بسم الله الرحمن الرحيم

وزارت علوم، تحقیقات فناوری

دانشگاه تفرش

دانشکده ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

عدد تعیین کننده در گراف‌های خاص

استاد راهنما:

دکتر دوستعلی مژده

دانشجو:

فاطمه زینلی

مهر ۹۰

تقدیم به آفتاب همیشه گرما بخش

پدرم

و

حیات همیشه هستی بخش

مادرم

خدایا

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ

بر بی ثمری لحظه ای که برای زیستن گذشته است حسرت نخورم

و مردنی عطا کن که بر بیهودگی اش سوگوار نباشم

بگذار تا آن را من خود انتخاب کنم

اما آنچنان که تو دوست داری

چگونه زیستن را تو به من بیاموز

چگونه مردن را من خود خواهم آموخت.

دکتر علی شریعتی

سپاسگزاری

شناخت مجهولات را آنچنان دریایی یافتم که وسعتش جز حیرانیم نیفزود. تو تنها می توانی آنگونه باشی که زیستن در آن جز زندگیت نباشد.

بر خود لازم می دانم از حضور استاد ارجمند جناب آقای دکتر مژده که از آغاز تا انجام این مسیر مرا مورد راهنمایی های علمی و معنوی خویش قرار دادند، کمال سپاس و قدر دانی را داشته باشم.

و در پایان از همیاری صمیمانه دوست عزیزم، خانم مینا منصوری کمال سپاس را دارم.

چکیده

در تعیین عدد تعیین کننده در رنگ‌آمیزی رأسی یک گراف، هدف یافتن کمترین تعداد رأس است، طوریکه رأس‌های باقیمانده با ترتیبی خاص به اجبار رنگ بگیرند.

با توجه به گسترده و متنوع بودن انواع گراف‌ها در این پایان نامه عدد تعیین کننده را در برخی از گراف‌های خاص مانند: گراف‌های هرری، حاصلضرب، منتظم، میشل اسکی، چرخشی و تقسیم بررسی می‌کنیم.

در پایان، رنگ‌آمیزی جدید به نام رنگ‌آمیزی ستاره‌ای ارائه و عدد رنگی و تعیین کننده را در رنگ‌آمیزی ستاره‌ای تعدادی گراف‌های خاص مطالعه می‌کنیم.

کلمات کلیدی: رنگ‌آمیزی،مجموعه تعیین کننده، عدد تعیین کننده، رنگ‌آمیزی ستاره‌ای، عدد رنگی ستاره‌ای، مجموعه تعیین کننده ستاره‌ای، عدد تعیین کننده ستاره‌ای.

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

عنوان | صفحه

پیشگفتار

اولین نتیجه‌های بدست آمده در مورد رنگ‌آمیزی گراف، از تلاش‌های انجام شده بر روی گراف‌های مسطح برای حل مسأله رنگ‌آمیزی نقشه بدست آمد. در آن زمان فرانسیس گاتری[1] ادعا کرد که رنگ‌آمیزی نقشه ایالت‌های مختلف بریتانیا روی نقشه، به‌طوری که هیچ دو ایالت مجاوری همرنگ نشوند، می‌تواند با ۴ رنگ انجام شود(شرط کافی). برادر گاتری این مسأله را برای معلم ریاضی خود آگوست دمورگان[2]، در دانشگاه فرستاد. دمورگان، این مسأله را در سال ۱۸۲۵ میلادی در نامه‌ای که به ویلیام همیلتون[3] نوشت، مطرح کرد .در سال ۱۸۷۹ آرتور کایلی[4] این مسأله را در انجمن ریاضی شهر لندن مطرح کرد. در همان سال آلفرد کمپ[5]، نتایج بدست آمده را منتشر کرد و برای یک دهه تصور می‌شد این مسأله حل‌شده‌است. برای تلاش‌های کمپ در این زمینه او به عنوان یکی از اعضای جامعه سلطنتی و بعدها به عنوان ریاست انجمن ریاضی شهر لندن انتخاب شد.

