی‌نیا

استاد راهنما

دکتر علی دانایی

استاد مشاور

دکتر علی رجالی

بهمن 1390

چکیده :

در این پایان‌نامه سه توزیع نامتناهی‌بار بخش‌پذیر CTS، MTS و KR معرفی شده و خصوصیات آن‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرند، سپس مدل‌هایی که بر اساس این توزیع‌ها ساخته شده‌اند، معرفی می‌شوند. مدل $CGMY$ از توزیع CTS ، مدل MTS از توزیع MTS و مدل KR از توزیع KR به دست می‌آیند. همچنین بازار پیوسته- زمان معرفی شده و مدل‌های فوق برای بازارهای مالی پیوسته-زمان تعریف شده‌اند و در نهایت این مدل‌ها برای چند سری زمانی مالی به کار می‌روند.

واژه‌های کلیدی : فرآیند لوی، مدل $CGMY$ ، مدل MTS ، مدل KR

فهرست مطالب

فهرست جداول

فهرست شکل‌ها

فصل 1

پیشگفتار

از زمانی که مندلبروت[1] [21] در سال 1963 توزیع آلفا- پایدار[2] را برای مدل کردن توزیع قیمت دارایی‌ها معرفی کرد، توزیع آلفا- پایدار تبدیل به معمول‌ترین جایگزین برای توزیع نرمال شد. قبل از آن مطالعات تجربی نشان داده بودند، که سری بازدهی‌های مالی، دم سنگین و احتمالا چولگی دارند و لذا توزیع نرمال برای آنها مناسب نیست.[14] مینتیک[3] و راچو[4] [22] در سال 2000 استفاده از توزیع‌های آلفا- پایدار را برای مدل‌های مالی توسعه دادند و آنها را در بازار، مدیریت

[1] Mandelbrot

[2] α -stable

[3] Mintik

[4] Rachev

ریسک اعتباری، قیمت‌گذاری اختیار معاملات و انتخاب سبد سرمایه به کار بردند و همان‌طور که دیده می‌شود مدل‌های مبتنی بر توزیع‌های آلفا- پایدار بیشتر از سایرمدل‌ها به کار رفته‌اند.[14]

اما مسئله‌ی مهمی که وجود دارد این است که در بسیاری موارد که شواهد تجربی مناسب بودن توزیع نرمال را رد می‌کنند، توزیع آلفا- پایدار هم مناسب نیست، چون معمولا توزیع بازدهی دارایی‌ها نسبت به توزیع نرمال دم سنگین‌تر و نسبت به توزیع آلفا- پایدار دم ظریف‌تری دارند.[14] برای حل این مشکل، حالت‌های دیگری از توزیع آلفا- پایدار پیشنهاد شدند. توزیع با حالت پایدار کلاسیک *(CTS)*[1] که در سال 1995 توسط کوپونن[2] [19]، در سال 2000 توسط بویارکنکو[3] و لوندورسکی[4] [3] و در سال 2002 توسط کار[5] و همکارانش [5] مطرح شد و توزیع با حالت پایدار اصلاح شده *(MTS)*[6] که در سال 2006 توسط کیم[7] و همکارانش [17] مطرح شد، دو مثال از این پیشنهادها هستند و یک نمونه‌ی دیگر تعمیمی از توزیع *CTS* به نام توزیع *KR*[8] است نیز که در سال 2008 توسط کیم و همکارانش [14] معرفی شده است.

[1] Classical tempered stable (CTS)

[2] Koponen

[3] Boyarchenko

[4] Levendorskii

[5] Carr

[6] Modified tempered stable (MTS)

[7] Kim

[8] Kim & Rachev (KR)

این توزیع‌ها را توزیع‌های با حالت پایدار[1] می‌نامند، که نه تنها نسبت به توزیع نرمال دم سنگین‌تری و نسبت به توزیع آلفا- پایدار دم ظریف‌تری دارند، بلکه گشتاور تمام مراتب آن‌ها است. توزیع‌های با حالت پایدار برای ساختن مدل لوی نمایی استفاده می‌شوند. اگر فرآیند استفاده شده، فرآیند CTS باشد، آن‌گاه مدل لوی نمایی[2] حاصل از آن ، مدل $CGMY$ نامیده می‌شود و اگر فرآیند استفاده شده، فرآیند MTS یا KR باشد، مدل لوی نمایی به دست آمده را به ترتیب مدل MTS یا مدل KR می‌نامند.

