بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه فردوسی مشهد

دانشکدهٔ علوم -گروه ریاضی

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض

موضوع:

«مسائل کنترل بهینه در فضاهای با بعد نامتناهی»

استاد راهنما: جناب آقای دکتر علی وحیدیان کامیاد

استادیار گروه ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد

استاد مشاور: جناب آقای دکتر اسدالله نیکنام

دانشیار گروه ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد

اساتید داور: جناب آقای دکتر نظام‌الدین فقیه

دانشیار دانشگاه شیراز

جناب آقای دکتر رجب اصغریان

دانشیار دانشگاه فردوسی مشهد

مؤلف: حسین آذرپیرا

اسفند ۱۳۷۲

تقدیم به همهٔ :

- دوستداران علم و مشوّقین به تحصیل علم و دانش
- پویندگان خستگی ناپذیر وادی دانش (دانشجویان) و آنها که با گـوهر علم مزیّن شده‌اند (دانشمندان).
- کسانیکه علم و دانش را وسیله‌ای برای خدمت به بشریت قرار می‌دهند.

شماره ....

تاریخ ....

پیوست ....

دانشگاه فردوسی مشهد

دانشکدهٔ علـوم

بسمه تعالی

جلسهٔ دفاع ازپایان نامهٔ آقای حسین آذرپیرا دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی درساعت ۸/۵ صبح روز سه شنبه ۷۲/۱۲/۱۰ دراتاق شماره ۳۳ ساختمان خوارزمی دانشکدهٔ علوم ۲ باحضـــور پنج نفرازامضأ کنندگان زیرتشکیل گردید وپس از بررسی ونظرهیأت داوران ، پایـــــان نامهٔ نامبـــرده بانمرهٔ ۱۹/۳ (نوزده ۳۰) موردتأئید قرارگرفت .

عنوان رســالـه : " مسائل کنترل بهینه درفضـــای نامتناهی "

تعداد واحد : ۶ واحـــد

داوررسالـه : آقای دکترنظام الدیـن فقیــه
دانشیار دانشگاه شیراز

داوررسالـــه : آقای دکتررجب اصغریـــان
دانشیار دانشگاه فردوسی " مشهد "

استادراهنما : آقای دکترعلی وحیدیان کامیاد
استادیار دانشگاه فردوسی " مشهد "

استاد مشاور : دکتراسداله نیکنـــام
دانشیار دانشگاه فردوسی " مشهد "

مدیرگروه ریاضی : آقای دکتراسداله نیکنام
دانشیار دانشگاه فردوسی " مشهد "

قرآن کریم:

در جمع بندگان الهی فقط علما و دانشمندان هستند که (عظمت خداوند را به خوبی درک کرده)و در مقابل خداوند خشوع می‌کنند.

«سوره فاطر آیه ۲۵»

تقدیر:

بسمه تعالی

سپاس و ستایش مخصوص پروردگاری است که با قلم قدرت خویش جهان هستی را در اعلی ترین درجه کمال از علم و دانش نقش فرمود و در نهاد آدمی نیز میل به کسب علم را به ودیعه نهاد و علما و دانشمندان مؤمن را بر تمام گروهها و اصناف بشری برتری بخشید، درود بی‌پایان بر فرستاده امین و صدیق او «رسول اکرم (ص)» و خاندان ارجمندش که واسطه فیض الهی بر بشریت شدند و دین اسلام را که دین علم و آگاهی است برای بشریت به ارمغان آوردند. به یقین می توان ادعا نمود که در تعلیمات هیچ آئین و مکتبی به اندازه اسلام به «کسب علم و دانش» توصیه نشده است و در اسلام نیز هیچ موضوعی به قدر موضوع **«کسب علم»**، **«قدر و منزلت دانشجویان»** و **«جایگاه علما و دانشمندان»** مورد توجه و اهمیت قرار نگرفته است و این خود الهام بخش وظیفه‌ای خطیر بر دوش ماست، لذا هم اکنون که مقطعی دیگر از تحصیلاتم پایان می‌یابد خداوند را شاکرم که شوق کسب علم را در نهاد من قرارداد و در این مسیر، که بکرات شاهد الطاف او بوده‌ام قدم بر میدارم.