رنگ‌آمیزی ٤ رنگه نقشه ایالات متحده (بدون در نظر گرفتن آبها، کشورهای همسایه و متن نام ایالت‌ها)

بعدها هیوود[6]، ادعا کرد که استدلال کمپ اشتباه بوده‌است و اثبات این مسأله را برای ۵ رنگ منتشر کرد. در قرن معاصر تلاش‌های زیادی برای اثبات روش‌های رنگ‌آمیزی نقشه با تعداد ۴ رنگ صورت گرفته است که در نهایت در سال ۱۹۷۶ توسط کنت اپل[7] وولفگانگ هاکن[8] این مسأله به کمک ایده‌های خود هیوود و کمپ انجام شد، که در آن زمان به دلیل استفاده از کامپیوتر برای اثبات مسأله، مورد قبول واقع نشد.

---

[1] *Francis Guthrie*
[2] *Augustus de Morgan*
[3] *William Hamilton*
[4] *Arthur Cayley*
[5] *Alfred Kempe*
[6] *Heawood*
[7] *Kenneth Appel*
[8] *Wolfgang Haken*

رنگ‌آمیزی گراف از اوایل دهه ۷۰ به عنوان یک مسأله الگوریتمی مورد بررسی قرار گرفته‌است، به‌طوری که جزء یکی از ۲۱ مسأله NP-Complete که کارپ[۹] معرفی کرد، قرار گرفته‌است.

در این پایان نامه مجموعه تعیین کننده در رنگ‌آمیزی گراف‌ها بررسی شده است. مفهوم مجموعه تعیین کننده اولین بار توسط دکتر محمودیان[۱۰] در سال ۱۹۹۵ مطرح شد.طبق تعریف رنگ‌آمیزی، مجموعه تعیین کننده برای $k < \chi(G)$ تعریف نشده است و برای $k > \Delta(G) + ۱$، $d(G,k) = |V(G)|$ است. بنابراین مقدار $d(G,k)$ برای $\chi(G) \leq k \leq \Delta(G) + ۱$ غیر بدیهی است.

این پایان نامه دارای ۵ فصل می‌باشد.

فصل اول: "تعاریف و قضایای مقدماتی"؛ در این فصل مفاهیم و تعاریف مهم و مورد استفاده در فصل‌های بعدی بیان می-شود.

فصل دوم: "عدد تعیین کننده در گراف‌های هرری و حاصلضرب دکارتی"؛ مفهوم رنگ‌آمیزی و عدد تعیین کننده در این گراف‌ها بررسی می‌شود.

فصل سوم: " عدد تعیین کننده در تعدادی از گراف‌های خاص و چرخشی و تقسیم".

فصل چهارم: عدد تعیین کننده در رنگ‌آمیزی رأسی گراف‌های منتظم"؛ طیف رنگی عدد تعیین کننده در گراف‌های منتظم بیان می‌شود و عدد تعیین کننده در تعدادی از گراف‌های r –منتظم k –رنگی ($r \neq k$)، مطالعه و در پایان کران بالا و پایین در طیف تعیین کننده‌ی گراف‌های منتظم بررسی می‌شود.

فصل پنجم: "رنگ‌آمیزی ستاره‌ای و اثبات قضیه‌ای از گراف‌های هرری"؛ این فصل شامل ارائه‌ی مفهومی جدید در رنگ‌آمیزی است که آن را رنگ‌آمیزی ستاره‌ای نامیده‌ایم. عدد رنگی و عدد تعیین کننده در رنگ‌آمیزی ستاره‌ای در تعدادی از گراف‌های خاص تحقیق و اثبات شده است. در پایان عدد تعیین کننده در گراف هرری $H_{۳,۲n+۱}$ اثبات شده است.