در فصل دوم این پایان‌نامه پیش‌نیازهای لازم، از جمله برخی توابع خاص ریاضی و متغیرها و فرآیندهای تصادفی مورد بررسی قرار گرفته‌اند، مطالبی در مورد فیلتراسیون و مارتینگل‌ها آورده شده است و در نهایت فرآیندهای لوی معرفی شده‌اند.

در فصل سوم ابتدا به معرفی بازار پیوسته- زمان پرداخته می‌شود و سپس سه فرآیند لوی CTS ، MTS و KR که فرآیندهای اصلی مورد استفاده در پایان‌نامه هستند، مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرند. خصوصیات این فرآیندها و سپس مدل‌هایی که بر اساس این سه فرآیند ساخته شده‌اند، معرفی می‌شوند، که همان مدل‌های لوی نمایی $CGMY$ ، MTS و KR برای بازارهای مالی هستند.

در فصل چهارم مدل‌های فوق مورد آزمون تجربی قرار می‌گیرند و این مدل‌ها برای داده‌های شاخص $S\&P500$ [3] در سال‌های 2006 تا 2012 به کار می‌روند و پارامترهای مربوط به هر مدل

[1] Tempered stable

[2] Exponential Levy model

[3] Standard & Poor’s 500

به روش گشتاورها و با استفاده از حل دستگاه به روش‌های عددی تخمین زده می‌شوند و سپس ، آزمون نیکویی برازش کلموگروف-اسمیرنوف برای این مدل‌ها با استفاده از تابع مشخصه‌ی تجربی انجام می‌شود. می‌توان به این نتیجه رسید که مدل‌های حاصل از توزیع‌های فوق، بهتر از توزیع نرمال به داده‌های مالی مورد بررسی برازش شده و به مراتب برای مدل‌سازی‌های مالی برای این داده‌ها بهتر عمل می‌کنند.

در نهایت مدل‌های فوق به داده‌های شاخص کل سهام ایران نیز برازش داده می‌شوند، پارامترها تخمین زده می‌شوند و در پایان نتایج حاصل در مورد داده‌های ایران مطرح خواهد شد.

برخی اثبات‌های مربوط به فصل سه به دلیل طولانی بودن و برای از دست ندادن پیوستگی مطالب، در پیوست الف خواهند آمد.

فصل 2

پیش نیازها

در این فصل پیش‌نیازهای لازم، از جمله برخی توابع خـاص ریاضـی، متغیرهـا و فرآینـدهای تصادفی مورد بررسی قرار گرفته‌اند، مطالبی در مورد فیلتراسیون و مارتینگـل‌هـا مطـرح شـده و در نهایت فرآیندهای لوی معرفی می‌شوند.

1-2 توابع خاص ریاضی

تعریف 2-1-1 (تابع گاما[1]) تابع گاما Γ را به صورت زیر تعریف می‌کنند:

$$\Gamma(p)=\int_0^{\infty} e^{-t}t^{p-1}dt \,, \qquad p>0.$$

با انتگرال‌گیری جزء به جزء می‌توان نشان داد که

$$\Gamma(p+1)=p\Gamma(p), \qquad (1.2)$$

همان‌طور که دیده می‌شود تابع Γ برای p های مثبت تعریف شده است، برای این‌که بتوان این تابع را برای p های منفی نیز تعریف کرد، رابطه‌ی (1.2) به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$\Gamma(p)=\frac{\Gamma(p+1)}{p}$$

حال هرگاه $-1<p<0$ ، آن‌گاه $0<p+1<1$ و بنابراین طبق رابطه‌ی فوق، تابع Γ برای $-1<p<0$ قابل تعریف می‌شود و به همین ترتیب برای سایر p های منفی غیرصحیح، تابع Γ تعریف می‌شود. [26]

تعریف 2-1-2 (تابع بسل اصلاح شده[2]) تابع بسل اصلاح شده‌ی نوع دوم به صورت زیر تعریف می‌شود :

---

[1] Gamma function

[2] Modified Bessel function

$$K_p(x)=\frac{\pi}{2\sin p\pi}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x/2)^{2k-p}}{k!\,\Gamma(k-p+1)}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x/2)^{2k+p}}{k!\,\Gamma(k+p+1)}\right). \qquad (2.2)$$

[1]

تعریف 2-1-3 (نماد پوکهامر[1]) برای هر عدد حقیقی a ، نماد پوکهامر به صورت زیر است :

$$(a)_n=\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)},\quad n=0,1,2,\dots . \qquad (3.2)$$

این نماد را می‌توان به صورت زیر نیز تعریف کرد:

$$(a)_0=1,\quad (a)_n=a(a+1)\dots(a+n-1),\quad n=1,2,3,\dots . \qquad (4.2)$$

[1]

