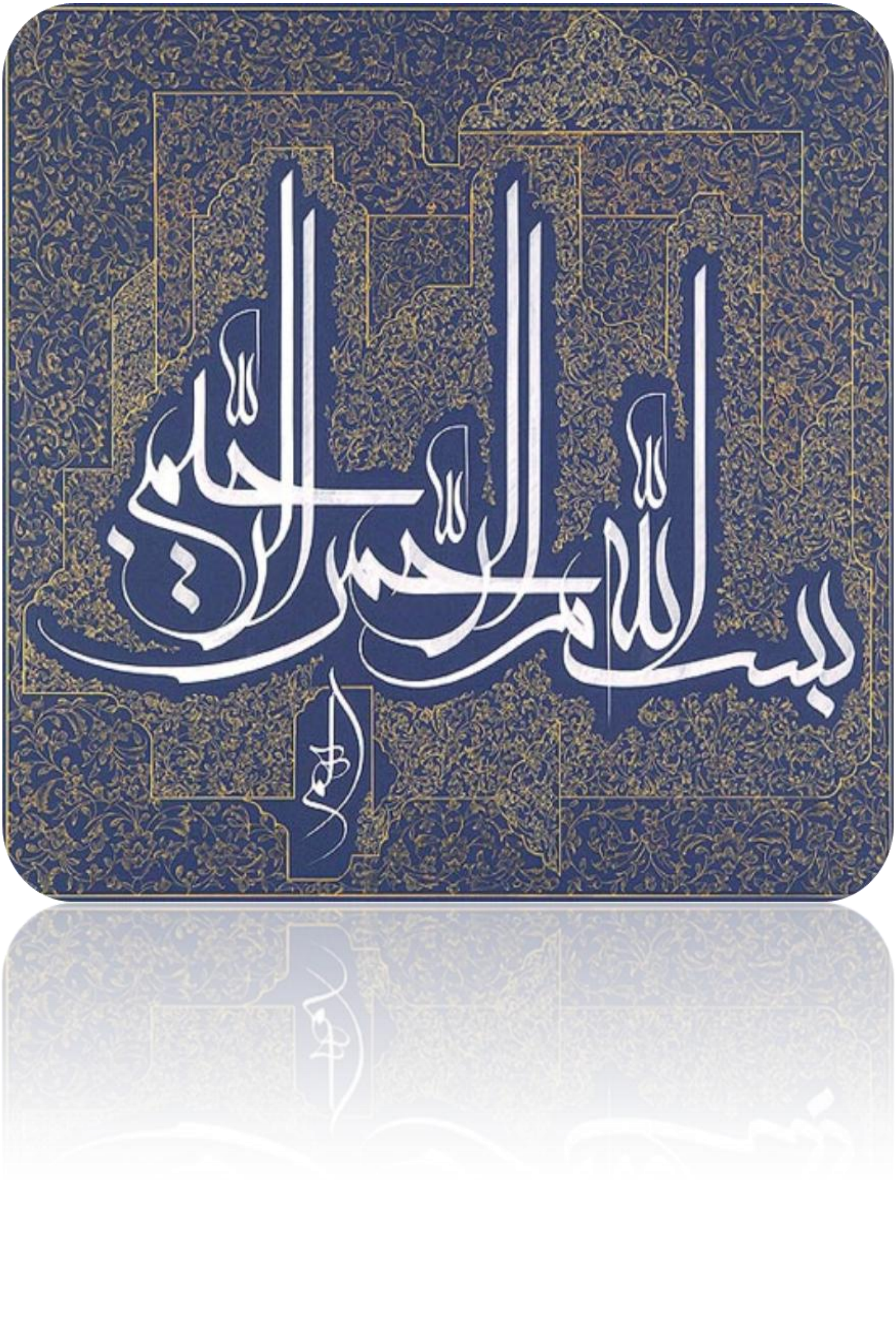
بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه‌لرستان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

عنوان پایان نامه:

یک روش مانده مینیمال برروی رده خاصی از دستگاه‌های خطی باماتریس ضرایب نرمال

نگارنده:

بابک فرازمندنیا

استاد راهنما:

دکتر مجتبی‌قاسمی‌کمالوند

استاد مشاور:

دکتر علی‌بارانی

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی کاربردی

گرایش جبرخطی عددی

شهریور ماه ۱۳۹۲

الهی

در وادی آگاهی، دست نیرومند تو هدایتگر شد، هم آمدنم را، هم رفتنم را. تو در لحظه لحظه‌هایم جا گرفته که نه، من در لحظه لحظه‌هایت جای دارم. گامم را صلابت بخشیدی و چه خوب می‌دانم هرکجا نتیجه‌ای امیدبخش به بار نشسته، ردپای مهر تو برجاست و من دنباله‌رویی بیش نیستم و مگر می‌شود بی مدد تو. سپاسم را چگونه در آغوشت رها کنم که ذره بودنم در برابر دریا بودنت، هویدا نشود. مگر نه اینکه رسالتم جز بر این بوده که ذره ذره‌ها را جستجو کنم تا بنمایم ذره‌ای هستم در برابر تو، از تو مدد می‌گیرم و تو را سپاس می‌گویم.

پیشکش به:

به‌پاس تعبیر عظیم و انسانیشان از کلمه ایثار و از خودگذشتگی

به پاس گرمای امیدبخش وجودشان که دراین‌سردترین روزگاران‌بهترین‌پشتیبان‌است

به پاس قلبهای بزرگشان که فریادرس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می‌گراید

و به پاس محبت‌هایی که هرگز فروکش نمی‌کند

این مجموعه را به‌پدر و مادر عزیزم تقدیم می‌کنم.

تقدیر و تشکر

حمد و سپاس مخصوص پروردگاری است که بشر را آفرید و به او قدرت اندیشیدن و توانایی‌های بالقوه عطا نمود و آدمی را امر به تلاش و کوشش نمود و راهنمایانی را برای هدایت انسان فرستاد.

پس از ارادت خاضعانه به درگاه خدای بزرگ، بر خود واجب می‌دانم از استاد علم و اخلاق جناب آقای دکتر مجتبی قاسمی کمالوند که به عنوان استاد راهنما در تهیه این پژوهش بنده را یاری نمودند تشکر و قدردانی نمایم. همچنین از آقای دکتر علی بارانی به عنوان استاد مشاور و آقای دکتر بهمن غضنفری که زحمت داوری این پایان نامه را عهده‌دار شدند سپاس و قدردانی نموده، موفقیت و سلامت همه عزیزان را از درگاه یزدان پاک خواستارم.

چکیده

نام خانوادگی: فرازمندنیا نام: بابک

عنوان پایان نامه: یک روش مانده مینیمال برروی رده‌خاصی‌از دستگاه‌های‌خطی‌باماتریس‌ضرایب نرمال

استاد راهنما: دکتر مجتبی قاسمی کمالوند استاد مشاور: دکتر علی بارانی

درجه تحصیل: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی (گرایش جبرخطی عددی)

محل تحصیل: دانشگاه لرستان دانشکده: علوم پایه

تاریخ فارغ التحصیلی: شهریورماه ۹۲ تعداد صفحه: ۱۰۴

کلید واژه: ماتریس‌های نرمال، روش $MINRES-N$، روش $MINRES-N۲$، روش $MINRES-N۳$، روش $MINRES-Nk$، طیف.

چکیده: روش های مانده‌ای دسته‌ای از روش های تکراری می باشند که جهت حل سیستم‌های معادلات خطی با ماتریس ضرایب تنک و بزرگ بکار می‌روند. نوعی‌از این روش، مشهور به روش $GMRES$ از اهمیت فراوانی برخوردار است. در این پایان‌نامه روش مانده‌ای جدیدی تحت عنوان $MINRES-Nk$ را برروی دسته‌ای‌از دستگاه‌های معادلات خطی‌باماتریس ضرایب نرمال وقتی‌که طیف ماتریس روی یک منحنی‌درجهk قراردارد بیان‌نموده و آن را با روش $GMRES$مقایسه‌می‌کنیم.