---

[۹] *Karp*

[۱۰] *Mahmoodian*

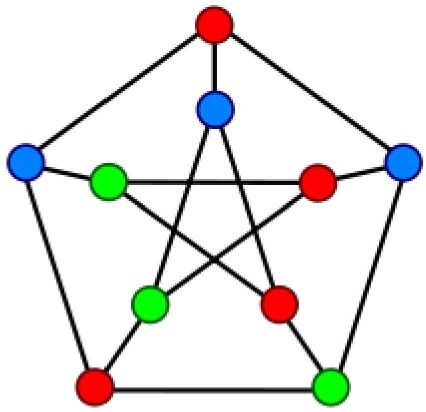
فصل اول

تعاریف و قضایای مقدماتی

۱-۱ مقدمه

در این فصل ابتدا برخی تعاریف، مفاهیم و قضایای مهم مربوط به رنگ‌آمیزی گراف[۱۱] و مجموعه تعیین کننده[۱۲] را به اختصار معرفی می‌کنیم. هدف ما ارائه روابطی است که در آن عدد تعیین کننده در تعدادی از گراف‌های خاص مشخص شود.

تعریف ۱-۱-۱: k_ رنگ‌آمیزی گراف G برچسب گذاری تابع رنگ‌آمیزی $f: V(G) \to T$ است که در آن $|T| = k$ و آن را یک رنگ‌آمیزی واقعی گوییم هر گاه رأس‌های مجاور رنگ‌های متفاوت داشته باشند. گراف G را k-رنگ‌پذیر گوییم اگر k-رنگ پذیر واقعی باشد. عدد χ کمترین مقدار k است طوریکه گراف k_رنگ پذیر باشد.



شکل(۱-۱) رنگ‌آمیزی گراف پترسن با ۳ رنگ(کمترین تعداد رنگ ممکن).

تعریف ۱-۱-۲: فرض کنید $\chi(G) \leq k \leq |V(G)|$
مجموعه $S \subseteq V(G)$ با یک تخصیص رنگ به آن، را مجموعه تعیین کننده رنگ‌آمیزی رأسی G گوییم، هرگاه بسطی یکتا از S به k-رنگ‌آمیزی رأس‌های G موجود باشد. [۳, ۵, ۶, ۹, ۱۲, ۱۳]

تعریف ۱-۱-۳: مجموعه تعیین کننده با مینیمم اندازه، مجموعه تعیین کننده مینیمم است و اندازه آن را عدد تعیین کننده[۱۳] گوییم و با $d(G,k)$ نشان می‌دهند.

---

[۱۱] *Graph coloring*
[۱۲] *Defining set*
[۱۳] *Defining number*

تعریف ۱-۱-٤ : فرض کنید G یک گراف با n رأس باشد. مجموعه تعیین کننده $S(|S|=s)$ با یک تخصیص رنگ در گراف G، را مجموعه تعیین کننده قوی[۱۴] رنگ‌آمیزی رأسی G می‌نامیم اگر یک مجموعه مرتب از رأس‌های $\{v_1, v_2, \dots, v_{n-s}\}$ موجود باشد به‌طوریکه درلیست القا شده رنگ‌ها در هر یک از زیرگراف های

$$< G-S >, < G-S \cup \{v_1\} >, \dots, < G-S \cup \{v_1, v_2, \dots, v_{n-s}\} >$$

حداقل رأسی متعلق به لیست رنگ‌ها از اندازه ۱ موجود باشد. عدد تعیین کننده قوی[۱۵] $sd(G,k)$ از گراف G اندازه‌ی کوچکترین مجموعه‌ی تعیین کننده قوی است.[۱۳]

تعریف ۱-۱-۵: فرض کنید G و H دو گراف باشند، هر کدام با $\chi(G)=k$ رنگ، رنگ‌آمیزی شده اند، آنگاه اتصال رنگی[۱۶] G و H با $G \vee^z H$ نشان داده می‌شود و گرافی است که $V(G \vee^z H)$، اجتماع $V(G)$ و $V(H)$ است و $E(G \vee^z H)$، اجتماع $E(G)$ و $E(H)$ با هم و با مجموعه‌ی

$\{\{x,y\} | x \in V(G), y \in V(H)\ s.t\ f(x) \neq f(y)\}$ است.[۵]

قضیه ۱-۱-۶: اگر G یک گراف همبند به‌جز گراف‌های دور فرد و کامل باشد، آنگاه $\chi(G) \le \Delta(G)$، که $\Delta(G)$، بزرگترین درجه رأس‌های گراف G است این قضیه به قضیه بروک[۱۷] معروف است.