نگارش این مجموعه را مرهون لطف اساتید ارجمندی می‌باشم که تاکنون مشفقانه مرا هدایت نموده‌اند خصوصاً اساتید محترم آقای دکتر **«وحیدیان کامیاد»** (که راهنمائی مستقیم مرا در این رساله بعهده داشته‌اند)، آقای دکتر **«نیکنام»** (که مشاوره علمی مرا در این مدت پذیرفته‌اند) و آقای دکتر **«هنری»** (که مشوق و راهنمای من در مقطع کارشناسی ارشد بوده‌اند)، که بدینوسیله مراتب امتنان و حق‌شناسی خود را نسبت به این اساتید ارجمند ابراز می‌دارم، همچنین تشکر می‌کنم از اساتید محترم آقایان دکتر **«فقیه»** و دکتر **«اصغریان»** که با قبول زحمت، داوری این رساله را بعهده گرفته‌اند و بجاست که از آقای پرفسور **«فتورینی»** استاد محترم دانشگاه کالیفرنیا که با محبت بسیار مکاتبات اینجانب را پاسخ داده و با ارسال مقالاتی، سهم زیادی در تدوین این رساله دارند نیز تشکر و قدردانی نمایم.

در مدت تدوین این رساله شاهد محبت‌ها و مساعدت‌های زیادی از طرف دانشجویان محترم تحصیلات تکمیلی (خصوصاً آقایان: **آقا صفری، سهله، ابراهیمی و گچ‌پزان**)، کارمندان و کارکنان

محترم دانشکده علوم (خصوصاً سرکار خانمها: **«تهرانی»** و **«صابری»** از گروه ریاضی و **آقای «رسول اتحاد»** مسئول محترم کتابخانه) و کارکنان مؤسسه حروفچینی قلم (خصوصاً آقای **«صدیقی»** مسئول محترم مؤسسه) بوده‌ام که این محبت‌ها را هرگز فراموش نکرده و مراتب تشکر خود را صمیمانه ابراز می‌دارم

فریضه است که مراتب سپاس خود را خدمت همه اعضای خانواده‌ام اعلام دارم، خصوصاً **پدر و مادرم**، که با تحمل مشکلات فروان، فرزندان خود را در مسیر کسب علم قرار دادند، زحمات ایشان را ارج نهاده و اجر و پاداش آنها را از خداوند خواهانم.

از همسر خوب و مهربانم و همچنین از خانواده محترم ایشان که صبورانه مشکلات دوران تحصیل اینجانب را پذیرا شده‌اند قدردانی می‌کنم بویژه لازم است از پدر بزرگوار ایشان مرحوم **«حاج علی اکبر طاهری»** که از دوستداران علم و از مشوقین من در امر تحصیل بودند به نیکی و عزت یاد نموده و برای ایشان طلب مغفرت و رحمت نمایم.

از **فرزندان** خردسال خودم که با ابراز محبت‌های کودکانه خود، لحظات را برای من شیرین می‌کنند متشکرم و برای آنها آرزوی توفیق و سربلندی می‌نمایم.

در خاتمه، توفیق روزافزون و سربلندی همه دانشجویان، اساتید، دانشمندان بالاخص آنها که در بلاد اسلامی خدمت می‌کنند را از خداوند متعال خواهانم و به روح مطهر رهبر انقلاب حضرت **امام خمینی** قدس سره و ارواح مطهر **شهیدان** گلگون کفن و **جانبازان** ایثارگر که با نثار خون خویش امنیت لازم برای هرگونه تلاشی را ضمانت نمودند صلوات و درود می‌فرستم و امیدوارم خداوند همگان را در جهت رضای خویش و خدمت به جامعه بشری هدایت فرماید.

حسین آذرپیرا

اسفند ماه ۱۳۷۲

«فهرست»

موضوع: **صفحه**

چگونه است که نتایج «ریاضیات» این محصول اندیشه محض و مستقل از تجربه، اینچنین تحسین‌انگیز در مورد اشیاء «حقیقی» پذیرفته می‌شوند.