مقدمه

روش‌های مانده مینیمال[1] دسته‌ای از روش‌های تکراری می‌باشند که جهت حل دستگاه‌های خطی با ماتریس ضرایب تنک و بزرگ بکار می‌روند.
فرض کنید A یک ماتریس مختلط و b برداری در C^n باشد.
زیرفضای کریلف از بعد m را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$k_m(A,b) = span\{b, Ab, A^۲b, \ldots, A^{m-۱}b\}.$$

اکنون دستگاه معادلات خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$Ax = b.$$

روش‌های مانده مینیمال جهت مینیمم سازی نرم بردار مانده $b - Ax$ بر روی همه‌بردارهای زیرفضای آفین $x_۰ + k_m(A, r_۰)$ طرح ریزی شده‌اند که در آن $x_۰$ بردار اولیه دلخواه و $r_۰ = b - Ax_۰$ می‌باشد.
ایده اساسی برای حل یک مسئله‌تنک وبزرگ با استفاده از روش‌های مانده‌ای، تصویر کردن مسئله بر روی زیرفضای کریلف با بعد m با استفاده از پایه متعامد ساخته شده توسط روش، حل مسئله m بعدی با استفاده از یک راه استاندارد و سپس بازیافتن جواب مسئله اصلی از روی مسئله تصویر شده می‌باشد.
برای نمونه‌می‌توان به روش مشهور $GMRES$ اشاره نمود که در سال ۱۹۸۶ توسط سعد[2] و شوالتز[3]، [۹] ارائه گردید. در این پایان نامه روش مانده‌ای جدیدی تحت عنوان $MINRES - Nk$ را روی رده خاصی از سیستم‌های خطی با ماتریس ضرایب نرمال، وقتی که طیف ماتریس روی یک منحنی جبری از درجه k قرار دارد معرفی می‌نماییم و با ارائه مثال‌های عددی، برتری این روش را بر روش $GMRES$ نشان می‌دهیم.

---

[1] *minres method*
[2] *saad*
[3] *shualtze*

بطور کلی مطالب این پایان نامه را در قالب ۴ فصل ارائه خواهیم نمود.

در فصل اول به بیان مقدمات، اصطلاحات و تعاریف اولیه پرداخته و روش $GMRES$ را توضیح می‌دهیم.

در فصل دوم‌ابتدا به بیان فرایند لانزوس پرداخته و سپس روش $MINRES-N2$ را توضیح می‌دهیم.

در فصل سوم روش $MINRES-N3$ را بیان می‌کنیم.

در فصل چهارم دو فصل قبل را تعمیم داده و روش $MINRES-Nk$ را بیان می‌کنیم و آن را با روش $GMRES$ مقایسه می‌نماییم.

فهرست مندرجات

فصل ۱

تعاریف و پیش نیازها

در این فصل به معرفی نمادها، کلمات کلیدی و تعاریف اولیه‌ای که در فصول آینده مورد نیاز هستند، می‌پردازیم.

۱.۱ کلمات کلیدی و اصطلاحات

$M_n(C)$: مجموعه‌همه ماتریس‌های $n \times n$ با درایه‌های مختلط.

با فرض اینکه $A = [a_{i,j}] \in M_n(C)$

A^T: ترانهاده ماتریس A یعنی: $A^T = [a_{j,i}]$.

$\bar{A}$: مزدوج ماتریس A یعنی: $\bar{A} = [\bar{a}_{i,j}]$.

A^*: ترانهاده مزدوج ماتریس A یعنی: $A^* = \bar{A}^T$.

A^{-1}: معکوس ماتریس A.

$\|A\|$: نرم مطلق[۱] یا ۱− نرم ماتریس A که برابر با ماکزیمم مجموع ستونی اعضای آن ماتریس از نظر قدرمطلق است.

$\lambda(A)$: طیف[۲] ماتریس A که مجموعه متشکل از مقادیر ویژه A است.

۲.۱ تعاریف اوّلیه

تعاریف و قضایای این فصل، برگرفته از منابع [۲], [۳], [٦], [۷], [۱۰]، می‌باشند.

۱−۲−۱ تعریف: با فرض اینکه $A, B \in M_n(C)$ آنگاه:

ماتریس A متقارن است هرگاه $A^T = A$.