لم ۱-۱-۷: فرض کنید H زیر گرافی از G باشد به‌طوریکه $\chi(G)=\chi(H)$. اگر مجموعه رأس‌های $V(H)$ با هر رنگ‌آمیزی، یک مجموعه تعیین کننده برای G باشد، آنگاه هر مجموعه تعیین کننده H ، یک مجموعه تعیین کننده برای G است. [۱۶]

تعریف ۱-۱-۸ : فرض کنید G یک گراف k _رنگی و S یک مجموعه تعیین کننده برای G باشد، آنگاه زیر مجموعه‌ی $F(S)$ از یال‌ها، یال‌های غیر ضروری نامیده می‌شود، اگر عدد رنگی $G-F(S)$ (گراف بدست آمده از G با حذف یال‌های موجود در $F(S)$)، هنوز k باشد و S یک مجموعه تعیین کننده برای $G-F(S)$ باشد. [۶]

تعریف ۱-۱-۹ : فرض کنید G گرافی با c-رنگ‌آمیزی خاص با k رنگ باشد، آنگاه مکمل رنگی[۱۸] G با $\widetilde{G_c}$ یا $\tilde{G}$ نشان داده می‌شود. در مواردی، $\tilde{G}$ زیر گراف مولد $\bar{G}$ (مکمل G) است به‌طوریکه

$$E(\widetilde{G_c}) = E(\bar{G}) - \{uv | f(u) = f(v)\}$$

۱-۲ رنگ آمیزی لیستی[۱۹]

تعریف ۱-۲-۱: فرض کنید G یک گراف دلخواه باشد و $L(v)$ لیست رنگ‌های موجود برای رأس v در گراف G باشد. رنگ‌آمیزی لیستی از مجموعه لیست‌های داده شده، یک c -رنگ‌آمیزی خاص در G است طوریکه رنگ رأس v یعنی $f(v)$ در $L(v)$ موجود باشد. رنگ‌آمیزی رأسی نزدیک به مفهوم رنگ‌آمیزی لیستی گراف است.

---

۱٤ *Strong defining set*
۱٥ *Strong defining number*
۱٦ *Chromatic join*
۱۷ *Brook's Theorem*
۱۸ *Chromatic complement*
۱۹ *List coloring*

تعریف ۱-۲-۲ : گراف G با n رأس به طور یکتا ۲_لیستی رنگ پذیر نامیده می‌شود، اگر لیستی از رنگ‌ها از اندازه ۲ مانند $S_۱, S_۲, S_۳, \dots , S_n$ روی رأس‌های آن وجود داشته باشد به‌طوریکه از این مجموعه لیست رنگ‌ها، رنگ‌آمیزی یکتا برای گراف G موجود باشد.

قضیه ۱-۲-۳ : گراف همبند G، به طور یکتا ۲_لیست رنگ پذیر است اگر و فقط اگر حداقل یکی از بلوک‌های آن یک دور یا گراف کامل یا گراف دو بخشی کامل نباشد. [۵]

۱-۳ حاصلضرب دکارتی[۲۰] دو گراف

تعریف ۱-۳-۱: فرض کنید G و H دو گراف باشند، حاصلضرب دکارتی $G \times H$، گرافی است که در آن داریم:

$$V(G \times H) = W \times V = \{(w, v) | w \in W \,, v \in V\}$$

$$E(G \times H) = \{(w_۱, v_۱), (w_۲, v_۲) | w_۱ \overset{H}{\leftrightarrow} w_۲, v_۱ = v_۲ \text{ یا } w_۱ = w_۲ \,, v_۱ \overset{G}{\leftrightarrow} v_۲\}$$

در این صورت داریم: $\left|V(G \times H)\right| = |v||G|$ و $|E(G \times H)| = |w|.|E(G)| + |v|.|E(H)|$.