«آلبرت اینشتین»

بسمه تعالی

چکیده

مسائل بهینه سازی خصوصاً مسائل «کنترل بهینه» یکی از شاخه‌های زیبای ریاضیات است که در اثبات مفاهیم و قضایای آن به نحو بسیار شایسته‌ای از ریاضیات محض استفاده شده است و در قرن اخیر کاربردهای بسیار زیاد و متنوع در شاخه‌های مختلف نظری، صنعت و تکنولوژی داشته است.

در ابتدا حل **«مسائل کنترل بهینه فشرده»** در فضای اقلیدسی R^n مورد بررسی قرار می‌گرفت، **«بلمن**(۱)**»** و **«پنتریاگین**(۲)**»** از جمله دانشمندانی بودند که در حدود سالهای ۱۹۵۷ و بعد از آن به حل اینگونه مسائل پرداختند. روش بلمن [۱۳] اساس حل این مسائل به روش برنامه‌ریزی پویاست و پنتریاگین با استفاده از حساب تغییرات در محاسبه مقدار ماکزیمم تابعی‌ها روشی برای مسئله کنترل بهینه در فضای R^n ارائه کرد که به اصل ماکزیمم پنتریاگین معروف است [۳۱]که ما در بخش اول از فصل اول این رساله اشاره‌ای به آنها خواهیم داشت پس از آنها **اکلند**(۳) در سال ۱۹۷۹ روش پنتریاگین را بهبود بخشید[۳]

با پیشرفت ریاضیات بررسی **«مسائل کنترل بهینه پارامتر توزیعی»** در **فضاهای با بعد نامتناهی** (فضاهای باناخ و هیلبرت) آغاز شد، که از آن جمله می‌توان به کارهای **«روبیو**(۴)**»**[۳۲]، **«لیون**(۵)**»**[۲۱] و **«فتورینی**(۶)**»**[۵] و [۶] ... در این زمینه اشاره نمود.

رساله حاضر به بررسی مسائل کنترل بهینه در فضاهای با بعد نامتناهی پرداخته و برای این مسائل نیز اصول ماکزیممی نظیر اصل ماکزیمم پنتریاگین ارائه می‌نماید. همچنین در حالتی که ممکن است به کنترل بهینه جواب دسترسی نداشته و با دنباله **«کنترلهای زیر بهینه**(۷)**»** یا «تقریباً بهنیه» سروکار داریم نیز به بررسی همگرائی این دنباله‌ها می‌پردازد.

1- Belman

2- Pontryagin

3- Ekeland

4- Rubio

5- Lions

6- Fattorini

7- suboptimal controsl.

این رساله مشتمل بر یک فصل فرعی و سه فصل اصلی است در فصل فرعی که عنوان فصل صفر (۰) را برای آن قرار داده‌ایم مباحثی از «آنالیز تابعی» را آورده‌ایم که در فصول اصلی از آنها استفاده می‌شود سه فصل اصلی دیگر به مطالب زیر اختصاص دارد:

فصل اول: در این فصل پس از مروری اجمالی بر مسائل کنترل بهینه فشرده در فضای R^n و اصل ماکزیمم پنتریاگین و طرح مسائل کنترل پارامتر توزیعی، به معرفی مسائل کنترل بهینه بگونه‌ای جدید می‌پردازیم به این صورت که تعریفی جدید از یک **«سیستم»** خواهیم داشت که: «عبارت است از یک نگاشت که در سه شرط مخصوص صدق کند این شروط را S_1 و S_2 و S_3 نامیده‌ایم» و سپس نشان داده‌ایم که اکثر مسائل (ورودی-خروجی) را می‌توان با این نگاشت تعریف کرد خصوصاً یک سیستم که توسط معادلات شبه خطی در فضاهای باناخ توصیف شده است مورد بررسی قرار گرفته است و در ادامه با تعریف «تابعی ارزش» در مسائل کنترل بهینه بصورت نگاشت فوق، نشان داده‌ایم که: **«یک مسئله کنترل بهینه نیز یک سیستم است»**، که در همان سه شرط مذکور صدق می‌کند. و در خاتمه این فصل قضایائی تحت عنوان «اصل ماکزیمم» برای این مسائل ارائه نموده‌ایم.