ماتریس A هرمیتی است هرگاه $A^* = A$.

ماتریس A یکانی است هرگاه $AA^* = I$.

ماتریس A نرمال است هرگاه $AA^* = A^*A$.

---

[۱] *absolute matrix norm*

[۲] *spectrum*

۱—۲—۲ ماتریس هسنبرگی[1]: ماتریس $A = [a_{i,j}] \in M_n(C)$ یک ماتریس بالاهسنبرگی است اگر برای $i > j + ۱$ داشته باشیم $a_{i,j} = ۰$. اگر برای $i < j + ۱$ داشته باشیم $a_{i,j} = ۰$ آنگاه ماتریس A یک ماتریس پایین هسنبرگی است.

۱—۲—۳ ماتریس هاوس هولدر[2]: ماتریس‌هایی به شکل

$$P = I - ۲ww^T,$$

که در آن w برداری با ۲— نرم یکه است را ماترس‌های هاوس هولدر می‌گویند.

عموماً بردار w بگونه‌ای انتخاب می‌شود که:

$$Px = \alpha e_۱,$$

که در آن α یک اسکالر، $e_۱ = (۱, ۰, \ldots, ۰)^T$ و $x \in R^n$ است.

معمولاً قرار می‌دهیم

$$\alpha = -sign(\xi_۱)\|x\|_۲,$$

که در آن $\xi_۱ = e_۱^T x$.

بنابراین:

$$w = \frac{x + sign(\xi_۱)\|x\|_۲ e_۱}{\|x + sign(\xi_۱)\|x\|_۲ e_۱\|_۲}.$$

۱—۲—۴ خواص ماتریس‌های هاوس هولدر:

فرض کنید P یک ماتریس هاوس هولدر باشد، بنابراین خواص زیر را دارد:

۱) به ازای هر بردار $x \in R^n$، $\|Px\|_۲ = \|x\|_۲$، یعنی یک بازتاب، طول بردار را عوض نمی‌کند.

۲) P یک ماتریس متعامد است.

---

[1] *Hessenberg matrix*

[2] *House holder*

۳) $P^2 = I$.

۴) P یک مقدار ویژه ۱− و $(n-1)$ تا مقدار ویژه ۱ دارد.

۵) $det(P) = -1$.

۱−۲−۵ لم[۲]: بردار غیر صفر $x \neq e_1$ را در نظر بگیرید. همواره یک ماتریس هاوس هولدر P موجود است که Px مضرب e_1 است.

۱−۲−۶ ماتریس دوران گیونز: ماتریسی به شکل

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c & s & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & -s & c & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

که در آن $c^2 + s^2 = 1$؛ ماتریس دوران گیونز یا ماتریس دوران نامیده می‌شود.
این ماتریس‌ها و خواص آنها به طور مفصل در [۲] معرفی شده‌اند.

۱−۲−۷ زیرفضاهای کریلف[1]: زیرفضاهایی به شکل

$$k_m(A,b) = span\{b, Ab, A^2b, ..., A^{m-1}b\},$$

زیرفضاهای کریلف نامیده می‌شوند.

[1] *krylov subspase*

۱–۲–۸ روش‌های زیرفضای کریلف:

در حل سیستم $Ax = b$، روشی که یک جواب تقریبی x_m را از زیرفضای آفین $x_\circ + k_m$ از بعد m پیدا می‌کند، یک روش زیرفضای کریلف نامیده می‌شود.

این روش برروی زیرفضای

$$k_m(A, r_\circ) = span\{r_\circ, Ar_\circ, ..., A^{m-1}r_\circ\},$$

اعمال می‌شود که در اینجا $r_\circ = b - Ax_\circ$ و $x_\circ$ جواب اوایه دلخواه است.