تعریف 2-1-4 (تابع فوق هندسی[2]) تابع زیر را تابع فوق هندسی می‌گویند :

$$F(a,b;c;x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{x^n}{n!},\qquad |x|<1\qquad a,b,c\in\mathbb{R} \qquad (5.2)$$

لم 2-1-5 رابطه‌ی زیر برای $k=1,2,3,\dots$ برقرار است :

$$\frac{d^k}{dx^k}F(a,b;c;x)=\frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k}F(a+k,b+k;c+k;x). \qquad (6.2)$$

[1]

---

[1] Pochhammer

[2] Hypergeometric function

تعریف 2-1-6 (توابع کادلاگ[1]) برای عدد حقیقی $T>0$ یک تابع $f:[0,T]\rightarrow\mathbb{R}^d$ را کادلاگ می‌گویند، اگر در تمام نقاط $t\in[0,T]$ حد چپ آن موجود و از راست پیوسته باشد. (یعنی برای هر $t\in[0,T]$

$$f(t+)=\lim_{s\rightarrow t^+} f(s)=f(t)$$

و $f(t-)=\lim_{s\rightarrow t^-} f(s)$ موجود باشد.)

بدیهی است که هر تابع پیوسته کادلاگ است، اما توابع کادلاگ می‌توانند ناپیوسته باشند. اگر t یک نقطه‌ی ناپیوستگی باشد، *پرش[2] تابع* f در t را با $\Delta f(t)=f(t)-f(t-)$ نشان می‌دهند. [6]

2-2 متغیرها و فرآیندهای تصادفی

تعریف 2-2-1 با فرض این‌که $(\Omega,\mathcal{F})$ یک فضای اندازه‌پذیر باشد، دو اندازه احتمال $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{P}$ روی $\mathcal{F}$ معادل نامیده می‌شوند، اگر مجموعه‌های پوچ یکسانی داشته باشند. یعنی برای هر مجموعه‌ی $A\in\mathcal{F}$ ، اگر $\mathbb{P}(A)=0$، آن‌گاه $\mathbb{Q}(A)=0$ و برعکس. [18]

تعریف 2-2-2 (متغیر تصادفی) اگر $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ یک فضای احتمال و تابع $X:\Omega\rightarrow\mathbb{R}^d$، یک تابع $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ - اندازه‌پذیر باشد، آنگاه X را یک بردار تصادفی می‌گویند و در حالی که $n=1$ ،

[1] Cadlag (right-continuous with left limit)

[2] Jump

X را متغیر *تصادفی* گویند.(یادآوری می‌کنیم $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ - اندازه‌پذیری یعنی برای هر $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ، $X^{-1}(A)\in\mathcal{F}$.) [6]

تعریف 2-2-3 (امید ریاضی یک بردار تصادفی) برای بردار تصادفی $X:\Omega\to\mathbb{R}^d$ ، امید ریاضی X را انتگرال لبگ تابع X نسبت به اندازه احتمال $\mathbb{P}$ گویند (در صورت وجود)، یعنی:

$$E(X)=\int_\Omega X\,d\mathbb{P}=\int_{\mathbb{R}^d} X\,dF_X(x)$$

وقتی F_X تابع توزیع X است. در حالت یک بعدی، $F_X(x)=\mathbb{P}(X\le x)$ و برای بردار $X=(X_1 X_2 \dots X_d)$ ، با فرض این‌که $x=(x_1 x_2 \dots x_d)$ ، $F_X(x)=\mathbb{P}(X_1\le x_1,\dots,X_d\le x_d)$.

در حالت کلی برای هر تابع بورل $g:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ ، $E[g(X)]$ وقتی وجود دارد که $E|g(X)|<\infty$ و در این حالت $E[g(X)]=\int_\Omega g(X)d\mathbb{P}$.

تعریف 2-2-4 (گشتاور[1]) n- *امین گشتاور متغیر تصادفی* X ، به صورت $m_n(X)=E[X^n]$ تعریف می‌شود.

n- *امین گشتاور مرکزی* μ_n به عنوان n- امین گشتاور $X\text{-}E[X]$ تعریف می‌شود :

$$\mu_n(X)=E[(X-E[X])^n].$$

[6]

[1] Moment

تعریف 2-2-5 (تابع مولد گشتاور[1]) تابع *مولد گشتاور* بردار تصادفی X، تابع M_X است که (در صورت وجود) به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$M_X(u) = E[exp(u.X)] = \int_{\mathbb{R}^d} e^{u.X} dF_X(x) \qquad u \in \mathbb{R}^d$$

توابع مولد گشتاور ممکن است برای بعضی u ها تعریف نشده باشند، اما زمانی که تابع مولد گشتاور وجود دارد، تابع توزیع به صورتی یکتا توسط آن تعیین می‌شود. [2]

در صورت وجود تابع چگالی، *تبدیل لاپلاس* تابع چگالی، همان تابع مولد گشتاور است که در آن u را با $-u$ جایگزین می‌کنند.