۱-۴ تعریف برخی از گراف‌های خاص

تعریف ۱-۴-۱: گراف هرری[۲۱] $H_{m,n}$

این گراف‌ها به ۳ نوع تقسیم می‌شوند:

فرض کنید $m \leq n$. ابتدا n رأس را در یک دور قرار می‌دهیم.

نوع اول: اگر m زوج باشد، گراف $H_{m,n}$ از مجاور شدن هر رأس با $\frac{m}{۲}$ رأس قبلی و $\frac{m}{۲}$ رأس بعدی آن به دست می‌آید.

نوع دوم: اگر m فرد و n زوج باشد. هر رأس را با $\frac{(m-۱)}{۲}$ رأس قبل و بعد آن مجاور می‌کنیم. یعنی ابتدا $H_{m-۱,n}$ را رسم می‌کنیم، سپس هر رأس i را به $i + \frac{n}{۲}$ وصل می‌کنیم. در نوع اول و دوم $H_{m,n}$ منتظم است.

نوع سوم: اگر m و n هر دو فرد باشند. ابتدا گراف $H_{m-۱,n}$ را رسم می‌کنیم، سپس هر رأس i را به رأس $i + \frac{(n-۱)}{۲}$ به هنگ n وصل می‌کنیم. [۱۴]

تعریف ۱-۴-۲ : [۱۵] فرض کنید G یک گراف با مجموعه رأس‌های $V = \{v_۱, v_۲, \dots , v_n\}$ باشد. گراف $M(G)$، گراف میشل اسکی[۲۲] G نامیده می‌شود و آن را به این ترتیب می‌سازیم:

$$W = V(M(G)) = \{v_۱, v_۲, v_۳, \dots , v_n, u_۱, \dots u_n, w\}$$

$$V(G) \cap \{u_۱, u_۲, \dots , u_n, w\} = \phi$$

که $|W| = ۲|V| + ۱$ و یال‌های آن به صورت زیر می‌باشد.

---

[۲۰] *Cartesian product*
[۲۱] *Harary graph*
[۲۲] *Mycielski's construction*

$$E(M(G)) =$$

$$E(G) \cup \{u_i v | v \in N_G(v_i), ۱ \leq i \leq n\} \cup \{wu_i | ۱ \leq i \leq n\}$$

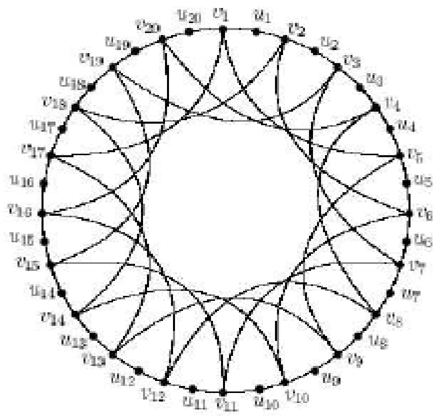
قضیه ۱-٤-۳ : اگر G گراف c-رنگ پذیر بدون مثلث باشد آنگاه ساختار میشل اسکی آن $c+۱$-رنگ پذیر و بدون مثلث است.[۱۵]

تعریف ۱-٤-٤ : گراف چرخشی[۲۳] $G = C_{n+۱} < ۱, m >$ گرافی است با مجموعه‌ی رأس‌های $\{v_۱, v_۲, \ldots, v_{n+۱}\}$ و مجموعه‌ی یال‌های

$$\{v_i v_{i+j(mod\ n+۱)} | i \in \{۱,۲, \ldots, n+۱\}, j \in \{۱, m\}\}$$

شرط لازم برای آنکه گراف G چرخشی باشد آن است که گراف همبند باشد. [۱]

تعریف ۱-٤-۵: منظور از یک زیر تقسیم یا مشتق از یک یال uv در گراف G عبارت است از حذف یال uv از G و اضافه کردن دو یال uw و wv به G. (به عبارت دیگر یک رأس جدید بین دو رأس u و v قرار می‌گیرد.)