اگر

$$x_i - x_\circ \in k_i(A, r_\circ) = span\{r_\circ, Ar_\circ, ..., A^{i-1}r_\circ\},$$

و یا به طور معادل

$$x_i \in x_\circ + k_i(A, r_\circ) = span\{r_\circ, Ar_\circ, ..., A^{i-1}r_\circ\},$$

باشد، آنگاه در تکرار mام، جواب ذیل‌الذکر، متعلق به زیرفضای بالا می‌باشد:

$$x_m \approx A^{-1}b = x_\circ + A^{-1}r_\circ.$$

برای اثبات این موضوع، می‌دانیم که چندجمله‌ای مینیمال A یک چند جمله‌ای به صورت $P(x) = x^m + c_{m-1}x^{m-1} + \ldots + c_1x + c_\circ$ و با درجه کمتر یا مساوی با m است به قسمی که $P(A) = \circ$.

اگر A قطری شدنی باشد، آنگاه تعداد مقادیر ویژه متمایز این ماتریس برابر با m است. با این توضیحات فرض کنید که A دارای مقادیر ویژه متمایز $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ باشد. تعریف می‌کنیم:

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_m) = c_m\lambda^m + \ldots + c_1\lambda + c_\circ.$$

همچنین قرار می‌دهیم، $A = X\Lambda X^{-1}$. بنابراین داریم:

$$P(A) = X(\Lambda - \lambda_1 I)(\Lambda - \lambda_2 I)\ldots(\Lambda - \lambda_m I)X^{-1} = \circ.$$

اگر A هیچ مقدار ویژه صفری نداشته باشد، آنگاه A^{-1} یک ترکیب خطی از $I, A, \ldots, A^{m-1}$ می‌باشد، یعنی:

$$A^{m-1} + c_{m-1}A^{m-2} + \ldots + c_1 I + c_0 A^{-1} = 0.$$

بنابراین:

$$A^{-1}r_0 \in span\{r_0, Ar_0, \ldots, A^{m-1}r_0\},$$

و در نتیجه $A^{-1}b \in x_0 + span\{r_0, Ar_0, \ldots, A^{m-1}r_0\}$ و $x_m = A^{-1}b$.

۱ــ۲ــ۹ ماتریس نواری[1]: این ماتریس‌ها دارای خصوصیات زیر هستند:

$$a_{i,j} \neq 0 \quad \text{فقط اگر} \quad i - m_l \leq j \leq i + m_u,$$

که در آن m_l و m_u دو عدد صحیح نامنفی هستند. عدد $m_l + m_u + 1$ پهنای باند ماتریس نامیده می‌شود.

۱ــ۲ــ۱۰ نکته: هر ماتریس مربعی (حقیقی یا مختلط) می‌تواند بصورت زیر تجزیه شود:

$$A = H + iS,$$

که در آن

$$H = \frac{1}{2}(A + A^*),$$
$$S = \frac{1}{2i}(A - A^*).$$

توجه شود که هر دو ماتریس H و S هرمیتی هستند درحالیکه iS یک ماتریس شبه هرمیتی است. ماتریس H قسمت حقیقی A و ماتریس iS قسمت شبه هرمیتی A نام دارد.

۱ــ۲ــ۱۱ تعریف: ماتریس A شبه هرمیتی است اگر:

$$A^* = -A.$$

[1] $Banded\ matrix$

۳.۱ ماتریس‌های نرمال

یادآوری می‌کنیم که، ماتریس A نرمال است هرگاه:

$$A^*A = AA^*.$$

۱–۳–۱ مثال:

آ) اگر ماتریس A یکانی باشد آنگاه $AA^* = I = A^*A$، بنابراین ماتریس A نرمال است.

ب) اگر ماتریس A هرمیتی باشد، $A = A^*$ آنگاه $AA^* = A^*A = A^۲$، بنابراین ماتریس A نرمال است.

۱–۳–۲ نکته: مشخصه ماتریس نرمالی که تمام درایه‌های آن حقیقی باشد به شرح زیر است:

— اگر حداقل یک درایه آن صفر باشد، آنگاه آن ماتریس متقارن یا پادمتقارن‌است.

— اگر همه درایه‌های آن ناصفر باشد، آنگاه ماتریس A متقارن است یا $AA^T = aI$ که $a \geq ۰$.

۱–۳–۳ قضیه: روابط زیر هم ارزند:

۱) ماتریس A نرمال است.

۲) ماتریس A^T نرمال است.

۳) ماتریس$\bar{A}$ نرمال است.

۴) ماتریسA^* نرمال است.