تعریف 2-2-6 (تابع مشخصه[2]) *تابع مشخصه‌ی* یک بردار تصادفی $\mathbb{R}^d$ - مقدار X، تابع $\phi_X : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ است، که به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$\forall z \in \mathbb{R}^d, \quad \phi_X(z) = E\left[exp(iz.X)\right] = \int_{\mathbb{R}^d} e^{iz.x} dF_X(x)$$

وقتی که $i^2 = -1$.

تابع مشخصه‌ی یک متغیر تصادفی،توزیع آن متغیر را به طور منحصر به فردی مشخص می‌کند، یعنی دو متغیر تصادفی با تابع مشخصه‌ی یکسان، هم‌توزیع هستند. علاوه بر آن یک تابع مشخصه همیشه پیوسته یکنواخت است و در شرط $\phi_X(0) = 1$ صدق می‌کند. [2]

[1] Moment generating function

[2] Characteristic function

مزیت تابع مشخصه این است که به دلیل کرانداری تابع $e^{iz.x}$، همیشه وجود دارد. تابع مشخصه در مفاهیم غیراحتمالی *تبدیل فوریه* *تابع چگالی* (در صورت وجود تابع چگالی) نیز نامیده می‌شود.

نکته 2-2-7 اگر $(X_i, i=1,...,n)$ متغیرهای تصادفی مستقل باشند آن‌گاه تابع مشخصه‌ی $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ حاصل ضرب توابع مشخصه‌ی X_i هاست

$$\phi_{S_n}(z) = \prod_{i=1}^{n} \phi_{X_i}(z).$$

نکته 2-2-8 اگر X یک متغیر تصادفی و ϕ_X تابع مشخصه‌ی آن باشد، همان طور که گفته شد $\phi_X(0)=1$ و ϕ_X در $z=0$ پیوسته است. بنابراین در همسایگی $z=0$، $\phi_X(z) \neq 0$. پس یک تابع پیوسته‌ی یکتا ψ_X وجود دارد که در یک همسایگی صفر تعریف شده است، به طوری که

$$\psi_X(0)=0, \quad \phi_X(z) = exp[\psi_X(z)].$$

تابع ψ_X *تابع مولد تجمعی*[1] یا تابع مشخصه‌ی لگاریتمی نامیده می‌شود.

تعریف 2-2-9 *انباشتک‌ها*[2] یا *نیم- ناورداها*[3] به این صورت تعریف می‌شوند:

$$c_n(X) = \frac{1}{i^n} \frac{\partial^n \psi_X}{\partial u^n}(0).$$

با توجه به تعاریف گذشته

---

[1] Cumulant generating function

[2] Cumulant

[3] Semi-invariant

$$c_1(X) = m_1(X) = EX,$$
$$c_2(X) = \mu_2(X) = m_2(X) - m_1(X)^2 = Var(X),$$
$$c_3(X) = \mu_3(X) = m_3(X) - 3m_2(X)m_1(X) + 2m_1(X)^3,$$
$$c_4(X) = \mu_4(X) - 3\mu_2(X).$$

همچنین

$$s(X) = \frac{c_3(X)}{[c_2(X)]^{3/2}}, \qquad k(X) = \frac{c_4(X)}{[c_2(X)]^2}.$$

$s(X)$ ضریب چولگی[1] X نامیده می‌شود، اگر $s(X) > 0$ ، می‌گویند X دارای چولگی مثبت است و اگر $s(X) < 0$، می‌گویند X چولگی منفی دارد. $k(X)$ کشیدگی[2] X نامیده می‌شود و اگر $k(X) > 0$، می‌گویند X کشیده یا سنگین- دم است.