فصل دوم: غالباً در مسائل علمی دسترسی به کنترل بهینه جواب مقدور نیست، لذا با دنباله‌هائی کنترلهای زیر بهینه کار می‌شود چیزی که حائز اهمیت است بررسی شرائطی است که تحت آن‌ها، این دنباله‌ها به کنترل بهینه جواب همگرا شوند به همین منظور فصل دوم بحثی پیرامون **«همگرائی کنترلهای زیر بهینه»** است و یک مسئله کنترل بهینه که توسط معادلات شبه خطی در فضاهای باناخ توصیف شده است بررسی شده و قضیه‌ای نیز در مسائل کنترل بهینه زمانی داریم.

فصل سوم: حل مسائل کنترل بهینه از طریق تبدیل آنها به یک **«مسئله برنامه‌ریزی غیر خطی با بعد نامتناهی»** است. با استفاده از «مسئله برنامه‌ریزی» یک قضیه «اصل ماکزیمم» و برای کنترل بهینه جواب، و قضیه «اصول همگرائی» برای دنباله کنترلهای زیر بهینه را اثبات نموده‌ایم و در خاتمه به بررسی این قضایا در مورد یک مسئله کنترل بهینه زمانی که سیستم آن به وسیله معادلات دیفرانسیل شبه خطی در فضای هیلبرت توصیف شده است پرداخته‌ایم.

رسول اکرم:

هرکس در طلب علم از خانه خارج شود عمل او در راه خدا محسوب می‌شود تا هنگامی که به خانه بازگردد.

«مینة المرید شهید ثانی صفحه ۸»

فصل (۰) - صفر

پیشنیازها

در این فصل تعاریف و قضایائی بیان میشوند که در فصلهای بعد مستقیم یا غیر مستقیم از آنها استفاده شده است، هدف اصلی فضاهای باناخ و هیلبرت و بررسی خواص عمگرها و تابعی های تعریف شده روی این فضاهاست به همین منظور از فضای توپولوژیک و فضای توپولوژیک برداری شروع کرده‌ایم .

۰-۱- *فضای توپولوژیکی*

تعریف : یک فضای توپولوژیکی عبارتست از یک مجموعهٔ X همراه با یک دستهٔ τ از زیر مجموعه هایش (که‌مجموعه های باز) نامیده می‌شوند با خواص زیر :

الف : $\phi\in\tau$ $\quad$ $X\in\tau$

ب : اشتراک هر تعداد متناهی از اعضای τ نیز متعلق به τ است.

ج : اجتماع هر دسته از اعضای τ نیز متعلق به τ است.

دستهٔ τ فوق را یک توپولوژی روی X مینامیم. و فضای توپولوژیکی را با (X,τ) نشان میدهیم و چنانچه توپولوژی τ مشخص باشد و بیم اشتباه نرود عبارت «X یک فضای توپولوژیکی است» را خواهیم آورد. اگر X یک فضای توپولوژیکی باشد و τ توپولوژی روی X، مجموعهٔ $A\subset X$ را بسته می‌گوئیم هرگاه مکمل A نسبت به X متعلق به τ باشد (یعنی باز باشد). بستار $\bar{E}$ از $(E\subset X)$

عبارتست از اشتراک همه مجموعه های بسته شامل E. همسایگی هر نقطه $P \in X$ عبارتست از هر یک از اعضای τ که شامل p باشند. (x,τ) را فضای هاسدورف نامیم هرگاه τ توپولوژی هاسدورف باشد به این معنی که هر دو نقطه متمایز p_1 و p_2 در x دو همسایگی از هم جدا داشته باشند. یک مجموعهٔ $K \subset X$ را فشرده نامیم هرگاه هر پوشش باز k شامل یک زیر پوشش باز k باشد. یک دنبالهٔ $\{u_n\}$ از نقاط X را که X یک فضای توپولوژیک هاسدورف است همگرابه نقطهٔ $x \in X$ نامیم $(\lim_{n \to \infty} x_n = x)$ هرگاه هر همسایگی از x تمام عناصر این دنباله را بجز احتمالاً تعدادی متناهی از عناصر دنباله رادر خود داشته باشد.