شکل(۱-۲) گراف تقسیم G' بدست آمده از G

اگر G یک گراف دلخواه باشد و G' از زیر تقسیم یک یال از G بدست آید، می‌گوییم G' یک مشتق ابتدایی از G است. اگر G' از زیرتقسیم چند یال از G بدست آید، آنگاه G' را مشتق از G با چند مرحله از مشتق ابتدایی گویند.[۱]

تعریف ۱-٤-۶: مجموعه دورهای گراف G' را مستقل گوییم اگرمجموع آن دورها هر یک، رأس مجزا و یال مجزا باشند و هیچ یالی بین رأسی از یک دور با رأسی از دور دیگر مشترک نباشد.[۱]

۱-۵ طیف تعیین کننده[۲٤] در گرافهای منتظم[۲۵]

تعریف ۱-۵-۱ : [۸] فرض کنید $\mathcal{F}$ یک خانواده از گراف‌های k_منتظم باشد و هر گراف G در $\mathcal{F}$ با c رنگ، رنگ شده باشد، آنگاه

$$Spec_c(\mathcal{F}) = \{d | \exists G \in \mathcal{F}, d(G,c) = d\}$$

---

[۲۳] *Circulate graph*
[۲٤] *Defining spectrum*
[۲۵] *Regular graphs*

طیف تعیین کننده‌ی $\mathcal{F}$ است. هنگامی که c در گراف بدیهی باشد آن را از اندیس $Spec$ برمی‌داریم. کلاس‌های زیر به طور طبیعی، کلاس‌های گراف‌های منتظم هستند و در فصل چهار، $Spec_c$ را در خانواده‌های زیر بررسی می‌کنیم.

۱) $\mathcal{F}_v^{<k}(\mathcal{F}_v'^{<k})$: همه‌ی گراف‌های k_منتظم (k_منتظم همبند) روی v رأس با $\chi(G) < k$.

۲) $\mathcal{F}_v^{\leq k}(\mathcal{F}_v'^{\leq k})$: همه‌ی گراف‌های k_منتظم (k_منتظم همبند) روی v رأس با $\chi(G) \leq k$.

۳) $\mathcal{F}_v^{k}(\mathcal{F}_v'^{k})$: همه‌ی گراف‌های k_منتظم (k_منتظم همبند) روی v رأس با $\chi(G) = k$.

۴) $\mathcal{F}_v^{k*}(\mathcal{F}_v^{k*})$: همه‌ی گراف‌های $k - ۱$_منتظم ($(k - ۱)$_منتظم همبند) روی v رأس با $\chi(G) = k$

فصل دوم

عدد تعیین کننده در گراف‌های هرری و گراف‌های حاصلضرب دکارتی

۲-۱ تعیین عدد رنگی در تعدادی از گراف‌های هرری

با مفهوم گراف هرری درقسمت ۱-۴-۱ فصل اول آشنا شدیم. در این فصل ابتدا عدد رنگی برخی از گراف‌های هرری را بیان می‌کنیم. از آنجاییکه هدف ما در این پایان‌نامه بررسی عدد تعیین کننده می‌باشد، بنابراین برای اثبات لم‌ها و قضایای این بخش به مرجع [۱۴] رجوع شود.