نکته 2-2-10 تابع مولد تجمعی مجموع متغیرهای مستقل برابر مجموع توابع تجمعی آنهاست، اگر $(X_i, i = 1...n)$ متغیرهای تصادفی مستقل باشند و $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ آن‌گاه [6]

$$\psi_{S_n}(z) = \sum_{i=1}^{n} \psi_{X_i}(z).$$

تعریف 2-2-11 (نامتناهی بخش پذیر[3]) یک توزیع احتمال F روی $\mathbb{R}^d$ *نامتناهی بخش‌پذیر* است اگر برای هر عدد صحیح n ، یک توزیع F_n وجود داشته باشد به طوری که $F = F_n^{*n}$. وقتی که G^{*n}توزیع پیچش n تایی تابع توزیع G است. به عبارت دیگر یک متغیر تصادفی X با توزیع F ،

---

[1] Skewness

[2] Kurtosis

[3] Infinity divisible (ID)

نامتناهی بار بخش‌پذیر است، اگر و فقط اگر برای هر n، بتوان آن را به عنوان توزیع مجموع $X \overset{d}{=} X_{1,n} + ... + X_{n,n}$ نوشت، وقتی که $X_{i,n}$ ها متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکسان F_n باشند. ($\overset{d}{=}$ به معنی برابری در تابع توزیع است.) [7]

همچنین F نامتناهی بار بخش‌پذیر است، اگر و فقط اگر برای هر n، ریشه‌ی n ام تابع مشخصه‌ی F، خود تابع مشخصه‌ی یک متغیر تصادفی باشد. [24]

تعریف 2-2-12 (فرآیند تصادفی) یک خانواده‌ی $\{ X_t \}_{t\in T}$ از متغیرهای تصادفی روی یک فضای احتمال $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ را که با پارامترهای $t \in T$ اندیس‌گذاری شده‌اند، *فرآیند تصادفی* می‌نامند. T می‌تواند یک مجموعه‌ی گسسته (شمارا) یا پیوسته باشد. t را معمولا پارامتر زمان می‌نامند. [4]

تعریف 2-2-13 (مسیر نمونه[1]) اگر $\{ X_t \}_{t\in T}$ یک فرآیند تصادفی باشد، برای یک عضو $\omega_0 \in \Omega$، تابع $t \to X_t(\omega_0)$ *مسیر نمونه‌ی* مربوط به ω_0 نامیده می‌شود. [6]

2-3 فیلتراسیون و مارتینگل

در یک موضوع پویا، با گذشت زمان اطلاعات بیشتری برای مشاهده کننده آشکار می‌شود، به همین دلیل کمیت‌هایی که در زمان $t = 0$ تصادفی هستند، ممکن است در یک زمان بعد $t > 0$، دیگر تصادفی نباشند ومقدار آنها با داشتن اطلاعات تا زمان t مشخص شود. بنابراین باید عناصری

[1] Sample path

وابسته به زمان به ساختار فضای احتمال $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ اضافه شود که این ویژگی پویایی را مدل کند. این ویژگی معمولا توسط مفهوم فیلتراسیون مدل می‌شود.

تعریف 2-3-1 (فیلتراسیون) یک *فیلتراسیون* روی فضای احتمال $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$، یک خانواده‌ی صعودی از زیر σ - جبرهای $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ از $\mathcal{F}$ است که برای هر $0\le s\le t$، $\mathcal{F}_s\subseteq\mathcal{F}_t\subseteq\mathcal{F}$. [6]

یک پیشامد $A\in\mathcal{F}_t$ پیشامدی است که مشاهده کننده با داشتن اطلاعات $\mathcal{F}_t$ در زمان t می‌تواند تشخیص دهد که این پیشامد اتفاق افتاده است یا نه. به طور مشابه یک متغیر تصادفی $\mathcal{F}_t$ - اندازه پذیر، یک متغیر تصادفی است که مقدارش در زمان t آشکار می‌شود. فرآیندی را که مقدارش در زمان t با اطلاعات $\mathcal{F}_t$ آشکار می‌شود، فرآیند غیر درگیر[1] با $\{\mathcal{F}_t\}$ گویند.

تعریف 2-3-2 (سازگاری[2]) یک فرآیند تصادفی $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ را *نسبت به ساختار اطلاعاتی* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ غیر درگیر یا $\mathcal{F}_t$ - *سازگار* گویند، اگر برای هر $t\in[0,T]$ مقدار X_t در زمان t آشکار شود، یعنی متغیر تصادفی X_t، $\mathcal{F}_t$ - اندازه‌پذیر باشد. [6]

اگر مشاهدات موجود تنها شامل مقادیر فرآیند تصادفی X باشند، آن‌گاه اطلاعات توسط فیلتراسیون طبیعی X ارائه می‌گردد که ذیلا تعریف می‌شود.

تعریف 2-3-3 (فیلتراسیون طبیعی) *فیلتراسیون طبیعی* فرآیند X عبارت است از ، فیلتراسیون $\{\mathcal{F}_t^X\}_{t\in[0,T]}$است که در آن $\mathcal{F}_t^X$، σ - جبر تولید شده توسط مقادیر گذشته‌ی فرآیند است

[1] Nonanticipating process

[2] Adaptability