۵) ماتریس $A^{-۱}$ نرمال است.

٦) ماتریس $P(A)$ برای هر چند جمله‌ای دلخواه P نرمال است.

۷) ماتریس $A^{-۱}A^*$ یکانی است.

۸) ماتریس A با $A^{-۱}A^*$ جابجا می‌شود.

۹) از اینکه $AB = BA$ نتیجه می‌گیریم که $A^*B = BA^*$.

اثبات:

۱⇔۲

$$A^TA^{T^*}=A^{T^*}A^T \;\Leftrightarrow\; A^T\bar{A}=\bar{A}A^T \;\Leftrightarrow\; A^*A=AA^*.$$

۱⇔۳

$$\bar{A}\bar{A}^*=\bar{A}^*\bar{A} \;\Leftrightarrow\; \bar{A}A^T=A^T\bar{A} \;\Leftrightarrow\; AA^*=A^*A.$$

۱⇔۴

$$A^*A^{**}=A^{**}A^* \;\Leftrightarrow\; A^*A=AA^*.$$

۱⇔۵

$$A^{-1}(A^{-1})^*=(A^{-1})^*A^{-1} \;\Leftrightarrow\; A^*A^{-1}(A^{-1})^*=A^{-1}$$
$$\Leftrightarrow\; AA^*A^{-1}(A^{-1})^*=I \;\Leftrightarrow\; AA^*A^{-1}=A^*$$
$$\Leftrightarrow\; AA^*=A^*A.$$

۱⇔۶

فرض می‌کنیم $P(A)=a_nA^n+a_{n-1}A^{n-1}+\ldots+a_0I_n$. در این صورت چون به ازای هر $n\geq 0$ توان nام ماتریس A و همچنین مجموع ماتریس‌ها، نرمال است اگر و فقط اگر A نرمال باشد بنابراین $P(A)$ نرمال است اگر و فقط اگر A نرمال باشد.

۱⇔۷

$$(A^{-1}A^*)(A^{-1}A^*)^*=I \;\Leftrightarrow\; (A^{-1}A^*)(A(A^{-1})^*)=I$$
$$\Leftrightarrow\; A^*A(A^{-1})^*=A \;\Leftrightarrow\; A^*A=AA^*.$$

۱⇔۸

$$A(A^{-1}A^*)=(A^{-1}A^*)A \;\Leftrightarrow\; A^*=A^{-1}A^*A$$
$$\Leftrightarrow\; AA^*=A^*A.$$

۱⇔۹

اگر فرض کنیم $A=B$ آنگاه $A^*A=AA^*$، بنابراین A نرمال است. برعکس اگر فرض کنیم A نرمال و $AB=BA$ طبق قضیه و بدون کاستن از کلیت مسئله می‌توان فرض کرد A قطری است. پس با توجه به فرض $AB=BA$ به وضوح داریم: $A^*B=BA^*$.

برای مشاهده روابط هم ارز دیگر به [۵] رجوع شود.

۱ـ۳ـ۴ تعریف: ماتریس A را متعامد تصویری[1] می‌نامیم هرگاه، $A^*=A$ و $A^2=A$. یا به عبارتی A ماتریسی خودالحاق و خودتوان باشد.

۱ـ۳ـ۵ تعریف: ماتریس A را بطور یکانی قطری شدنی گوییم، هرگاه A متشابه یکانی با یک ماتریس قطری باشد. همچنین A را بطور متعامد قطری شدنی گوییم، هرگاه A هم ارز متعامد یک ماتریس قطری باشد.

۱ـ۳ـ۶ قضیه [۶]: فرض کنید A یک ماتریس با مقادیر ویژه $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ باشد. جملات زیر هم ارزند:

آ) ماتریس A نرمال است.

ب) ماتریس A بطور یکانی قطری شدنی است.

ج) برای A یک مجموعه متعامد یکه از بردارهای ویژه‌اش موجود است.

۱ـ۳ـ۷ قضیه: اگر A یک ماتریس هرمیتی باشد آنگاه:

- همه مقادیر ویژه آن حقیقی‌اند.
- بطور یکانی قطری شدنی است.

[1] *ortoghonal projection*