لم ۲-۱-۱: فرض کنید $H = H_{۲m,n}$ یا $H = H_{۲m+۱,n}$ و $m \geq ۲$ آنگاه:

$(i$

$$\chi(G) \geq \begin{cases} m+۲ & \text{اگر } m+۱ \nmid n \\ m+۱ & \text{اگر } m+۱ | n \end{cases}$$

$\chi(H_{۳,۲n}) \geq ۳$ $(ii$

گزاره ۲-۱-۲: برای هر $n = (m+۱)k + r$ و $k \geq r$ داریم:

$$\chi(H_{۲m,n}) = \begin{cases} m+۱ & \text{اگر } r = ۰ \\ m+۲ & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

طبق مرجع [۸] داریم: اگر $n \geq m(m+۱)$ آنگاه

$$\chi(H_{۲m,n}) = \begin{cases} m+۱ & \text{اگر } m+۱|n \\ m+۲ & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

حال $\chi(H_{۲m,n})$ را برای $n < m(m+۱)$ تعیین می‌کنیم:

گزاره ۲-۱-۳: اگر $n = m(m+۱) - t$ و $۲ \leq t \leq m$ آنگاه

$$\chi(H_{2m,n}) = m + 2.$$

لم ۲-۱-۴: برای $m \geq 2$ داریم:

$$\chi(H_{2m,3m+2}) = \left\lceil \frac{3m+2}{2} \right\rceil$$

گزاره ۲-۱-۵: برای هر $n \geq m+1$ داریم:

$$\chi(H_{2m+1,2n}) = \begin{cases} m+1 & \text{اگر } 2n = (m+1)t \text{ و } t \text{ فرد باشد} \\ m+2 & \text{اگر } 2n = (m+2)t \text{ و } t \text{ فرد باشد و } t \nmid m+1 \end{cases}$$

نتیجه ۲-۱-۶: اگر $2n = (m+1)(m+2)t$ طوریکه t و m هر دو فرد باشد، آنگاه:

$$\chi(H_{2m+1,2n}) = m + 1$$

گزاره ۲-۱-۷: اگر $n = (m+1)k + r$ که $1 \leq r \leq m$ آنگاه $\chi(H_{2m+1,2n}) = m+1$ اگر و فقط اگر m فرد باشد و $r = \frac{m+1}{2}$.

گزاره ۲-۱-۸: برای هر $n \geq 2$ داریم $\chi(H_{3,2n+1}) = 3$.

گزاره ۲-۱-۹: اگر $n \nmid m+1$ آنگاه:

$$\chi(H_{2m+1,2n+1}) = \begin{cases} m+2 & \text{اگر } m \text{ زوج باشد و } n \equiv \frac{m}{2} (mod\ m+2),\ n \not\equiv \frac{m}{2} (mod\ m+1) \\ m+2 & \text{اگر } m \text{ فرد باشد و } n \equiv \frac{m+1}{2} (mod\ m+2) \\ m+1 & \text{اگر } m \text{ زوج باشد و } n \equiv \frac{m}{2} (mod\ m+1) \end{cases}$$

۲-۲ عدد تعیین کننده در تعدادی از گرافهای هرری

گزاره ۲-۲-۱: اگر $n \equiv 1 (mod\ m+1)$، آنگاه $d(H_{2m,n}) \leq m + \left\lfloor \frac{(n-m)}{(m+1)} \right\rfloor$

اثبات:

مجموعه S و تابع رنگ‌آمیزی f را به صورت زیر در تعیین می‌کنیم:

$$S = \{1,2,\dots,m\} \cup \{i(m+1)+m \mid 1 \leq i \leq k-1\}$$

$$f(i) = i (1 \leq i \leq m), f(i(m+1)+m) = \begin{cases} m+1 & \text{اگر } i \text{ فرد باشد} \\ m+2 & \text{اگر } i \text{ زوج باشد} \end{cases} \quad (1 \leq i \leq k-1)$$

در نظر می‌گیریم، s یک مجموعه تعیین کننده برای $H_{2m,n}$ است، زیرا از S، ما نتیجه می‌گیریم :