۰-۲- *فضاهای برداری توپولوژیکی :*

فرض کنیم که (X,τ) یک فضای توپولوژیکی باشد که در آن X یک فضای برداری است و دو شرط زیر نیز برقرار است.

الف) هر نقطه $x \in X$ یک مجموعهٔ بسته است

ب) عملگرهای (اعمال) فضای برداری (جمع برداری و ضرب در اسکالر) با این توپولوژی پیوسته اند.

قضیه : هر فضای برداری توپولوژیک یک فضای هاسدورف است.

اثبات : [۲۸]قضیهٔ ۱-۱۲] فضای برداری توپولوژیک X را موضعاً فشرده نامیم هرگاه $0 \in X$ یک همسایگی داشته باشد که بستار آن فشرده باشد. همچنین فضای X را با خاصیت هاینه‌بورل گوئیم هرگاه هر زیر مجموعهٔ بسته و کراندار در X فشرده باشد.

قضیه : فضای برداری توپولوژیک X با بعد متناهی است اگر و فقط اگر موضعاً فشرده باشد

[اثبات :۲۸-صفحه ۱۷]

قضیه **: اگر فضای بردایر توپولوژیک موضعاً کراندار (برای $0 \in X$ یک همسایگی کراندار وجود دارد) X دارای خاصیت هاینه بورل باشد آنگاه X با بعد متناهی است. [اثبات : به [۲۸ صفحه ۱۷]و [۲۵] مراجعه شود]**

انواع بیشتری از فضاهای برداری توپولوژیک و خواص آنها را (بطور دقیق) در مراجع [۲۸] و [۲۵] میتوان دید. در ادامهٔ مطالب با فضاهای برداری توپولوژیکی کار می‌کنیم که کاربرد زیادتری دارند. توپولوژی آنها توپولوژی حاصل از متر خواهد بود و خواص فضاهای متری را نیز دارند این فضاها را تحت عنوان فضاهای نرمدار، باناخ و هیلبرت مطالعه خواهیم کرد.

محدب بودن یک زیر مجموعه در یک فضای برداری **: اگر X یک فضای برداری باشد زیر مجموعهٔ A از X را محدب نامیم هرگاه :**

$$tA + (1-t)A \subset A \qquad (0 \le t \le 1)$$

به عبارت دیگر اگر $x \in A$ و $y \in A$ آنگاه $tx + (1-t)y \in A$ بازای هر $0 \le t \le 1$ اشتراک هر دسته از مجموعه های محدب، محدب است و چنانچه یک دستهٔ Γ از مجموعه های محدب کلاً مرتب (با رابطهٔ $\subset$) داشته باشیم اجتماع همهٔ اعضای Γ محدب است . اگر A و B محدب باشد A+B نیز محدب است.

پوستهٔ محدب **: پوسته محدب مجموعهٔ A در فضای برداری X عبارتست از ترکیبات محدب همهٔ اعضای A ، یعنی مجموعهٔ همه جمعک های $\sum_{i=1}^{n} t_i x_i$ کـه $x_i \in A$ و $0 \le t_i \le 1$ و n دلخـواه است. پوستهٔ محدب یک مجموعهٔ A ، خود محدب است**

فضای برداری توپولوژیک موضعاً محدب **: فضای برداری توپولوژیک X را موضعاً محدب (یا محدب موضعی) نامیم هرگاه یک پایهٔ موضعی داشته باشد که اعضای آن محدب باشد. بسیاری از خواص جالب فضاهای برداری توپولوژیک از "محدب موضعی" بودن نتیجه می‌شوند، از جمله اینکه**